Elementarna matematika 1
Zadaci iz polinoma

1. Odredite sve polinome $p \in \mathbf{R}[x]$ koji zadovoljavaju
$$p(1) + p(x) + p(x^2) = (1 + x + x^2)p(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$
(Rj: $p(x) = a(x^2 - x)$, $a \in \mathbf{R}$)

2. Podijelite polinome $f(x) = x^7 + 5x^6 - 3x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 - 7x + 3$ i $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.
(Rj: $q(x) = x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 4x - 40$, $r(x) = -75x^2 + 117x + 43$)

3. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{256} - 8x^{64} + 11x^8 - 7$ sa $g(x) = x^2 - 1$.

4. Neka je $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Odredite a, b, $c \in \mathbf{R}$ tako da f pri dijeljenju sa $x - 1$, $x - 2$ i $x - 3$ daje redom ostatke -8, -9, -4.
(Rj: $a = -3$, $b = 1$, $c = -7$)

5. Dokažite da je polinom $f(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1 \quad (n \geq 2)$ djeljiv polinomom $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$.

6. Neka su f, $g \in \mathbf{R}[x]$, $g(x) = x^3 - ax^2 - ax - 1$. Dokažite da $M(f, g)$ nije djeljiva polinomom $x + 1$.

7. Nađite sve polinome $f \in \mathbf{R}[x]$ koji zadovoljavaju
$$x(x-1)f(x+1) = (x-2)(x+1)f(x-1), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

8. Odredite koeficijent a tako da polinom $f(x) = x^n - ax^{n-1} + ax - 1$ bude djeljiv sa $g(x) = (x-1)^2$.

9. Odredite koeficijente a i b polinoma $p(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + ax + b$ ako je poznato da p ima trostruku cjelobrojnu nultočku.

10. Dokažite da je polinom $f(x) = (1 - x^n)(1 + x) - 2nx^n(1 - x) - n^2x^n(1 - x)^2$ djeljiv sa $g(x) = (1 - x)^3$.

11. Nađite nultočke polinoma $f(x) = 2x^5 - 12x^3 + 12x^2 - 14x + 12$.
(Rj: $x = 1, 2, -3, \pm i$)

12. Neka je $f \in \mathbf{Z}[x]$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima koji u četiri različita cijela broja poprima vrijednost 7. Dokažite da f niti u jednom cijelom broju ne poprima vrijednost 14.

13. Dokažite da polinom $p \in \mathbf{Z}[x]$ sa cjelobrojnim koeficijentima koji poprima vrijednost 1 za tri različita cijela broja ne može imati cjelobrojnu nultočku.

14. Dokažite da ne postoji polinom $p \in \mathbf{Z}[x]$ takav da je $p(11) - p(7)$ prost broj.

15. Dokažite: ako polinom $f(x) = x^3 - px + q \in \mathbf{R}[x]$ ima tri realne nultočke, onda je $p > 0$.