Elementarna matematika 1

Oblici matematičkog mišljenja

2007/2008

Teorem (poučak)

Teorem (poučak) = matematički sud (u nekoj matematičkoj teoriji) čija se istinitost utvrđuje dokazom, odnosno logičkim zaključivanjem iz aksioma, definicija i već dokazanih teorema (te teorije).

Pod teoremom se uvijek podrazumijeva istiniti sud.

Teoremi proširuju i produbljuju znanje o nekom području matematike i njegovim objektima.

Posebna imena za neke teoreme:

propozicija = teorem za kojeg postoji kratak i jednostavan dokaz (propozicija je često tehnička tvrdnja);

Teoremi proširuju i produbljuju znanje o nekom području matematike i njegovim objektima.

Posebna imena za neke teoreme:

lema = teorem koji (obično) sam za sebe nije od posebnog značaja nego služi kao etapa u dokazu nekog važnijeg i složenijeg teorema;

Teoremi proširuju i produbljuju znanje o nekom području matematike i njegovim objektima.

Posebna imena za neke teoreme:

korolar = neposredna i jednostavna posljedica nekog prethodno dokazanog teorema (dokaz korolara često je toliko očit da ga ni ne pišemo).

U teoremu mora biti jasno istaknuto:

- uz koje se uvjete u njemu razmatra određeni objekt
- što se o tome objektu tvrdi.

U formulaciji teorema razlikuju se dva dijela:

- pretpostavka (uvjet, hipoteza) P
- tvrdnja (zaključak, posljedica) Q

Pretpostavka teorema (P) = jedan ili više sudova koji se smatraju istinitima. Tvrdnja teorema (Q) = sud kojeg treba dokazati.

Logički zapis teorema:

$$P \Longrightarrow Q$$

Ključne riječi u iskazu teorema:

Ako P, *onda* Q.

Bitno je u teoremu naučiti razlikovati pretpostavku i tvrdnju.

Primjeri teorema (1)

- Umnožak dvaju uzastopnih parnih prirodnih brojeva a i b djeljiv je s 8.

$P =$ a i b su uzastopni parni prirodni brojevi.

$Q =$ umnožak ab djeljiv je s 8.

- Dijagonale romba međusobno su okomite.

$P =$ Četverokut je romb.

$Q =$ Dijagonale romba su međusobno okomite.

- U svakom trokutu nasuprot dviju stranica jednakih duljina leže jednaki kutovi.

$P =$ Dan je trokut čije su dvije stranice jednakih duljina.

$Q =$ Kutovi nasuprot tih stranica su jednaki.

- (Talesov teorem o kutu nad promjerom) Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi kut.

$P =$ Dan je obodni kut nad promjerom kružnice.

$Q =$ Taj kut je pravi kut.

- (Pitagorin teorem) Zbroj kvadrata duljina kateta svakog pravokutnog trokuta jednak je kvadratu duljine njegove hipotenuze.

$P =$ Dan je pravokutni trokut.
$Q =$ Zbroj kvadrata duljina njegovih kateta jednak je kvadratu duljine njegove hipotenuze.

Primjeri teorema (2)

- Ako su *a* i *b* dva uzastopna parna prirodna broja, onda je umnožak *ab* djeljiv s 8.
- Ako je dani četverokut romb, onda su njegove dijagonale međusobno okomite.
- Ako su u nekom trokutu dvije stranice jednakih duljina, onda su njima nasuprotni kutovi jednaki.

- (Talesov teorem o kutu nad promjerom) Ako je dan obodni kut nad promjerom kružnice, onda je taj kut pravi.
- (Pitagorin teorem) Ako su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, onda vrijedi jednakost $a^2 + b^2 = c^2$.
- Ako je niz realnih brojeva konvergentan, onda je on Cauchyjev.

- Prirodni broj djeljiv je s 10 ako mu je znamenka jedinica jednaka 0.

$P =$ Znamenka jedinica nekog prirodnog broja je 0.

$Q =$ Taj broj je djeljiv s 10.

- (K – S – K sukladnost) Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu.

$P =$ Dva se trokuta podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu.

$Q =$ Ti su trokuti sukladni.

Teorem se može iskazati (formulirati) i tako da se pretpostavka i tvrdnja odvoje u posebne rečenice.

Ključne riječi u tom slučaju:
Neka P. Tada Q.

Primjeri teorema (3)

- Neka su a i b dva uzastopna parna prirodna broja. Tada je njihov umnožak ab djeljiv s 8.
- Neka je dani četverokut romb. Tada su njegove dijagonale međusobno okomite.
- (Pitagorin teorem) Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Tada vrijedi jednakost $a^2 + b^2 = c^2$.

- Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ različiti prirodni brojevi manji od $2n$. Tada među njima postoje barem tri broja, takva da je jedan od njih jednak zbroju druga dva.
- Neka su a, b, c i d redom ostaci pri dijeljenju prirodnog broja n s 2, 3, 5 i 11. Tada je broj $15a + 10b + 6c + 30d - n$ djeljiv s 30.

Zapamtimo dobro

Ključne riječi u iskazivanju teorema su:

Ako ... , *onda* ...

ili

Neka ... . *Tada* ... .

Uočimo:

U iskazu teorema nema mjesta frazi

kažemo da je ...

Obrat teorema

Uz teorem $P \Longrightarrow Q$ važan je i obrat tog teorema, $Q \Longrightarrow P$.

Iako teorem $P \Longrightarrow Q$ vrijedi, njegov obrat $Q \Longrightarrow P$ ne mora (ali može!) biti istinit.

Primjeri obrata teorema (1)

- Neka su $a, b, c \in \mathbb{N}$. Ako c dijeli a onda c dijeli i umnožak ab.

$P = c$ dijeli a.

$Q = c$ dijeli umnožak ab.

Obrat ($Q \Longrightarrow P$):

Neka su $a, b, c \in \mathbb{N}$. Ako c dijeli umnožak ab, onda c dijeli a.

Obrat nije istinit! Npr. $a = 5$, $b = 27$, $c = 3$.

Primjeri obrata teorema (1)

- Neka su $a, b, c \in \mathbb{N}$. Ako c dijeli a onda c dijeli i umnožak ab.

$P = c$ dijeli a.

$Q = c$ dijeli umnožak ab.

Obrat $(Q \Longrightarrow P)$:

Neka su $a, b, c \in \mathbb{N}$. Ako c dijeli umnožak ab, onda c dijeli a.

Obrat nije istinit! Npr. $a = 5$, $b = 27$, $c = 3$.

▶ Ako je u ravnini pravac p okomit na pravac q, onda se pravci p i q sijeku.

$P =$ U ravnini je pravac p okomit na pravac q.

$Q =$ Pravci p i q se sijeku.

Obrat ($Q \Longrightarrow P$):

Ako se pravci p i q u ravnini sijeku, onda su oni međusobno okomiti.

Obrat nije istinit.

- Ako je u ravnini pravac p okomit na pravac q, onda se pravci p i q sijeku.

$P =$ U ravnini je pravac p okomit na pravac q.

$Q =$ Pravci p i q se sijeku.

Obrat ($Q \Longrightarrow P$):

Ako se pravci p i q u ravnini sijeku, onda su oni međusobno okomiti.

Obrat nije istinit.

U oba prethodna primjera konstruirali smo kontraprimjer (protuprimjer) kojim smo opovrgli obrat teorema.

(negacija univerzalnog kvantifikatora!)

Primjeri obrata teorema (2)

- (Talesov teorem o kutu nad promjerom) Neka je $\overline{AB}$ dijametar kružnice, a T bilo koja točka te kružnice, različita od A i B. Tada je kut $\sphericalangle ATB$ pravi.

  Obrat: Ako je $\sphericalangle ATB$ pravi kut, onda točka T leži na kružnici s dijametrom $\overline{AB}$.

  Obrat je istinit.

Primjeri obrata teorema (2)

- (Talesov teorem o kutu nad promjerom) Neka je $\overline{AB}$ dijametar kružnice, a T bilo koja točka te kružnice, različita od A i B. Tada je kut $\sphericalangle ATB$ pravi.

Obrat: Ako je $\sphericalangle ATB$ pravi kut, onda točka T leži na kružnici s dijametrom $\overline{AB}$.

Obrat je istinit.

- (Pitagorin teorem) Neka su $a \leq b \leq c$ duljine stranica nekog trokuta. Ako je taj trokut pravokutan, onda je $a^2 + b^2 = c^2$.

Obrat: Neka su $a \leq b \leq c$ duljine stranica nekog trokuta. Ako je $a^2 + b^2 = c^2$, onda je taj trokut pravokutan.

Obrat je istinit.

- (Pitagorin teorem) Neka su $a \leq b \leq c$ duljine stranica nekog trokuta. Ako je taj trokut pravokutan, onda je $a^2 + b^2 = c^2$.
  Obrat: Neka su $a \leq b \leq c$ duljine stranica nekog trokuta.Ako je $a^2 + b^2 = c^2$, onda je taj trokut pravokutan.
  Obrat je istinit.

- Broj a je nultočka polinoma f ako je f djeljiv polinomom $g(x) = x - a$.

$P =$ Polinom f djeljiv je polinomom $g(x) = x - a$.

$Q =$ Broj a je nultočka polinoma f.

Obrat: Ako je broj a nultočka polinoma f, onda je polinom f djeljiv polinomom $g(x) = x - a$.

Obrat je istinit.

- Broj a je nultočka polinoma f ako je f djeljiv polinomom $g(x) = x - a$.

$P =$ Polinom f djeljiv je polinomom $g(x) = x - a$.

$Q =$ Broj a je nultočka polinoma f.

Obrat: Ako je broj a nultočka polinoma f, onda je polinom f djeljiv polinomom $g(x) = x - a$.

Obrat je istinit.

Vrijedi

$$((P \Longrightarrow Q)\&(Q \Longrightarrow P)) \equiv (P \Longleftrightarrow Q)$$

U slučaju kad su istiniti i teorem $P \Longrightarrow Q$ i njegov obrat $Q \Longrightarrow P$, oba ta istinita suda možemo zapisati zajedno kao jedan teorem, $P \Longleftrightarrow Q$.

Čitamo: P ako i samo ako Q.

Dokazati ekvivalenciju $P \iff Q$ znači dokazati obje implikacije $P \implies Q$ i $Q \implies P$.

Primjeri teorema i obrata

- (Talesov teorem o kutu nad promjerom i njegov obrat) Kut $\sphericalangle ATB$ je pravi kut ako i samo ako točka T leži na kružnici s dijametrom $\overline{AB}$.
- (Pitagorin teorem i negov obrat) Neka su $a \leq b \leq c$ duljine stranica nekog trokuta. Taj trokut je pravokutan, ako i samo ako vrijedi jednakost $a^2 + b^2 = c^2$.

Od pojma do teorema — primjeri

- Pojam: nultočka polinoma

Definicija: Nultočka polinoma f s kompleksnim koeficijentima je svaki kompleksni broj a takav da je $f(a) = 0$.

Od pojma do teorema — primjeri

- Pojam: nultočka polinoma

Karakterizacija (teorem - nužan i dovoljan uvjet da bi broj a bio nultočka polinoma f):
(Bézoutov teorem) Broj a je nultočka polinoma f ako i samo ako je f djeljiv polinomom $g(x) = x - a$.

Ne miješati definiciju i karakterizaciju!

▶ Pojam: tangencijalni četverokut

Definicija:

Za četverokut kažemo da je tangencijalan ako su mu sve četiri stranice tangente iste kružnice.

Karakterizacija (teorem - nužan i dovoljan uvjet da bi četverokut bio tangencijalan):

Četverokut je tangencijalan ako i samo ako su mu zbrojevi duljina nasuprotnih stranica jednaki.

Pravila zaključivanja (pravila izvoda)

U dokazivanju teorema $P \Longrightarrow Q$ koristit ćemo osnovna pravila zaključivanja (pravila izvoda):

- pravilo otkidanja (modus ponens)
- zakon silogizma
- pravilo generalizacije
- princip isključenja trećeg (tertium non datur)

Pravilo otkidanja (modus ponens)

$$((P\&(P \Longrightarrow Q)) \Longrightarrow Q) \equiv 1$$

Pravilo otkidanja (modus ponens)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(P\&(P \Rightarrow Q))$	$(P\&(P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Pravilo otkidanja (modus ponens)

Iz zadnjeg retka tablice čitamo:

Ako je istinita pretpostavka teorema P, i ako je istinita implikacija $P \Longrightarrow Q$, onda je istinita i tvrdnja teorema Q.

Zakon silogizma

$$(((A \Rightarrow B)\&(B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \equiv 1$$

Domaća zadaća: Uvjerite se sami u ovu tautologiju!

Ovaj zakon tumačimo ovako:

Ako su istinite obje implikacije $A \Longrightarrow B$ i $B \Longrightarrow C$, onda je istinita i implikacija $A \Longrightarrow C$.

(tj. ako iz A slijedi B, a iz B slijedi C, onda iz A slijedi C)

Pravilo generalizacije

$$(\forall x)P(x)$$

Ovo pravilo tumačimo ovako:
Neka je $P(x)$ izjavna funkcija. Ako je sud $P(a)$ istinit za po volji odabran (proizvoljan) a koji dolazi u obzir, onda je istinit i sud $(\forall x)P(x)$

Princip isključenja trećeg (tertium non datur)

$$A \vee (\neg A) \equiv 1$$

Dokaz teorema

Začetnik postupka dokazivanja je Tales, a u matematiku ga uvodi Pitagora.
Dokaz teorema $P \Longrightarrow Q$ u nekoj teoriji je konačan niz istinitih tvrdnji $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ te teorije u kojem:

- svaka tvrdnja niza je ili aksiom ili definicija ili je dobivena iz prethodno dokazanih teorema toga niza po nekom pravilu zaključivanja;
- posljednja tvrdnja niza je Q.

Dokazati teorem $P \Longrightarrow Q$ znači pronaći konačan niz tvrdnji $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ teorije i logičkim zaključivanjem prijeći od pretpostavke P, preko tvrdnji $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$, do tvrdnje $Q_n = Q$.

Shematski prikaz dokaza:

$$P \Rightarrow Q_1 \Rightarrow Q_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q_{n-1} \Rightarrow Q_n = Q.$$

Pri tome oznaka $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ znači kraći zapis suda $(A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow C)$.

Dokazati teorem $P \Longrightarrow Q$ znači pronaći konačan niz tvrdnji $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ teorije i logičkim zaključivanjem prijeći od pretpostavke P, preko tvrdnji $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$, do tvrdnje $Q_n = Q$.

Shematski prikaz dokaza:

$$P \Rightarrow Q_1 \Rightarrow Q_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q_{n-1} \Rightarrow Q_n = Q.$$

Dokazana tvrdnja Q nakon toga postaje sastavni dio svakog daljnjeg postupka dokazivanja.

Osnovne vrste dokaza

- direktni dokaz
- indirektni dokaz

Osnovne vrste dokaza

- direktni dokaz

Direktni dokaz teorema $P \Rightarrow Q$ = dokaz teorema $P \Rightarrow Q$ na već opisani način.

Osnovne vrste dokaza

- indirektni dokaz

Indirektni dokaz teorema $P \Rightarrow Q$ = direktni dokaz ekvivalentne tvrdnje teoremu $P \Rightarrow Q$ (koja nije taj teorem).

Najvažniji oblici indirektnog dokaza teorema $P \Rightarrow Q$:

obrat po kontrapoziciji

$$\neg Q \Longrightarrow \neg P$$

(Znamo: $(\neg Q \Rightarrow \neg P) \equiv (P \Rightarrow Q)$))

Najvažniji oblici indirektnog dokaza teorema $P \Rightarrow Q$:

dokaz svođenjem na kontradikciju (reductio ad absurdum)

$$P\&(\neg Q) \Longrightarrow L,$$
$$L = \text{očigledno lažni sud.}$$

Tada je $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P\&(\neg Q)$ lažan sud pa je sud $P \Rightarrow Q$ istinit (princip isključenja trećeg). Zato je Q istinit (modus ponens).