

Elementarna matematika 1

Oblici matematičkog mišljenja

2007/2008

Mišljenje (psihološka definicija) =
izdvajanje u čovjekovoj spoznaji
određenih strana i svojstava
promatranog objekta i njihovo
dovođenje u odgovarajuće veze s
drugim objektima u cilju stjecanja novih
znanja.

Osnovni oblici mišljenja:

- poimanje
- suđenje
- zaključivanje

Rezultat tih oblika mišljenja:

- pojmovi
- jednostavni sudovi
- složeni sudovi

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{matematički pojam} \\ \text{aksiom} \\ \text{teorem} \end{array} \right.$$

Aksiomatska izgradnja neke matematičke teorije

četiri etape izgradnje matematičke teorije:

- navođenje osnovnih pojmova
- formuliranje aksioma
- definiranje novih pojmova
- formuliranje i dokazivanje teorema

Drugim riječima:

Matematičke teorije su tvorevine osnovnih pojmova, aksioma, izvedenih pojmova i teorema.

Matematički pojam

(Matematički) pojam = oblik mišljenja u kojemu se odražavaju bitna svojstva objekata koji se proučavaju.

Vrste pojmova (neke matematičke teorije):

- osnovni pojam
- izvedeni pojam

Osnovni pojam = (u pravilu jednostavni) pojam koji se smatra poznatim pa se ne definira, tj. ne opisuje uz pomoć drugih pojmova.

Primjeri:

- točka
- pravac
- ravnina
- prostor
- skup

Izvedeni pojam = pojam koji se definira, tj. čije se značenje opisuje pomoću osnovnih pojmova ili ranije definiranih izvedenih pojmova.

Definicija pojma = navođenje **nužnih** i **dovoljnih obilježja** pojma povezanih logičnom rečenicom ili simboličkim zapisom.

Svako obilježje pojma koje ulazi u definiciju mora biti nužno, a sva obilježja zajedno dovoljna za jasno i precizno opisivanje pojma.

Primjeri definicija pojmova

► Kvadrat

- Pravokutnik kojemu susjedne stranice imaju jednake duljine naziva se kvadrat.
- Kažemo da je pravokutnik kvadrat ako su mu dijagonale međusobno okomite.
- Kvadrat je romb kojemu je kut između susjednih stranica pravi.

Primjeri definicija pojmova

▶ Romb

- Paralelogram kojemu susjedne stranice imaju jednake duljine **naziva se** romb.
- Romb je paralelogram kojemu su dijagonale međusobno okomite.

Primjeri definicija pojmova

► Kvadratna jednadžba

Jednadžba oblika $ax^2 + bx + c = 0$, gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ zove se kvadratna jednadžba.

Uočimo ključne riječi u definiciji:

- kažemo da je
- naziva se
- zove se

Uočimo:

Neki pojam često možemo definirati na više načina.

Sve definicije istog pojma moraju biti međusobno ekvivalentne, tj. moraju određivati isti skup objekata.

Odaberemo li jednu od definicija pojma kao „radnu“, onda njoj ekvivalentne definicije poprimaju značenje teorema koji su njene posljedice.

⇒ **KARAKTERIZACIJE POJMA**

Još neki načini definiranja pojmov

Konvencionalna definicija = konvencija, dogovor.

Primjeri:

- Skup bez ijednog elementa **zove se** prazan skup.
- $0 \neq 1$
- $a^0 = 1$

Induktivna definicija = (intuitivno)
izgradnja pojma korak po korak.

Primjer:

Niz kojemu je svaki član, počevši od drugog, jednak zbroju prethodnog člana i konstante **naziva se** aritmetički niz. Niz kojemu je svaki član, počevši od drugog, jednak zbroju prethodnog člana i konstante naziva se aritmetički niz.

$$a_n = a_{n-1} + d, \forall n \geq 2$$

Genetička definicija = (intuitivno) opis nastajanja pojma.

Primjer:

Tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice **naziva se** valjak.

Definicija mora biti:

- primjerena definiranom pojmu — niti preuska, niti preširoka — mora razotkrivati bit pojma
- pregledna i sažeta.

Definicija ne smije biti:

- izrečena slikovitim ili na neki drugi način dvosmislenim jezikom
- cirkularna
- negativna ako može biti pozitivna.

Mora postojati bar jedan objekt kojeg definicija opisuje.

Primjeri pogreški

► Za dva pravca kažemo da su paralelni ako se podudaraju ili se ne sijeku.

Pogreška:

Preširoka definicija — obuhvaća i mimoilazne pravce (oni nisu paralelni)
Izostavljeno je nužno obilježje *leže u ravnini*.

Primjeri pogreški

► Za dva pravca kažemo da su paralelni ako se podudaraju ili se ne sijeku.

Ispravna definicija:

Za dva pravca u ravnini kažemo da su paralelni ako se podudaraju ili se ne sijeku.

Primjeri pogreški

► Paralelogram je četverokut koji ima dva para međusobno paralelnih stranica jednakih duljina.

Obilježja:

A = Nasuprotne stranice su paralelne.

B = Nasuprotne stranice su jednakih duljina.

Očito: $A \iff B$

Pogreška:

U definiciji se nalaze dva ekvivalentna dovoljna obilježja!

Ispravne definicije:

- Paralelogram je četverokut koji ima dva para paralelnih stranica.
- **Kažemo da je** četverokut paralelogram ako ima dva para nasuprotnih stranica jednakih duljina.

Primjeri pogreški

► Pravci koji zatvaraju pravi kut nazivaju se okomiti pravci. Kut čiji su krakovi međusobno okomiti naziva se pravi kut.

Pogreška:

Cirkularna definicija!

Ispravna definicija:

Pravi kut je kut koji je jednak svome suplementu.

Primjeri pogreški

► Kružnica je skup svih točaka jednako udaljenih od središta kružnice.

Pogreška:

- cirkularna definicija (kružnica je definirana pomoću pojma *središte kružnice*)
- nedostaje nužno obilježje *skup svih točaka ravnine*

Primjeri pogreški

► Kružnica je skup svih točaka jednako udaljenih od središta kružnice.

Ispravna definicija:

Kružnica je skup svih točaka ravnine jednako udaljenih od jedne čvrste točke te ravnine. Tu čvrstu točku nazivamo središte kružnice.

Primjeri pogreški

► Iracionalan broj je realan broj koji nije racionalan.

Pogreška:

Negativna definicija — ne kaže ništa o sadržaju pojma već samo ono što on nije.

Primjeri pogreški

► Iracionalan broj je realan broj koji nije racionalan.

Ispravna definicija:

Realan broj koji se zapisuje u obliku beskonačnog neperiodičnog decimalnog broja zove se iracionalan broj.

Primjeri pogreški

► Trokut koji ima dva prava kuta zove se dvopravokutni trokut.

Pogreška:

U euklidskoj geometriji takav trokut ne postoji! (postoji u sfernoj geometriji).

Matematički sudovi

Najvažnije vrste matematičkih sudova:

- aksiomi
- teoremi

Aksiom

Aksiom = osnovna tvrdnja o danim osnovnim pojmovima koja se smatra istinitom i koja se ne dokazuje.

Aksiom se bez dokaza prihvaća kao istinita tvrdnja.

Postulat = (u Euklidovoj aksiomatskoj izgradnji geometrije) osnovna tvrdnja geometrijskog sadržaja, koja se smatra istinitom i ne dokazuje se.

Obično se želi da izabrani aksiomi zadovoljavaju sljedeća tri principa:

- **konzistentnost (neproturječnost)** — iz sustava aksioma ne smije se moći dokazati istovremeno i neka tvrdnja i njena negacija;
- **potpunost** — svaka tvrdnja teorije, ili njena negacija, dokaziva je u danom sustavu aksioma;
- **nezavisnost** — niti jedan aksiom sustava ne može se dobiti kao posljedica ostalih aksioma tog sustava.

Primjeri aksioma

- ▶ Cjelina je veća od dijela.
- ▶ **(Aksiom o paralelama)** Zadanom točkom T izvan danog pravca p prolazi najviše jedan pravac q paralelan s p .
- ▶ **(Paschov aksiom)** Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi niti jednim vrhom na toj stranici, onda on siječe još bar jednu stranicu tog trokuta.

Primjeri aksioma

- (Arhimedov aksiom) Za svaka dva pozitivna realna broja a i b postoji prirodni broj n takav da je $na > b$.
- Aksiomi skupa \mathbb{R} (Matematička analiza 1)
- Aksiomi vektorskog prostora (Linearna algebra 1)

POMOĆU LOGIKE DOKAZUJEMO, ALI POMOĆU INTUICIJE OTKRIVAMO

Henri Poincaré