Elementarna matematika 1

Predikati i kvantifikatori

2007/2008

- Primjer:
  Rečenica Prirodni broj x djeljiv je s prirodnim brojem y nije sud!
- Ova rečenica postaje sud uvrstimo li umjesto x i y konkretne brojeve.
- Za $x = 12$ i $y = 3$ ta je rečenica istiniti, a za $x = 13$ i $y = 5$ lažni sud.

- Primjer:
  Rečenica Prirodni broj x djeljiv je s prirodnim brojem y nije sud!
- Ova rečenica postaje sud uvrstimo li umjesto x i y konkretne brojeve.
- Za $x = 12$ i $y = 3$ ta je rečenica istiniti, a za $x = 13$ i $y = 5$ lažni sud.

- Primjer:
  Rečenica Prirodni broj x djeljiv je s prirodnim brojem y nije sud!
- Ova rečenica postaje sud uvrstimo li umjesto x i y konkretne brojeve.
- Za $x = 12$ i $y = 3$ ta je rečenica istiniti, a za $x = 13$ i $y = 5$ lažni sud.

Rečenicom

Prirodni broj x djeljiv je s prirodnim brojem y

ispituje se odnos između varijabli x i y. Uvrštavanjem konkretnih vrijednosti varijabli ona postaje sud, istinit ili lažni ovisno što su x i y.

Rečenice koje uvrštavanjem konkretnih vrijednosti varijabli postaju sudovi zovemo sudovna funkcija (izjavna funkcija), varijable koje se u njima pojavljuju zovemo predmetne varijable, a odnose između predikatnih varijabli koje izriču zovemo predikati.

- Označimo li u prethodnom primjeru predikat ...je djeljiv s ... slovom P, navedenu sudovnu funkciju možemo zapisati kao $P(x, y)$.
- Budući da ovisi o dvije varijable, takav P zovemo dvomjesni predikat.
- Predikat koji izražava odnos n varijabli zovemo n–mjesni predikat.
- U prethodnom primjeru $P(12, 3)$ je istiniti, a $P(13, 5)$ lažni sud.

- Označimo li u prethodnom primjeru predikat ...je djeljiv s ... slovom P, navedenu sudovnu funkciju možemo zapisati kao $P(x, y)$.
- Budući da ovisi o dvije varijable, takav P zovemo dvomjesni predikat.
- Predikat koji izražava odnos n varijabli zovemo n–mjesni predikat.
- U prethodnom primjeru $P(12, 3)$ je istiniti, a $P(13, 5)$ lažni sud.

- Označimo li u prethodnom primjeru predikat ...je djeljiv s ... slovom P, navedenu sudovnu funkciju možemo zapisati kao $P(x, y)$.
- Budući da ovisi o dvije varijable, takav P zovemo dvomjesni predikat.
- Predikat koji izražava odnos n varijabli zovemo n–mjesni predikat.
- U prethodnom primjeru $P(12, 3)$ je istiniti, a $P(13, 5)$ lažni sud.

- Označimo li u prethodnom primjeru predikat ...je djeljiv s ... slovom P, navedenu sudovnu funkciju možemo zapisati kao $P(x, y)$.
- Budući da ovisi o dvije varijable, takav P zovemo dvomjesni predikat.
- Predikat koji izražava odnos n varijabli zovemo n–mjesni predikat.
- U prethodnom primjeru $P(12, 3)$ je istiniti, a $P(13, 5)$ lažni sud.

Posebno su zanimljivi jednomjesni predikati. Njima se iskazuje neko svojstvo promatranih objekata (varijabli).

Primjer:

Predikat $P =$„...je prost” utvrđuje određeno svojstvo prirodnih brojeva. Sudovnu funkciju „x je prost” možemo zapisati kao $P(x)$.

Posebno su zanimljivi jednomjesni predikati. Njima se iskazuje neko svojstvo promatranih objekata (varijabli).

Primjer:

Predikat $P =$„... je pravokutnik” možemo definirati na skupu svih paralelograma neke ravnine.

Postoje dva načina kako sudovna funkcija prelazi u sud — primjenom neodređenih zamjenica svaki i neki, tzv. kvantifikatora.

Univerzalni kvantikifator, u oznaci $\forall$, govori da je izjavna funkcija istinit sud za sve vrijednosti neke od varijabli čitamo ga „za svaki”.
Na primjer, $(\forall x \in S)\ P(x)$ kratko označava formulu

$$\forall x\,((x \in S) \Longrightarrow P(x))$$

Primjeri

- $P(x) = x^2 \geq 0$.
  Sud $(\forall x \in \mathbb{N}) x^2 \geq 0$ je istinit sud.
- $P(x) = x^2 + 4x - 8 \leq 0$.
  Sud $(\forall x \in \mathbb{N}) x^2 + 4x - 8 \leq 0$ je lažni sud.
- $P(x) = x$ je trapez definiramo na skupu svih četverokuta neke ravnine.
  Sud $(\forall x) P(x)$ je lažni.

Primjeri

- $P(x) = x^2 \geq 0$.
  Sud $(\forall x \in \mathbb{N}) x^2 \geq 0$ je istinit sud.
- $P(x) = x^2 + 4x - 8 \leq 0$.
  Sud $(\forall x \in \mathbb{N}) x^2 + 4x - 8 \leq 0$ je lažni sud.
- $P(x) = x$ je trapez definiramo na skupu svih četverokuta neke ravnine.
  Sud $(\forall x) P(x)$ je lažni.

Primjeri

- $P(x) = x^2 \geq 0$.
  Sud $(\forall x \in \mathbb{N})x^2 \geq 0$ je istinit sud.
- $P(x) = x^2 + 4x - 8 \leq 0$.
  Sud $(\forall x \in \mathbb{N})x^2 + 4x - 8 \leq 0$ je lažni sud.
- $P(x) =$ x je trapez definiramo na skupu svih četverokuta neke ravnine.
  Sud $(\forall x)P(x)$ je lažni.

Egzistencijalni kvantifikator, u oznaci $\exists$, kaže da je sudovna funkcija istinit sud za neke vrijednosti varijabli.
čitamo: „postoji (neki)”.
Na primjer, $(\exists x \in S)P(x)$ je skraćeni zapis za

$$\exists x\,((x \in S) \& P(x))\,.$$

Primjeri

- $(\exists x \in \mathbb{R})\ x + 7 = 35$ je istinit sud.
- $(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 + 4x + 8 < 0$ je lažni sud.
- $(\exists x \in \mathbb{Q})\ x^2 = 2$ je lažni sud.
- $(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 = 2$ je istinit sud.

Primjeri

- $(\exists x \in \mathbb{R})\ x + 7 = 35$ je istinit sud.
- $(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 + 4x + 8 < 0$ je lažni sud.
- $(\exists x \in \mathbb{Q})\ x^2 = 2$ je lažni sud.
- $(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 = 2$ je istinit sud.

Primjeri

- $(\exists x \in \mathbb{R})\, x + 7 = 35$ je istinit sud.
- $(\exists x \in \mathbb{R})\, x^2 + 4x + 8 < 0$ je lažni sud.
- $(\exists x \in \mathbb{Q})\, x^2 = 2$ je lažni sud.
- $(\exists x \in \mathbb{R})\, x^2 = 2$ je istinit sud.

Primjeri

- $(\exists x \in \mathbb{R})\, x + 7 = 35$ je istinit sud.
- $(\exists x \in \mathbb{R})\, x^2 + 4x + 8 < 0$ je lažni sud.
- $(\exists x \in \mathbb{Q})\, x^2 = 2$ je lažni sud.
- $(\exists x \in \mathbb{R})\, x^2 = 2$ je istinit sud.

Ukoliko je vrijednost varijable za koju je sudovna funkcija istinita jedinstvena, to označavamo s $!\exists$.
čitamo: „postoji jedinstveni”.
$!\exists$ nije novi kvantifikator, već je $(!\exists x)P(x)$ oznaka za formulu

$$\exists x\,(P(x)\&\forall y(P(y)\Longrightarrow y=x))\,.$$

Primjeri

- $(\exists! x \in \mathbb{N})\ x^2 = 4$ je istinit sud.
- $(\exists! x \in \mathbb{R})\ x^2 - 5x + 6 = 0$ je lažni sud.

Primjeri

- $(!\exists x \in \mathbb{N})\, x^2 = 4$ je istinit sud.
- $(!\exists x \in \mathbb{R})\, x^2 - 5x + 6 = 0$ je lažni sud.

Predikate možemo povezati u sudove i kombiniranjem kvantifikatora. Na primjer,

$$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$$

čitamo
„za svako x postoji y takav da je $P(x,y)$".

Negacija sudova s kvantifikatorima

$$\neg\left((\forall x)P(x)\right) \equiv (\exists x)\neg P(x)$$
$$\neg\left((\exists x)P(x)\right) \equiv (\forall x)\neg P(x)$$

Primjeri

- A= „Svaka kuća je bijela”.
- $\neg A$= „Postoji kuća koja nije bijela”.

Primjeri

- A= „Svaka kuća je bijela".
- $\neg A$= „Postoji kuća koja nije bijela".

Primjeri

- A= „$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 > x + 2$".
- $\neg A$= „$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 \leq x + 2$".
- A= „$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x^2 + y^2 \geq 0$".
- $\neg A$= „$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x^2 + y^2 < 0$".

Primjeri

- A= „$(\forall x \in \mathbb{R})\, x^2 > x + 2$”.
- $\neg A$= „$(\exists x \in \mathbb{R})\, x^2 \leq x + 2$”.
- A= „$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\, x^2 + y^2 \geq 0$”.
- $\neg A$= „$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, x^2 + y^2 < 0$”.

Primjeri

- A= „$(\forall x \in \mathbb{R})\, x^2 > x + 2$”.
- $\neg A$= „$(\exists x \in \mathbb{R})\, x^2 \leq x + 2$”.
- A= „$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\, x^2 + y^2 \geq 0$”.
- $\neg A$= „$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, x^2 + y^2 < 0$”.

Primjeri

- A= „$(\forall x \in \mathbb{R})\, x^2 > x + 2$".
- $\neg A$= „$(\exists x \in \mathbb{R})\, x^2 \leq x + 2$".
- A= „$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\, x^2 + y^2 \geq 0$".
- $\neg A$= „$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, x^2 + y^2 < 0$".

Primjeri

- A= „$(\exists x \in \mathbb{Q})\ x^2 = 8$”.
- $\neg A$= „$(\forall x \in \mathbb{Q})\ x^2 \neq 8$”.
- A= „$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ xy < 0$”.
- $\neg A$= „$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ xy \geq 0$”.

Primjeri

- A= „$(\exists x \in \mathbb{Q})\, x^2 = 8$".
- $\neg A$= „$(\forall x \in \mathbb{Q})\, x^2 \neq 8$".
- A= „$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, xy < 0$".
- $\neg A$= „$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\, xy \geq 0$".

Primjeri

- A= „$(\exists x \in \mathbb{Q})\, x^2 = 8$”.
- $\neg A$= „$(\forall x \in \mathbb{Q})\, x^2 \neq 8$”.
- A= „$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, xy < 0$”.
- $\neg A$= „$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\, xy \geq 0$”.

Primjeri

- A= „$(\exists x \in \mathbb{Q})\ x^2 = 8$".
- $\neg A$= „$(\forall x \in \mathbb{Q})\ x^2 \neq 8$".
- A= „$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ xy < 0$".
- $\neg A$= „$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ xy \geq 0$".

Primjeri

Neki složeni primjeri negacije kvantifikatora:

$$(\forall x)(\forall y)\,(P(x,y) \Longrightarrow Q(x,y))$$

Primjeri

Neki složeni primjeri negacije kvantifikatora:

$$(\forall x)(\forall y)\,(P(x,y) \Longrightarrow Q(x,y))$$

Negacija:

$$(\exists x)(\exists y)\,(P(x,y)\&(\neg Q(x,y)))$$

Primjeri

Neki složeni primjeri negacije kvantifikatora:

$$(\forall x)(\exists y)\,(P(x,y) \Longrightarrow Q(x,y))$$

Primjeri

Neki složeni primjeri negacije kvantifikatora:

$$(\forall x)(\exists y)\,(P(x,y) \Longrightarrow Q(x,y))$$

Negacija:

$$(\exists x)(\forall y)\,(P(x,y)\&(\neg Q(x,y)))$$

Primjeri

Još par primjera negacije kvantifikatora „iz života”: Definicija injekcije:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)\,(x \neq y \implies f(x) \neq f(y))$$

Primjeri

Još par primjera negacije kvantifikatora „iz života”: Definicija injekcije:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)\,(x \neq y \implies f(x) \neq f(y))$$

Obrat po kontrapoziciji za injekciju:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)\,(f(x) = f(y) \implies x = y)$$

Primjeri

Još par primjera negacije kvantifikatora „iz života”: Definicija injekcije:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)\,(x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y))$$

Negacija — funkcija nije injekcija:

$$(\exists x \in A)(\exists y \in A)\,(x \neq y \,\&\, f(x) = f(y))$$

Primjeri

Definicija konvergentnog niza:

$$(\exists L \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \\ (n \geq n_0 \implies |a_n - L| < \varepsilon)$$

Primjeri

Definicija konvergentnog niza:

$$(\exists L \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$(n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

Negacija — definicija divergentnog niza:

$$(\forall L \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})$$
$$(n \geq n_0 \,\&\, |a_n - L| \geq \varepsilon)$$