Elementarna matematika 1

Osnove logike sudova

2007/2008

Sudovi

Sud (intuitivno) = svaka smislena izjavna rečenica koja je istinita ili lažna, ali nije istovremeno i istinita i lažna.

Primjeri sudova

- Dva plus dva je jednako četiri.
  Istiniti sud.
- Dva plus tri je jednako osam.
  Lažni sud.
- Koliko je sati?
  Nije sud.
- $x + 2 = 8$
  Nije sud.

Primjeri sudova

- Dva plus dva je jednako četiri.
  Istiniti sud.
- Dva plus tri je jednako osam.
  Lažni sud.
- Koliko je sati?
  Nije sud.
- $x + 2 = 8$
  Nije sud.

Primjeri sudova

- Dva plus dva je jednako četiri.
  Istiniti sud.
- Dva plus tri je jednako osam.
  Lažni sud.
- Koliko je sati?
  Nije sud.
- $x + 2 = 8$
  Nije sud.

Primjeri sudova

- Dva plus dva je jednako četiri.
  Istiniti sud.
- Dva plus tri je jednako osam.
  Lažni sud.
- Koliko je sati?
  Nije sud.
- $x + 2 = 8$
  Nije sud.

Primjeri sudova

- Broj 0.0001 je mali broj.
  Nije sud.
- Ja sada lažem.
  Nije sud.

Primjeri sudova

- Broj 0.0001 je mali broj.
  Nije sud.
- Ja sada lažem.
  Nije sud.

Postoje izjavne rečenice koje nisu sudovi.

Složeni sudovi

Jednostavne sudove možemo povezivati u složene sudove korištenjem logičkih veznika.

$\&$	konjukcija (i)
$\vee$	disjunkcija (ili)
$\neg$	negacija (ne)
$\Rightarrow$	implikacija (ako ... onda)
$\Leftrightarrow$	ekvivalencija (ako i samo ako)

Konjukcija

Konjunkcija sudova A i B, u oznaci $A \& B$, složeni je sud koji je istinit točno onda kada su oba suda A i B istinita.

Čitamo: A i B

Primjeri konjukcije

A = Hrvatska graniči sa Slovenijom.
B = Slovenija graniči s Austrijom.
$A \& B$ = Hrvatska graniči sa Slovenijom i Slovenija graniči s Austrijom.
Sud $A \& B$ je istinit jer su i A i B istiniti sudovi.

Primjeri konjukcije

A = Rajčica je voće.

B = Mrkva je povrće.

$A \& B$ = Rajčica je voće i mrkva je povrće.

Sud $A \& B$ je lažan jer je sud A lažan (iako je sud B istinit).

Disjunkcija

Disjunkcija sudova A i B, u oznaci $A \vee B$, složeni je sud koji je lažan točno onda kada su oba suda A i B lažna.

Čitamo: A ili B

$A \vee B$ je istinito u sljedećim slučajevima:

- oba suda A i B su istinita
- jedan od sudova A i B je istinit a drugi lažan.

Primjeri disjunkcije

A = Sada je listopad.

B = $7 = 3 + 4$.

$A \vee B$ = Sada je listopad ili $7 = 3 + 4$.

Sud $A \vee B$ je istinit.

Primjeri disjunkcije

A = Danas je nedjelja.

B = Danas nije subota.

$A \vee B$ = Danas je nedjelja ili danas nije subota.

Sud $A \vee B$ je istinit.

Negacija

Negacija suda A, u oznaci $\neg A$, je sud koji je istinit točno onda kada je sud A lažan.

Čitamo:

nije A

non A

ne A

Primjeri negacije

- $A = 3 < 4$
  $\neg A = 3 \geq 4$
- A = Kuća ima krov.
  $\neg A$ = Kuća nema krov.
- A = Svaka kuća ima krov.
  $\neg A$ = Postoji kuća koja nema krov.
- A = Postoji stolica s dvije noge.
  $\neg A$ = Ne postoji stolica s dvije noge.
  $\neg A$ = Broj nogu svake stolice je različit od dva.

Primjeri negacije

- $A = 3 < 4$
  $\neg A = 3 \geq 4$
- $A =$ Kuća ima krov.
  $\neg A =$ Kuća nema krov.
- $A =$ Svaka kuća ima krov.
  $\neg A =$ Postoji kuća koja nema krov.
- $A =$ Postoji stolica s dvije noge.
  $\neg A =$ Ne postoji stolica s dvije noge.
  $\neg A =$ Broj nogu svake stolice je različit od dva.

Primjeri negacije

- $A = 3 < 4$
  $\neg A = 3 \geq 4$
- A = Kuća ima krov.
  $\neg A$ = Kuća nema krov.
- A = Svaka kuća ima krov.
  $\neg A$ = Postoji kuća koja nema krov.
- A = Postoji stolica s dvije noge.
  $\neg A$ = Ne postoji stolica s dvije noge.

  $\neg A$ = Broj nogu svake stolice je različit od dva.

Primjeri negacije

- A $= 3 < 4$

  $\neg A = 3 \geq 4$
- A = Kuća ima krov.

  $\neg A$ = Kuća nema krov.
- A = Svaka kuća ima krov.

  $\neg A$ = Postoji kuća koja nema krov.
- A = Postoji stolica s dvije noge.

  $\neg A$ = Ne postoji stolica s dvije noge.

  $\neg A$ = Broj nogu svake stolice je različit od dva.

Implikacija

Implikacija dvaju sudova A i B, u oznaci $A \Rightarrow B$, složeni je sud koji je lažan točno onda kada je sud A istinit i sud B lažan.

Čitamo:

A povlači B (A implicira B)

ako A, onda B

iz A slijedi B

B je nužan uvjet za A

A je dovoljan uvjet za B

Primjeri implikacije

A = Sada imamo predavanja iz Elementarne matematike.
B = Svake nedjelje pada kiša.
$A \Rightarrow B$ = Ako sada imamo predavanja iz Elementarne matematike, onda svake nedjelje pada kiša.
Sud $A \Rightarrow B$ je lažan (A je istinit a B lažan).

Primjeri implikacije

A = Jučer je bio petak.

B = $2 + 17 = 38$

$A \Rightarrow B$ = Ako je jučer bio petak, onda je $2 + 17 = 38$.

Sud $A \Rightarrow B$ je istinit.

Ekvivalencija

Ekvivalencija sudova A i B, u oznaci $A \Leftrightarrow B$, složeni je sud koji je istinit točno onda kada su oba suda A i B istinita, ili kada su oba suda A i B lažna.

Čitamo:

A je ekvivalentno s B

A je ako i samo ako je B

A je onda i samo onda ako je B

A je nužan i dovoljan uvjet za B

Primjeri ekvivalencije

A = 5 > 0

B = Sada je listopad.

$A \Leftrightarrow B$ = 5 > 0 ako i samo ako je sada listopad.

Sud $A \Leftrightarrow B$ je istinit (oba suda A i B su istinita).

Primjeri ekvivalencije

A = $7 < 4$

B = Sada je ponoć.

$A \Leftrightarrow B$ = $7 < 4$ ako i samo ako je sada ponoć.

Sud $A \Leftrightarrow B$ je istinit (oba suda A i B su lažna).

Primjeri ekvivalencije

A = $1 + 2 = 3$

B = Danas je 31.12.

$A \Leftrightarrow B$ = $1 + 2 = 3$ ako i samo ako je danas 31.12.

Sud $A \Leftrightarrow B$ je lažan (A je istinit a B je lažan).

Tablica istinitosti

Interpretacija suda:

$$\text{Istiniti sud} \rightsquigarrow 1$$
$$\text{Lažni sud} \rightsquigarrow 0$$

Istinitost složenog suda sastavljenog od sudova A,B,... možemo u ovisnosti o istinitosti sudova A,B,... prikazati tablicom istinitosti ili semantičkom tablicom.

Tablica istinitosti

A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

A	$\neg A$
0	1
1	0

Jednakost sudova

Kažemo da su dva (složena) suda A i B semantički jednaki (ili, kratko, jednaki) ako im se pripadne semantičke tablice podudaraju.

Pišemo: $A \equiv B$

Princip dvojne negacije

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
0	1	0
1	0	1

$$\neg(\neg A) \equiv A$$

De Morganov princip

A	B	$A\&B$	$\neg(A\&B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

$$\neg(A\&B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$$

Domaća zadaća

Uvjerite se da vrijedi:

$$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A)\&(\neg B)$$

(De Morganov princip)

Primjeri

Trebamo negirati sljedeću izjavu:

Podne je i ja sam gladan.

A = Podne je.

B = Ja sam gladan.

C = $A\&B$ = Podne je i ja sam gladan.

$$\neg C = \neg(A\&B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$
$$= \text{Nije podne ili ja nisam gladan.}$$

Primjeri

Trebamo negirati sljedeću izjavu:

Ponoć je ili sam ja pospan.

A = Ponoć je.

B = Ja sam pospan.

C = $A \vee B$ = Ponoć je ili sam ja pospan.

$$\begin{aligned} \neg C &= \neg(A \vee B) = (\neg A)\&(\neg B) \\ &= \text{Nije ponoć i ja nisam pospan.} \end{aligned}$$

Negacija implikacije

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg B$	$A \& (\neg B)$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

$$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \& (\neg B)$$

Primjeri

Trebamo negirati sljedeću izjavu:

Ako pada kiša, onda su ulice mokre.

A = Pada kiša.

B = Ulice su mokre.

C = $A \Rightarrow B$ = Ako pada kiša, onda su ulice mokre.

$$\begin{aligned} \neg C &= \neg(A \Rightarrow B) = A \& (\neg B) \\ &= \text{Pada kiša i ulice nisu mokre.} \end{aligned}$$

Primjeri

Trebamo negirati sljedeću izjavu:

Ako budem učio, onda neću pasti na ispitu.

A = Učit ću.

B = Neću pasti na ispitu.

C = $A \Rightarrow B$ = Ako budem učio, onda neću pasti na ispitu.

$$\neg C = \neg(A \Rightarrow B) = A \& (\neg B)$$
$$= \text{Učit ću i past ću na ispitu.}$$

Domaća zadaća

Uvjerite se da vrijedi:

$$A \Rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$$

Ekvivalencija sudova

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B)\&(B \Rightarrow A)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B)\&(B \Rightarrow A)$$

Domaća zadaća

Uvjerite se da vrijedi: (0 $\rightsquigarrow$ lažni sud, 1 $\rightsquigarrow$ istinit sud)

$$A \& B \equiv B \& A$$

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

$$A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$$

$$A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$$

$$A \vee 0 \equiv A$$

$$A \& 1 \equiv A$$

$$A \& (\neg A) \equiv 0$$

Tautologija

Složeni sud je tautologija ukoliko je istinit bez obzira na istinitost sudova od kojih je sastavljen.

Primjer tautologije

A	$\neg A$	$A \vee (\neg A)$
0	1	1
1	0	1

Princip isključenja trećeg.

Primjer tautologije

A	B	$A\&B$	$(A\&B) \Rightarrow B$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Sudovi vezani uz $A \Rightarrow B$

Uz sud $A \Rightarrow B$ vežemo sudove:

- $B \Rightarrow A$ obrat suda
- $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ obrat po kontrapoziciji
- $(\neg A) \Rightarrow (\neg B)$ suprotni sud

Sudovi vezani uz $A \Rightarrow B$

Uz sud $A \Rightarrow B$ vežemo sudove:

- $B \Rightarrow A$ obrat suda
- $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ obrat po kontrapoziciji
- $(\neg A) \Rightarrow (\neg B)$ suprotni sud

Sudovi vezani uz $A \Rightarrow B$

Uz sud $A \Rightarrow B$ vežemo sudove:

- $B \Rightarrow A$ obrat suda
- $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ obrat po kontrapoziciji
- $(\neg A) \Rightarrow (\neg B)$ suprotni sud

Sudovi vezani uz $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \Rightarrow (\neg B)$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1

Obrat po kontrapoziciji

Zaključujemo:

$$A \Rightarrow B \equiv (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$$

Sud je istinit ako i samo ako je istinit njegov obrat po kontrapoziciji.

Obrat suda

Zaključujemo:

$$A \Rightarrow B \not\equiv B \Rightarrow A$$

$$A \Rightarrow B \not\equiv (\neg A) \Rightarrow (\neg B)$$

Obrat suda

Zaključujemo:

$$B \Rightarrow A \equiv (\neg A) \Rightarrow (\neg B)$$

Obrat suda je istinit ako i samo ako je istinit suprotni sud.

Primjer

Ako pada kiša, onda su ulice mokre.
(istina)

A = Pada kiša.

B = Ulice su mokre.

Obrat suda ($B \Rightarrow A$):

Ako su ulice mokre, onda pada kiša.
(laž)

Primjer

Ako pada kiša, onda su ulice mokre. (istina)

A = Pada kiša.

B = Ulice su mokre.

Obrat po kontrapoziciji $((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$:
Ako ulice nisu mokre, onda ne pada kiša. (istina)

Primjer

Ako pada kiša, onda su ulice mokre. (istina)

A = Pada kiša.

B = Ulice su mokre.

Suprotni sud $((\neg A) \Rightarrow (\neg B))$:

Ako ne pada kiša, onda ulice nisu mokre. (laž)

Primjer

Ako je $x > 0$ i $y > 0$, onda je $xy > 0$.
(istina)

Obrat suda:

Ako je $xy > 0$, onda je $x > 0$ i $y > 0$.
(laž)

Primjer

Ako je $x > 0$ i $y > 0$, onda je $xy > 0$.
(istina)

Obrat po kontrapoziciji:

Ako je $xy \leq 0$, onda je $x \leq 0$ ili $y \leq 0$.
(istina)

Primjer

Ako je $x > 0$ i $y > 0$, onda je $xy > 0$.
(istina)

Suprotni sud:

Ako je $x \leq 0$ ili $y \leq 0$, onda je $xy \leq 0$.
(laž)