Elementarne funkcije

Polinomi

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, za $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

Domena: $\mathbb{R}$

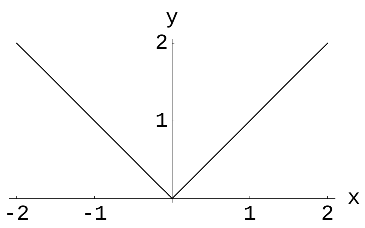
Racionalne funkcije

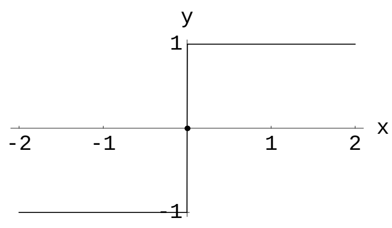
$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, gdje su p i q polinomi.

Domena: $\mathbb{R} \setminus \{x \mid q(x) = 0\}$

Apsolutna vrijednost i signum

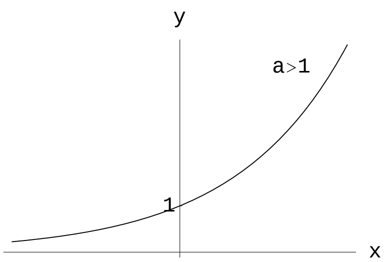
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \qquad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

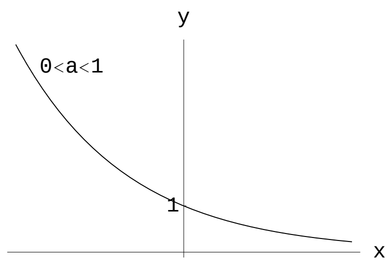




Eksponencijalne funkcije

$f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

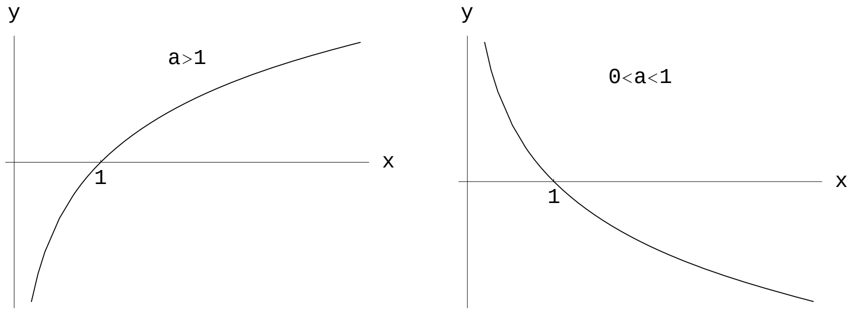




Domena: $\mathbb{R}$, slika: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
Funkcija strogo raste za $a > 1$, a strogo pada za $0 < a < 1$.
Svojstva: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
Važna baza: $e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696 76\ldots$

Logaritamske funkcije

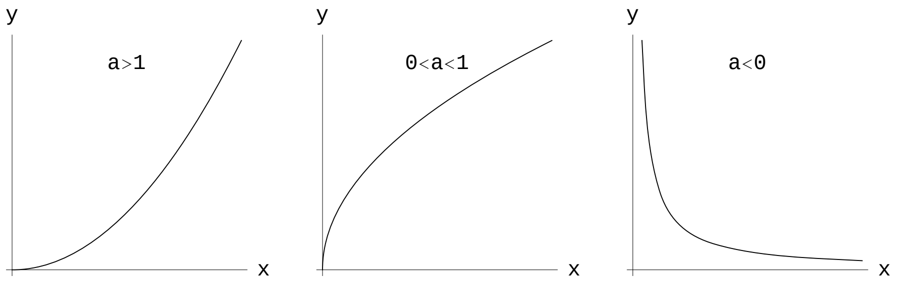
$f(x) = \log_a(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1$
Za $a = 10$ piše se $f(x) = \log x$, a za $a = e$ oznaka je $f(x) = \ln x$.



Domena: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, slika: $\mathbb{R}$.
Funkcija strogo raste za $a > 1$, a strogo pada za $0 < a < 1$.
Logaritamska funkcija je inverzna eksponencijalnoj: $\log_a(a^x) = x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$; $a^{\log_a(x)} = x, \ \forall\, x > 0$
Svojstva: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$, $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Opća potencija i korijeni

$f(x) = x^a, \quad a \in \mathbb{R}$

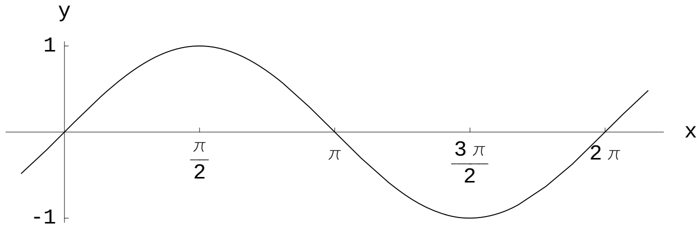


Opću potenciju možemo definirati pomoću eksponencijalne i logaritamske funkcije: $x^a = e^{a \cdot \ln(x)}$. Uz tu definiciju domena je $\mathbb{R}^+$, ali se za neke vrijednosti od a može proširiti na cijeli $\mathbb{R}$ (npr. za $a \in \mathbb{N}$). Funkcija strogo raste za $a > 0$, a strogo pada za $a < 0$. Za $a = 0$ funkcija je konstantna.
Pomoću opće potencije možemo definirati korijene: $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$. Za neparne n funkciju proširujemo na cijeli $\mathbb{R}$ po neparnosti (tj. tako da vrijedi $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$).

Oprez! $\sqrt{x^2} = |x|$

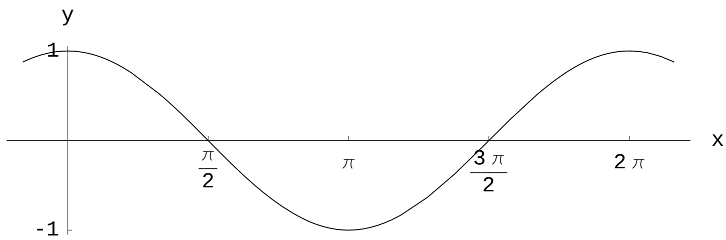
Trigonometrijske funkcije

Sinus: $f(x) = \sin x$



Domena: $\mathbb{R}$; slika: $[-1, 1]$. Funkcija je periodična temeljnog perioda 2π i neparna.

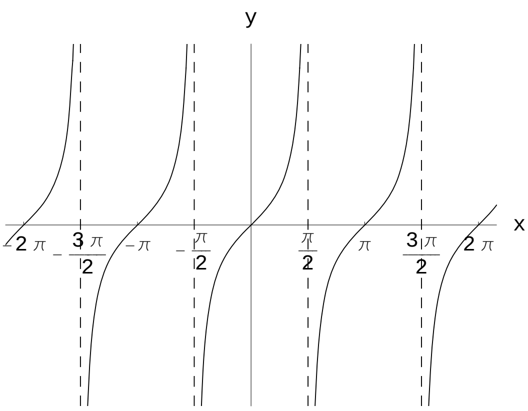
Kosinus: $f(x) = \cos x$

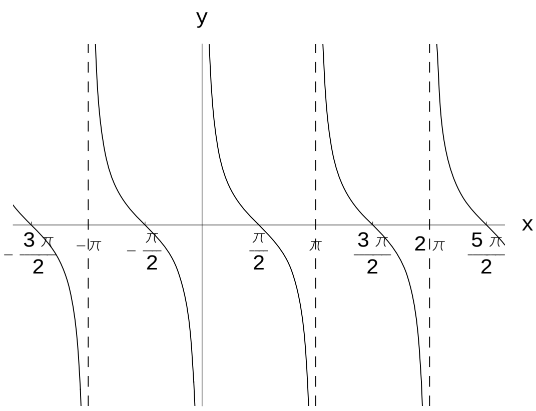


Domena: $\mathbb{R}$; slika: $[-1, 1]$. Funkcija je periodična temeljnog perioda 2π i parna.

Tangens: $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Kotangens: $f(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$





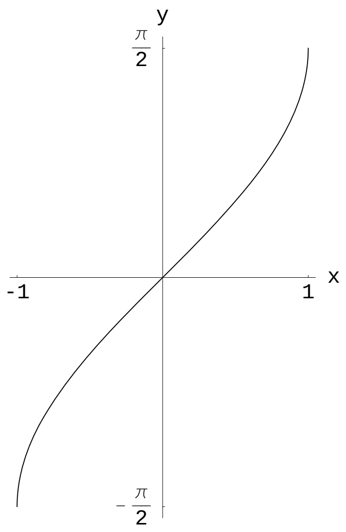
Funkcije su periodične temeljnog perioda π i neparne.
Tangens: domena $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, slika $\mathbb{R}$. Kotangens: domena $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, slika $\mathbb{R}$.

Koriste se i funkcije sekans $\operatorname{sc} x = \frac{1}{\cos x}$ i kosekans $\csc x = \frac{1}{\sin x}$.

Osnovne relacije za trigonometrijske funkcije: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{(1 - \cos x)/2}$, $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{(1 + \cos x)/2}$,
$\sin x + \sin y = 2 \sin(\frac{x+y}{2}) \cos(\frac{x-y}{2})$, $\sin x - \sin y = 2 \cos(\frac{x+y}{2}) \sin(\frac{x-y}{2})$,
$\cos x + \cos y = 2 \cos(\frac{x+y}{2}) \cos(\frac{x-y}{2})$, $\cos x - \cos y = -2 \sin(\frac{x+y}{2}) \sin(\frac{x-y}{2})$,
$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$, $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$,
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$.
U Bronštejnu na str. 231-234 navedene su još mnoge slične formule.

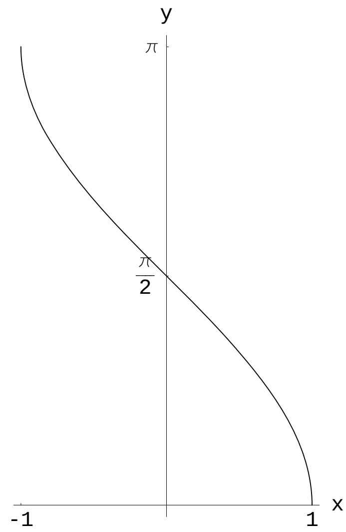
Arkus funkcije

Arkus sinus: $f(x) = \arcsin x$



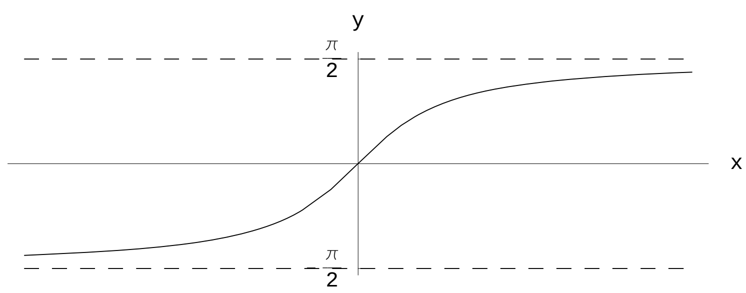
Domena: $[-1, 1]$; slika: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Funkcija je rastuća i neparna.

Arkus kosinus: $f(x) = \arccos x$



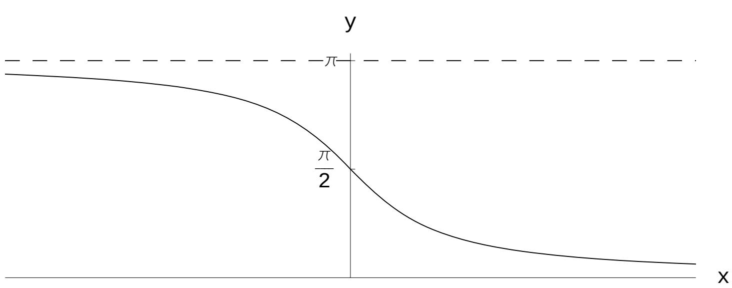
Domena: $[-1, 1]$; slika: $[0, \pi]$.
Funkcija je padajuća.

Arkus tangens: $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$



Domena: $\mathbb{R}$; slika: $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Funkcija je rastuća i neparna.

Arkus kotangens: $f(x) = \operatorname{arc\,ctg} x$



Domena: $\mathbb{R}$; slika: $\langle 0, \pi \rangle$. Funkcija je padajuća.

Arkus funkcije su inverzne trigonometrijskim funkcijama:
$\arcsin(\sin x) = x, \ \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $\arccos(\cos x) = x, \ \forall x \in [0, \pi]$; $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x, \ \forall x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
$\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \ \forall x \in \langle 0, \pi \rangle$; $\sin(\arcsin x) = x, \ \forall x \in [-1, 1]$; $\cos(\arccos x) = x, \ \forall x \in [-1, 1]$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$; $\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$
Adicione i ostale formule za arkus funkcije nalaze se u Bronštejnu na str. 240-242.