

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 17. veljače 2022.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (2+2+5+3 bodova) Na skupu \mathbb{Z} definirana je relacija R na sljedeći način: x je u relaciji s y ako i samo ako je $3x - 5y$ paran broj.

- (a) Zapišite simbolima sud $x R y$.
- (b) Zapišite simbolima sud $x \not R y$.
- (c) Dokažite da je R relacija ekvivalencije.
- (d) Odredite sve klase ekvivalencije relacije R .

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 17. veljače 2022.

Zadatak 2. (4+8 bodova)

- (a) Ispitajte odnos skupova $A \Delta (B \cup C)$ i $(A \Delta B) \cup (A \Delta C)$.
- (b) Dokažite da se svaki prirodan broj veći od 22 može zapisati u obliku $5x + 6y$ za neke $x, y \in \mathbb{N}$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 17. veljače 2022.

Zadatak 3. (4+8 bodova)

- (a) Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ parni brojevi i $n \in \mathbb{N}$ neparan broj. Dokažite: ako je $a \equiv b \pmod{n}$, onda je i $a \equiv b \pmod{2n}$.
- (b) Dokažite da je broj $2^{2^{6k+2}} + 3$ djeljiv s 19 za svaki $k \in \mathbb{N}$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 17. veljače 2022.

Zadatak 4. (12 bodova) Odredite koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$ polinoma

$$p(x) = x^4 - \frac{x^3}{2} + ax^2 + bx + c$$

tako da on bude djeljiv polinomom $q \in \mathbb{R}[x]$ stupnja 3 čije nultočke x_1, x_2, x_3 zadovoljavaju sustav

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} &= \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} &= -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x_1x_2x_3} &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 17. veljače 2022.

Zadatak 5. (22 boda)

- (a) Neka su
- A
- ,
- B
- i
- C
- proizvoljni skupovi. Vrijedi li inkluzija

$$(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)?$$

Ako vrijedi, dokažite ju. Ako ne vrijedi, napišite barem jedan kontraprimjer.

- (b) Definirajte relaciju parcijalnog uređaja. Na skupu svih prirodnih brojeva definirana je relacija $*$ tako da za sve prirodne brojeve a, b vrijedi $a * b$ ako i samo ako b dijeli a . Je li to relacija parcijalnog uređaja? Ako jest, odredite supremum i infimum skupa $\{2, 3, 5, 7\}$ s obzirom na tu relaciju (ako postoje).
- (c) Definirajte skup racionalnih brojeva te operaciju zbrajanja racionalnih brojeva.
- (d) Iskažite Teorem o dijeljenju s ostatkom za cijele brojeve. Definirajte Eulerovu funkciju.
- (e) Zaokružite (T)očno ili (N)etočno:

T N Neka je $f: X \rightarrow Y$ funkcija i A, B podskupovi od X . Tada vrijedi

$$f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$$

T N Svaki polinom iz $\mathbb{R}[x]$ ima nultočku u \mathbb{C} .T N Funkcija $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ zadana s $f(a, b) = 28a + 15b$ za sve $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je surjekcija.T N Skupovi $\mathbb{R}[x]$ i $\mathbb{Q}[x]$ nisu ekvipotentni.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 17. veljače 2022.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (2+2+5+3 bodova) Na skupu \mathbb{Z} definirana je relacija R na sljedeći način: x je u relaciji s y ako i samo ako je $5x - 3y$ paran broj.

- (a) Zapišite simbolima sud $x R y$.
- (b) Zapišite simbolima sud $x \not R y$.
- (c) Dokažite da je R relacija ekvivalencije.
- (d) Odredite sve klase ekvivalencije relacije R .

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 17. veljače 2022.

Zadatak 2. (4+8 bodova)

- (a) Ispitajte odnos skupova $A \Delta (B \cap C)$ i $(A \Delta B) \cap (A \Delta C)$.
- (b) Dokažite da se svaki prirodan broj veći od 33 može zapisati u obliku $6x + 7y$ za neke $x, y \in \mathbb{N}$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 17. veljače 2022.

Zadatak 3. (4+8 bodova)

- (a) Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ parni brojevi i $n \in \mathbb{N}$ neparan broj. Dokažite: ako je $a \equiv b \pmod{n}$, onda je i $a \equiv b \pmod{2n}$.
- (b) Dokažite da je broj $2^{2^{8k+5}} - 4$ djeljiv s 31 za svaki $k \in \mathbb{N}$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 17. veljače 2022.

Zadatak 4. (12 bodova) Odredite koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$ polinoma

$$p(x) = x^4 - \frac{x^3}{2} + ax^2 + bx + c$$

tako da on bude djeljiv polinomom $q \in \mathbb{R}[x]$ stupnja 3 čije nultočke x_1, x_2, x_3 zadovoljavaju sustav

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} &= -\frac{7}{6} \\ \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} &= -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{x_1x_2x_3} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 17. veljače 2022.

Zadatak 5. (22 boda)

- (a) Neka je $f: X \rightarrow Y$ funkcija i A, B podskupovi od X . Vrijedi li inkluzija

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)?$$

Ako vrijedi, dokažite ju. Ako ne vrijedi, napišite barem jedan kontraprimjer.

- (b) Definirajte relaciju ekvivalencije. Dokažite da su svake dvije klase ekvivalencije jednake ili disjunktne. Na skupu svih prirodnih brojeva definirana je relacija $*$ tako da vrijedi $a * b$ ako i samo ako je razlika $a - b$ parna ili djeljiva s 3. Je li to relacija ekvivalencije? Detaljno obrazložite Vaš odgovor.
- (c) Definirajte skup realnih brojeva i standardni uređaj na skupu realnih brojeva.
- (d) Iskažite Teorem o rješivosti linearne jednadžbe s kongruencijom, tj. linearne kongruencije $a \cdot x \equiv b \pmod{n}$. Definirajte najveću zajedničku mjeru dva prirodna broja.
- (e) Zaokružite (T)očno ili (N)etočno:

T N Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Tada vrijedi

$$A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C.$$

T N Za svaki prirodan broj n postoji prirodan broj k i prosti brojevi p_1, \dots, p_k takvi da je $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$.

T N Ne postoji polinom u $\mathbb{R}[x]$ takav da je produkt njegovih nultočaka jednak imaginarnoj jedinici i .

T N Skupovi $\mathbb{Q}[x]$ i $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nisu ekvipotentni.