JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 3. veljače 2022.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (5 bodova) Odredite najveću zajedničku mjeru polinoma

$$f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12$$
$$g(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 8x + 40.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 3. veljače 2022.

Zadatak 2. (2+5 bodova)

(a) Odredite sva rješenja jednadžbe $4x \equiv 1 \mod 19$

(b) Odredite zadnje dvije znamenke broja $3^{37^{2022}}$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 3. veljače 2022.

Zadatak 3. (4+2 boda)

a) Odredite sva rješenja sustava:

$$\begin{aligned} \frac{x}{yz}+\frac{z}{xy}+\frac{y}{xz} &= -3 \\ x^2+y^2+z^2 &= 6 \\ x+y+z &= 2. \end{aligned}$$

b) Napišite oblik rastava na parcijalne razlomke za funkciju

$$\frac{1}{(x^2-6x+9)(x^2+x+1)^3}.$$

Konstante u brojnicima nije potrebno računati.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 3. veljače 2022.

Zadatak 4. (2 + 4 boda)

(a) Odredite sve polinome $q \in \mathbb{R}[x]$ takve da je $q(x) = q(x+2)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

(b) Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju jednadžbu

$$xp(x^2 + x) = x^2 p(x) + x.$$

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 3. veljače 2022.

Zadatak 5.

(a) Dokažite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.

(b) Definirajte injekciju. Postoji li injekcija sa skupa $\{1, 2, 3\}$ u skup $\{4, 5, 6, 7\}$? Vaš odgovor precizno obrazložite.

(c) Precizno iskažite Osnovni teorem algebre. Izračunajte produkt svih nultočaka polinoma $f(x) = x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$.

(d) Precizno iskažite Mali Fermatov teorem te zatim pomoću njega izračunajte ostatak pri dijeljenju broja 30^{10} s 11.

(e) Zaokružite (T)očno ili (N)etočno:

T N Neka su A, B, C, D proizvoljni neprazni skupovi takvi da su A i B ekvipotentni te da su C i D ekvipotentni. Tada su i skupovi $A \cup C$ i $B \cup D$ ekvipotentni.

T N Skup svih transcendentnih brojeva je ekvipotentan $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

T N Eulerova funkcija nije injekcija.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 3. veljače 2022.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (5 bodova) Odredite najveću zajedničku mjeru polinoma

$$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 18$$
$$g(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 12x^2 - 27x - 54.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 3. veljače 2022.

Zadatak 2. (2 + 5 bodova)

(a) Odredite sva rješenja jednadžbe $3x \equiv 1 \mod 11$

(b) Odredite zadnje dvije znamenke broja $97^{3^{2022}}$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 3. veljače 2022.

Zadatak 3. (4+2 boda)

a) Odredite sva rješenja sustava:

$$\begin{aligned} \frac{a}{bc} + \frac{c}{ab} + \frac{b}{ac} &= -6 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= \frac{3}{2} \\ a + b + c &= 1. \end{aligned}$$

b) Napišite oblik rastava na parcijalne razlomke funkcija

$$\frac{1}{(x^2 - 8x + 16)(x^2 + x + 2)^3}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 3. veljače 2022.

Zadatak 4. (2 + 4 boda)

(a) Odredite sve polinome $f \in \mathbb{R}[x]$ takve da je $f(x+3) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

(b) Odredite sve polinome $g \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju jednadžbu

$$2x + x^2 g(x) = x g(x^2 + x).$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 3. veljače 2022.

Zadatak 5.

(a) Neka je n prirodan broj. Dokažite da je relacija "biti kongruentan modulo n" relacija ekvivalencije.

(b) Definirajte surjekciju. Postoji li surjekcija sa skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ u skup $\{4, 5, 6, 7, 8\}$? Vaš odgovor precizno obrazložite.

(c) Precizno iskažite Teorem o jednakosti polinoma. Izračunajte sumu svih nultočaka polinoma $f(x) = x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$.

(d) Precizno iskažite Bézoutov identitet. Odredite minimum skupa

$$\mathbb{N} \cap \left\{ x \cdot 6^{60} + y \cdot 60^6 \ : \ x, y \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(e) Zaokružite (T)očno ili (N)etočno:

T N Neka su A, B neprazni skupovi takvi da postoji surjekcija $f\colon A \to B$. Tada su skupovi A i $f(A)$ ekvipotentni.

T N Skup svih algebarskih brojeva je ekvipotentan $\mathbb{Q}$.

T N Za svaku trojku prirodnih brojeva (a, b, n) postoji najmanji prirodan broj x takav da je $ax \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$.