ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 25. studenog 2021.

Zadatak 1. (3+3 boda)

(a) Odredite formulu F takvu da formula

$$\big((P \Leftrightarrow \neg Q) \wedge R\big) \Rightarrow \big((P \vee Q) \wedge (\neg R \vee F)\big)$$

bude tautologija. Obrazložite svoj odgovor.

(b) Zadana je tvrdnja:

> Za svaka dva elementa skupa $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vrijedi: ako njihov presjek sadrži samo brojeve djeljive s 5, onda njihova unija sadrži neki broj veći od 3.

Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njenu negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji. Odredite istinitost svih dobivenih tvrdnji.

Rješenje.

(a) Implikacija $A \Rightarrow B$ je lažna samo onda kad je sud A istinit, a sud B lažan. Prema tome, moramo osigurati da sud $(P \vee Q) \wedge (\neg R \vee F)$ bude istinit kad god je sud $(P \Leftrightarrow \neg Q) \wedge R$ istinit. Ako je sud $(P \Leftrightarrow \neg Q) \wedge R$ istinit, onda je R istinit, a P i Q imaju različite vrijednosti, tj. točno jedan je istinit, a drugi je lažan. Stoga je sud $P \vee Q$ svakako istinit, pa još treba postići da sud $\neg R \vee F$ bude istinit, a to možemo npr. za $F \equiv R$.

(b)

Zadana tvrdnja:

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\big((\forall n \in A \cap B)(5 \mid n) \Rightarrow (\exists n \in A \cup B)(n > 3)\big)$$

Negacija:

$$(\exists A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\big((\forall n \in A \cap B)(5 \mid n) \wedge (\forall n \in A \cup B)(n \leq 3)\big)$$

Obrat:

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\big((\exists n \in A \cup B)(n > 3) \Rightarrow (\forall n \in A \cap B)(5 \mid n)\big)$$

Obrat po kontrapoziciji:

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\big((\forall n \in A \cup B)(n \leq 3) \Rightarrow (\exists n \in A \cap B)(5 \nmid n)\big)$$

Za skupove $A = B = \emptyset$ trivijalno vrijedi $(\forall n \in A \cap B)(5 \mid n)$ (za svaki element praznog skupa vrijedi bilo što), a ne vrijedi $(\exists n \in A \cup B)(n > 3)$ (ne postoji element praznog skupa). Stoga je zadana tvrdnja lažna. Tada je i obrat po kontrapoziciji lažan, a negacija je istinita. Obrat je također lažan, jer npr. za $A = B = \{4\}$ vrijedi $(\exists n \in A \cup B)(n > 3)$, a ne vrijedi $(\forall n \in A \cap B)(5 \mid n)$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 25. studenog 2021.

Zadatak 2. (2+2+2 boda) Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos između sljedećih skupova:

a) $(A \cap C)\triangle B$ i $(A \cap B)\triangle(B \cap C)$,

b) $\mathcal{P}(A \cap B)$ i $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,

c) $(A \setminus B) \times C$ i $(A \times C) \setminus (B \times C)$.

Rješenje.

a) Vrijedi $(A \cap B)\triangle(B \cap C) \subseteq (A \cap C)\triangle B$, dok obratna inkluzija općenito ne vrijedi.

- Dokazujemo $(A \cap B)\triangle(B \cap C) \subseteq (A \cap C)\triangle B$. Primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned}(A \cap B)\triangle(B \cap C) &= ((A \cap B) \setminus (B \cap C)) \bigcup ((B \cap C) \setminus (A \cap B)) \\ &= ((A \cap B) \cap (B^c \cup C^c)) \bigcup (B \cap C \cap (A^c \cup B^c)) \\ &= ((A \cap \underbrace{B \cap B^c}_{=\emptyset}) \bigcup (A \cap B \cap C^c) \bigcup (B \cap C \cap A^c) \bigcup (\underbrace{B \cap B^c}_{=\emptyset} \cap C) \\ &= (A \cap B \cap C^c) \bigcup (B \cap C \cap A^c).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A \cap C)\triangle B &= ((A \cap C) \setminus B) \bigcup (B \setminus (A \cap C)) \\ &= (A \cap C \cap B^c) \bigcup (B \cap (A^c \cup C^c)) \\ &= (A \cap C \cap B^c) \bigcup (B \cap A^c) \bigcup (B \cap C^c).\end{aligned}$$

  Sada vidimo da ako je $x \in (A \cap B)\triangle(B \cap C)$ proizvoljan, tada je $x \in (A \cap B \cap C^c)$ ili $x \in (B \cap C \cap A^c)$. Ako je $x \in (A \cap B \cap C^c)$, tada je posebno $x \in (B \cap C^c)$ pa je i $x \in (A \cap C)\triangle B$. U drugom slučaju, ako je $x \in (B \cap C \cap A^c)$, tada je $x \in B \cap A^c$ pa je i $x \in (A \cap C)\triangle B$.

- Za obratnu inkluziju, promotrimo skupove $A = \emptyset$, $B = \{1\}$ i $C = \emptyset$. Tada je $(A \cap B)\triangle(B \cap C) = \emptyset$ i $(A \cap C)\triangle B = \{1\}$ pa skupovi općenito nisu jednaki.

b) $C \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \subseteq A$ i $C \subseteq B \Leftrightarrow C \in \mathcal{P}(A)$ i $\mathcal{P}(B) \Leftrightarrow C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

c) $(x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times C$ i $(x, y) \notin B \times C \Leftrightarrow x \in A$ i $y \in C$ i ($x \notin B$ ili $y \notin C$) $\Leftrightarrow$ ($x \in A$ i $y \in C$ i $x \notin B$) ili ($x \in A$ i $y \in C$ i $y \notin C$) $\Leftrightarrow x \in A$ i $y \in C$ i $x \notin B \Leftrightarrow$ ($x \in A$ i $x \notin B$) i $y \in C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \setminus B) \times C$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 25. studenog 2021.

Zadatak 3. (6 bodova) Dokažite da za sve $n \geq 6$ vrijedi:

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Napomena: U koraku indukcije možete upotrijebiti binomni teorem.

Rješenje: Baza: Za $n = 6$ vrijedi $6! = 720 < 729 = 3^6$ pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \geq 6$ i dokažimo za $n + 1$:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \overset{\text{pretp.}}{<} \left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot (n+1)$$

Pa preostaje dokazati:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot (n+1) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

odnosno ekvivalentno:

$$2n^n \leq (n+1)^n$$

Međutim iz binomnog teorema slijedi:

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k \geq n^n + \binom{n}{1} n^{n-1} = 2n^n$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 25. studenog 2021.

Zadatak 4. (2+3+1 bod) Neka je S neprazan skup i neka je T njegov podskup. Na skupu $\mathcal{P}(S)$ zadana je relacija τ sa:

$$A \,\tau\, B \Leftrightarrow A \cap T = B \cap T.$$

(a) Dokažite da je τ relacija ekvivalencije.

(b) Nađite nužne i dovoljne uvjete koje treba zadovoljavati T da bi relacija τ bila antisimetrična. Dokažite svoje tvrdnje.

(c) Za $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $T = \{2, 3, 4\}$ odredite klasu ekvivalencije elementa $\{2, 5\}$.

Rješenje.

(a) Dokazat ćemo da je relacija τ refleksivna, simetrična i tranzitivna. Refleksivna je jer za svaki $A \in \mathcal{P}(S)$ vrijedi $A \cap T = A \cap T$. Simetrična je jer za sve $A, B \in \mathcal{P}(S)$ vrijedi da je $A \cap T = B \cap T \Leftrightarrow B \cap T = A \cap T$. Tranzitivna je jer za sve $A, B, C \in \mathcal{P}(S)$ vrijedi da iz $A \cap T = B \cap T$ i $B \cap T = C \cap T$ slijedi $A \cap T = C \cap T$.

(b) Po definiciji je relacija τ antisimetrična ako za sve $A, B \in \mathcal{P}(S)$ vrijedi da iz $A \,\tau\, B$ i $B \,\tau\, A$ slijedi $A = B$. To vrijedi ako za sve $A, B \in \mathcal{P}(S)$ vrijedi da iz $A \cap T = B \cap T$ slijedi $A = B$. Tvrdimo da T mora biti jednak S da bi to vrijedilo.

Dokazujemo tvrdnju: $T = S$ ako i samo ako je relacija τ antisimetrična.

Pretpostavimo prvo da je $T = S$. Tada za sve $A, B \in \mathcal{P}(S)$ imamo da iz $A \cap T = B \cap T$ slijedi $A \cap S = B \cap S$ to jest $A = B$. Dakle, relacija τ je antisimetrična.

Drugu implikaciju dokazat ćemo tako da dokažemo njen obrat po kontrapoziciji. Pretpostavimo da je $T \neq S$ i tvrdimo da tada relacija τ nije antisimetrična. Zbog $T \neq S$, za $A = T$ i $B = S$ vrijedi da je $A \cap T = T = B \cap T$, ali $A \neq B$, pa relacija τ nije antisimetrična.

(c) Element $A \in \mathcal{P}(S)$ je u relaciji τ s $\{2, 5\}$ ako i samo ako je $A \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 5\} \cap \{2, 3, 4\}$, to jest $A \cap \{2, 3, 4\} = \{2\}$. Takvi su svi skupovi A koji sadrže 2 i ne sadrže 3 ni 4. Klasa ekvivalencije elementa $\{2, 5\}$ je dakle

$$\{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 5\}\}.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 25. studenog 2021.

Zadatak 5.

(a) Precizno iskažite aksiom matematičke indukcije.

Rješenje. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $1 \in S$ te vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \in S \Rightarrow s(n) \in S).$$

Tada je $S = \mathbb{N}$.

(b) Dokažite ili opovrgnite: $(P \wedge Q) \vee S \equiv (P \vee S) \wedge (Q \vee S)$.

Rješenje: Dokazat ćemo da je lijeva strana (L) semantički jednaka desnoj (D):

P	Q	S	$P \wedge Q$	L	$P \vee S$	$Q \vee S$	D
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	0	**1**	1	1	**1**
0	1	0	0	**0**	0	1	**0**
0	1	1	0	**1**	1	1	**1**
1	0	0	0	**0**	1	0	**0**
1	0	1	0	**1**	1	1	**1**
1	1	0	1	**1**	1	1	**1**
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

(c) Zaokružite (T)očno ili (N)etočno:

T N Relacija „dijeli” na skupu $\{-n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z}$ je antisimetrična.
Isto je kao na skupu $\mathbb{N}$ *(jer za* $a, b \in \mathbb{N}$, $a \mid b$ *je ekvivalentno* $-a \mid -b$*).*

T **N** Skup $\{\{\mathcal{P}(\mathbb{N})\}\}$ je particija skupa $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
Elementi particije od $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *moraju biti podskupovi od* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*, a* $\{\mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ *to nije.*

T N Postoji beskonačan totalno uređen skup koji ima i najmanji i najveći element.
Primjera je puno, recimo $[0, 1]$.

(d) Dokažite da je definicija zbrajanja cijelih brojeva (danih kao klase po relaciji ekvivalencije među parovima prirodnih brojeva) dobra, tj. ne ovisi o izboru reprezentanata.

Rješenje: Neka je $(a, b) \sim (a', b')$ i $(c, d) \sim (c', d')$ (za uređene parove iz $\mathbb{N}^2$ i uobičajenu relaciju $\sim$). Tada je $(a' + c') + (b + d) = (a' + b) + (c' + d) = (a + b') + (c + d') = (a + c) + (b' + d')$. Druga jednakost slijedi iz pretpostavke i definicije relacije $\sim$, a ostale iz komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja na $\mathbb{N}$.

(e) Neka je $n \in \mathbb{N}$ te F formula logike sudova s varijablama $A_1, \ldots, A_n$. Koliko ima mogućih tablica istinitosti za F? Dokažite svoju tvrdnju indukcijom.

Rješenje: Nizova nula i jedinica duljine n ima 2^n (dva su takva za $n = 1$, a ako je 2^n nizova duljine n, onda će za jedan duljih biti 2^{n+1}; naime, onih 2^n možemo zdesna dopuniti sa 0 ili 1). Sve moguće tablice istinitosti za F imaju toliko redaka. Stoga mogućih zadnjih stupaca (i time tablica) ima najviše kao i nizova nula i jedinica duljine 2^n, a to je 2^{2^n}. No, svaka od tih tablica jest[1] moguća tablica istinitosti od F (slijedi iz npr. egzistencije KNF za F — gradivo *Programiranja 1*), pa ih ima $\mathbf{2^{2^n}}$.

[1] Na kolokviju nije bilo nužno argumentirati ovu tvrdnju za sve bodove iz podzadatka.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 25. studenog 2021.

Zadatak 1. (3+3 boda)

(a) Odredite formulu F takvu da formula

$$\big(P \land (Q \Leftrightarrow \neg R)\big) \Rightarrow \big((\neg P \lor F) \land (Q \lor R)\big)$$

bude tautologija. Obrazložite svoj odgovor.

(b) Zadana je tvrdnja:

> Za svaka dva elementa skupa $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vrijedi: ako njihov presjek sadrži samo brojeve djeljive sa 7, onda njihova unija sadrži neki broj veći od 4.

Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njenu negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji. Odredite istinitost svih dobivenih tvrdnji.

Rješenje.

(a) Implikacija $A \Rightarrow B$ je lažna samo onda kad je sud A istinit, a sud B lažan. Prema tome, moramo osigurati da sud $(\neg P \lor F) \land (Q \lor R)$ bude istinit kad god je sud $P \land (Q \Leftrightarrow \neg R)) \land R$ istinit. Ako je sud $P \land (Q \Leftrightarrow \neg R)) \land R$ istinit, onda je P istinit, a Q i R imaju različite vrijednosti, tj. točno jedan je istinit, a drugi je lažan. Stoga je sud $Q \lor R$ svakako istinit, pa još treba postići da sud $\neg P \lor F$ bude istinit, a to možemo npr. za $F \equiv P$.

(b)

Zadana tvrdnja:

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\big((\forall n \in A \cap B)(7 \mid n) \Rightarrow (\exists n \in A \cup B)(n > 4)\big)$$

Negacija:

$$(\exists A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\big((\forall n \in A \cap B)(7 \mid n) \land (\forall n \in A \cup B)(n \leq 4)\big)$$

Obrat:

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\big((\exists n \in A \cup B)(n > 4) \Rightarrow (\forall n \in A \cap B)(7 \mid n)\big)$$

Obrat po kontrapoziciji:

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\big((\forall n \in A \cup B)(n \leq 4) \Rightarrow (\exists n \in A \cap B)(7 \nmid n)\big)$$

Za skupove $A = B = \emptyset$ trivijalno vrijedi $(\forall n \in A \cap B)(7 \mid n)$ (za svaki element praznog skupa vrijedi bilo što), a ne vrijedi $(\exists n \in A \cup B)(n > 4)$ (ne postoji element praznog skupa). Stoga je zadana tvrdnja lažna. Tada je i obrat po kontrapoziciji lažan, a negacija je istinita. Obrat je također lažan, jer npr. za $A = B = \{5\}$ vrijedi $(\exists n \in A \cup B)(n > 4)$, a ne vrijedi $(\forall n \in A \cap B)(7 \mid n)$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 25. studenog 2021.

Zadatak 2. (2+2+2 boda) Neka su X, Y i Z proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos između sljedećih skupova:

a) $X\triangle(Y\cap Z)$ i $(X\cap Z)\triangle(Y\cap Z)$,

b) $\mathcal{P}(X\cup Y)$ i $\{X_1\cup Y_1 \mid X_1\in\mathcal{P}(X)\wedge Y_1\in\mathcal{P}(Y)\}$,

c) $X\times(Y\setminus Z)$ i $(X\times Y)\setminus(X\times Z)$.

Rješenje.

a) Vrijedi $(X\cap Z)\triangle(Y\cap Z)\subseteq X\triangle(Y\cap Z)$, dok obratna inkluzija općenito ne vrijedi.

- Dokazujemo $(X\cap Z)\triangle(Y\cap Z)\subseteq X\triangle(Y\cap Z)$. Primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned}(X\cap Z)\triangle(Y\cap Z) &= ((X\cap Z)\setminus(Y\cap Z))\bigcup((Y\cap Z)\setminus(X\cap Z))\\ &= (X\cap Z\cap(Y^c\cup Z^c))\bigcup(Y\cap Z\cap(X^c\cup Z^c))\\ &= (X\cap Z\cap Y^c)\bigcup(X\cap\underbrace{Z\cap Z^c}_{=\emptyset})\bigcup(Y\cap Z\cap X^c)\bigcup(Y\cap\underbrace{Z\cap Z^c}_{=\emptyset})\\ &= (X\cap Z\cap Y^c)\bigcup(Y\cap Z\cap X^c).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X\triangle(Y\cap Z) &= (X\setminus(Y\cap Z))\bigcup((Y\cap Z)\setminus X)\\ &= (X\cap(Y^c\cup Z^c))\bigcup(Y\cap Z\cap X^c)\\ &= (X\cap Y^c)\bigcup(X\cap Z^c)\bigcup(Y\cap Z\cap X^c).\end{aligned}$$

  Sada vidimo da ako je $x\in(X\cap Z)\triangle(Y\cap Z)$ proizvoljan, tada je $x\in(X\cap Z\cap Y^c)$ ili $x\in(Y\cap Z\cap X^c)$. Ako je $x\in(X\cap Z\cap Y^c)$, tada je posebno $x\in(X\cap Y^c)$ pa je i $x\in(A\cap C)\triangle B$. U drugom slučaju, ako je $x\in(Y\cap Z\cap X^c)$, tada je $x\in X\triangle(Y\cap Z)$.

- Za obratnu inkluziju, promotrimo skupove $X=\{1\}$, $Y=\emptyset$ i $Z=\emptyset$. Tada je $X\triangle(Y\cap Z)=\emptyset$ i $(X\cap Z)\triangle(Y\cap Z)=\{1\}$ pa skupovi općenito nisu jednaki.

b) Neka je $C\in\mathcal{P}(A\cup B)$. Tada je $C\subseteq(A\cup B)$. Neka je $A_1=C\cap A$ i $B_1=C\cap B$. Tada je $C=A_1\cup B_1$ i $A_1\subseteq A$, $B_1\subseteq B$, tj. $A_1\in\mathcal{P}(A)$ i $B_1\in\mathcal{P}(B)$.

   S druge strane, ako je $A_1\in\mathcal{P}(A)$ i $B_1\in\mathcal{P}(B)$, tada je $A_1\subseteq A$ i $B_1\subseteq B$. Prema tome $A_1\cup B_1\subseteq A\cup B$, tj. $A_1\cup B_1\in\mathcal{P}(A\cup B)$.

c) $(x,y)\in(X\times Y)\setminus(X\times Z)\Leftrightarrow(x,y)\in X\times Y$ i $(x,y)\notin X\times Z\Leftrightarrow x\in X$ i $y\in Y$ i ($x\notin Y$ ili $y\notin Z$) $\Leftrightarrow$ ($x\in X$ i $y\in Y$ i $x\notin Y$) ili ($x\in X$ i $y\in Y$ i $y\notin Z$) $\Leftrightarrow$ $x\in X$ i $y\in Y$ i $y\notin Z\Leftrightarrow$ ($x\in X$ i ($y\in Y$ i $y\notin Z$) $\Leftrightarrow(x,y)\in X\times(Y\setminus Z)$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 25. studenog 2021.

Zadatak 3. (6 bodova) Dokažite da za sve $n \geq 3$ vrijedi:

$$n! < \left(\frac{2n}{3}\right)^n.$$

Napomena: U koraku indukcije možete upotrijebiti binomni teorem.

Rješenje: Baza: Za $n = 3$ vrijedi $3! = 6 < 8 = 2^3$ pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \geq 3$ i dokažimo za $n+1$:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \overset{\text{pretp.}}{<} \left(\frac{2n}{3}\right)^n \cdot (n+1)$$

Pa preostaje dokazati:

$$\left(\frac{2n}{3}\right)^n \cdot (n+1) \leq \left(\frac{2(n+1)}{3}\right)^{n+1}$$

odnosno ekvivalentno:

$$\frac{3}{2}n^n \leq (n+1)^n$$

Međutim iz binomnog teorema slijedi:

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k \geq n^n + \binom{n}{1} n^{n-1} = 2n^n > \frac{3}{2}n^n.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 25. studenog 2021.

Zadatak 4. (2 + 3 + 1 bod) Neka je S neprazan skup i neka je T njegov podskup. Na skupu $\mathcal{P}(S)$ zadana je relacija σ sa

$$A \,\sigma\, B \Leftrightarrow A \setminus T = B \setminus T.$$

(a) Dokažite da je σ relacija ekvivalencije.

(b) Nađite nužne i dovoljne uvjete koje treba zadovoljavati T da bi relacija σ bila antisimetrična. Dokažite svoje tvrdnje.

(c) Za $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $T = \{2, 4\}$ odredite klasu ekvivalencije elementa $\{2, 5\}$.

Rješenje.

(a) Dokazat ćemo da je relacija σ refleksivna, simetrična i tranzitivna. Refleksivna je jer za svaki $A \in \mathcal{P}(S)$ vrijedi $A \setminus T = A \setminus T$. Simetrična je jer za sve $A, B \in \mathcal{P}(S)$ vrijedi da je $A \setminus T = B \setminus T \Leftrightarrow B \setminus T = A \setminus T$. Tranzitivna je jer za sve $A, B, C \in \mathcal{P}(S)$ vrijedi da iz $A \setminus T = B \setminus T$ i $B \setminus T = C \setminus T$ slijedi $A \setminus T = C \setminus T$.

(b) Po definiciji je relacija σ antisimetrična ako za sve $A, B \in \mathcal{P}(S)$ vrijedi da iz $A \,\sigma\, B$ i $B \,\sigma\, A$ slijedi $A = B$. To vrijedi ako za sve $A, B \in \mathcal{P}(S)$ vrijedi da iz $A \setminus T = B \setminus T$ slijedi $A = B$. Tvrdimo da T mora biti prazan skup da bi to vrijedilo.

Dokazujemo tvrdnju: $T = \emptyset$ ako i samo ako je relacija σ antisimetrična.

Pretpostavimo prvo da je T prazan skup. Tada za sve $A, B \in \mathcal{P}(S)$ imamo da iz $A \setminus T = B \setminus T$ slijedi $A = B$. Dakle, relacija σ je antisimetrična.

Drugu implikaciju dokazat ćemo tako da dokažemo njen obrat po kontrapoziciji. Pretpostavimo da je T nije prazan skup i tvrdimo da tada relacija σ nije antisimetrična. Za $A = T$ i $B = \emptyset$ imamo $A \setminus T = \emptyset = B \setminus T$, ali $A \neq B$, pa relacija σ nije antisimetrična.

(c) Element $A \in \mathcal{P}(S)$ je u relaciji σ s $\{2, 5\}$ ako i samo ako je $A \setminus \{2, 4\} = \{2, 5\} \setminus \{2, 4\}$, to jest $A \setminus \{2, 4\} = \{5\}$. Takvi su svi skupovi A koji sadrže 5 i eventualno još neke elemente skupa $\{2, 4\}$. Klasa ekvivalencije elementa $\{2, 5\}$ je dakle

$$\{\{5\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 4, 5\}\}.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 25. studenog 2021.

Zadatak 5.

(a) Precizno iskažite princip matematičke indukcije.

Rješenje: Neka je $P(n)$ predikat koji ovisi o $n \in \mathbb{N}$ i neka vrijede sljedeće tvrdnje: „$P(1)$ je istina" te „Za svaki $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ povlači $P(s(n))$". Tada je $P(n)$ istina za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(b) Dokažite ili opovrgnite: $(P \vee Q) \wedge S \equiv (P \wedge S) \vee (Q \wedge S)$.

Rješenje: Dokazat ćemo da je lijeva strana (L) semantički jednaka desnoj (D):

P	Q	S	$P \vee Q$	L	$P \wedge S$	$Q \wedge S$	D
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	0	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**1**	0	1	**1**
1	0	0	1	**0**	0	0	**0**
1	0	1	1	**1**	1	0	**1**
1	1	0	1	**0**	0	0	**0**
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

(c) Zaokružite (T)očno ili (N)etočno:

T **N** Relacija „biti iste parnosti" na skupu $\{-n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z}$ je antisimetrična. *Jedan kontraprimjer su -1 i -3: u relaciji su u oba poretka, ali nisu jednaki.*

T N Skup $\{\mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ je particija skupa $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. *Zaista su elementi tog skupa neprazni, svi različiti elementi su disjunktni (jer različitih nema), a unija je* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

T **N** Ne postoji beskonačan totalno uređen skup koji ima najveći element. *Jedan kontraprimjer je čak u iskazu prve tvrdnje ovog podzadatka. Još jedan je* $\langle 0, 1]$.

(d) Dokažite da je definicija zbrajanja cijelih brojeva (danih kao klase po relaciji ekvivalencije među parovima prirodnih brojeva) dobra, tj. ne ovisi o izboru reprezentanata.

Rješenje: Neka je $(a, b) \sim (a', b')$ i $(c, d) \sim (c', d')$ (za uređene parove iz $\mathbb{N}^2$ i uobičajenu relaciju $\sim$). Tada je $(a' + c') + (b + d) = (a' + b) + (c' + d) = (a + b') + (c + d') = (a + c) + (b' + d')$. Druga jednakost slijedi iz pretpostavke i definicije relacije $\sim$, a ostale iz komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja na $\mathbb{N}$.

(e) Neka je $n \in \mathbb{N}$ te F formula logike sudova s varijablama $A_1, \ldots, A_n$. Koliko ima mogućih tablica istinitosti za F? Dokažite svoju tvrdnju indukcijom.

Rješenje: Nizova nula i jedinica duljine n ima 2^n (dva su takva za $n = 1$, a ako je 2^n nizova duljine n, onda će za jedan duljih biti 2^{n+1}; naime, onih 2^n možemo zdesna dopuniti sa 0 ili 1). Sve moguće tablice istinitosti za F imaju toliko redaka. Stoga mogućih zadnjih stupaca (i time tablica) ima najviše kao i nizova nula i jedinica duljine 2^n, a to je 2^{2^n}. No, svaka od tih tablica jest[2] moguća tablica istinitosti od F (slijedi iz npr. egzistencije KNF za F — gradivo *Programiranja 1*), pa ih ima $\mathbf{2^{2^n}}$.

[2]Na kolokviju nije bilo nužno argumentirati ovu tvrdnju za sve bodove iz podzadatka.