

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 1**

Popravni kolokvij – 4. ožujka 2021.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

**Zadatak 1.** (2+6+6 bodova) Na skupu  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  definirana je relacija  $\sim$  na sljedeći način:

$$A \sim B \iff (\exists m \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R})(x \in A \Leftrightarrow x + m \in B).$$

- (a) Zapišite simbolima sud  $A \not\sim B$ .
- (b) Dokažite da je  $\sim$  relacija ekvivalencije.
- (c) Neka je  $S$  klasa ekvivalencije relacije  $\sim$  različita od  $[\emptyset]$ . Dokažite da postoji skup  $A \in S$  takav da vrijedi  $A \cap [0, 1) \neq \emptyset$ .

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 1**

Popravni kolokvij – 4. ožujka 2021.

**Zadatak 2.** (14 bodova)

- (a) Neka je  $k \in \mathbb{N}$  neparan. Dokažite da tada broj  $2^{n+2}$  dijeli  $k^{2^n} - 1$  za sve  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) Neka su  $a, b \in \mathbb{N}$ . Dokažite: ako  $7 \mid a^2 + b^2$ , tada  $7 \mid a$  i  $7 \mid b$ .

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 1**

Popravni kolokvij – 4. ožujka 2021.

**Zadatak 3.** (14 bodova) Odredite sve  $a, b \in \mathbb{R}$  takve da polinomi

$$p(t) = (t - ab)(t - 2)^2$$
$$q(t) = t^3 - (a^2 + b^2 + 2)t^2 + (2a^2 + 2b^2 + 1)t - (a^2 + b^2)$$

imaju najveću zajedničku mjeru stupnja dva.

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 1**

Popravni kolokvij – 4. ožujka 2021.

**Zadatak 4.**

(a) Dokažite ili opovrgnite:  $(A \cup C) \times (B \cup D) \subseteq (A \times B) \cup (C \times D)$ .

(b) Iskažite mali Fermatov teorem tako da razdvojite pretpostavku i tvrdnju teorema.

Pretpostavka:

Tvrdnja:

(c) Riješite jednažbu  $3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$ .

(d) Zaokružite (T)očno ili (N)etočno:

T N Postoji najveći kardinalni broj.

T N Neka su  $f, g \in \mathbb{R}[x]$ ,  $g \neq 0$ . Tada postoje jedinstveni polinomi  $q, r \in \mathbb{R}[x]$  takvi da vrijedi  $f = gq + r$ .

T N Za svaki  $f \in \mathbb{C}[x]$  takav da je  $\deg f \geq 2$ , postoji  $\alpha \in \mathbb{C}$  takav da je  $\alpha$  nultočka od  $f$ .

(e) Navedite primjer polinoma  $p \in \mathbb{Z}[x]$  stupnja 2021 koji ima točno jednu realnu nultočku i ta nultočka je kratnosti 1.

**Napomena:** točno rješenje svakog podzadatka nosi 3 boda. Netočno ili prazno rješenje nosi  $-1$  bod, no tako da ukupan broj bodova na cijelom kolokviju ne bude manji od 0.

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 1**

Popravni kolokvij – 4. ožujka 2021.

**Zadatak 5.** (4+5+5 bodova)

- (a) Definirajte sljedeće pojmove: najveća zajednička mjera dvaju polinoma iz  $\mathbb{R}[x]$ ; relacija “biti kongruentan modulo  $n$ ” na skupu  $\mathbb{Z}$ .
- (b) Iskažite Osnovni teorem aritmetike, te dokažite dio teorema koji se odnosi na jedinstvenost.
- (c) Odredite sve polinome  $p$  s cjelobrojnim koeficijentima takve da je preslikavanje  $p : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  bijekcija.

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite!