

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 1**

Drugi kolokvij – 18. veljače 2021.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

**Zadatak 1.** (3+4 bodova)

- (a) Odredite posljednje dvije znamenke broja  $7^{7^{100}}$ .
- (b) Neka su  $p$  i  $q$  različiti prosti brojevi. Dokažite da tada vrijedi

$$q^{p-1} + p^{q-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 1**

Drugi kolokvij – 18. veljače 2021.

**Zadatak 2.** (3+4 bodova)

Polinom  $f$  s cjelobrojnim koeficijentima pri dijeljenju s  $x^2 - 1$  daje ostatak  $ax + 9$ , a pri dijeljenju s  $x^2 - 4x + 3$  daje ostatak  $-ax + 17$ , za neki realni broj  $a$ .

- (a) Odredite ostatak koji  $f$  daje pri dijeljenju s  $x^3 - 3x^2 - x + 3$ .
- (b) Ima li  $f$  cjelobrojnu nultočku? Obrazložite!

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 1**

Drugi kolokvij – 18. veljače 2021.

**Zadatak 3.** (5+2 bodova)

(a) Odredite sva rješenja sustava

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -11 \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = -\frac{1}{12} . \end{cases}$$

(b) Bez računanja koeficijenata napišite rastav na parcijalne razlomke funkcije

$$\frac{2x^3 - x + 6}{(x + 1)(x^2 + x + 3)(x^2 - 2x - 3)} .$$

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 1**

Drugi kolokvij – 18. veljače 2021.

**Zadatak 4.**

- (a) Iskažite Bézoutov identitet za prirodne brojeve tako da razdvojite pretpostavku i tvrdnju teorema (tj. propozicije).

Pretpostavka:

Tvrdnja:

- (b) Navedite primjer brojeva  $a, b, c, n \in \mathbb{N}$  za koje sljedeća tvrdnja **nije** istinita:

$$b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a^b \equiv a^c \pmod{n}$$

- (c) Zaokružite (T)očno ili (N)etočno:

T N Svaki neprazan podskup skupa racionalnih brojeva je konačan ili prebrojiv.

T N Ako je svaki element neke familije skupova prebrojiv skup, onda je i unija te familije prebrojiv skup.

T N Ako za  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  vrijedi  $a < b$  i  $c < d$ , onda je  $\text{card}\langle a, b \rangle = \text{card}[c, d]$ .

- (d) Navedite primjer polinoma  $p \in \mathbb{R}[x]$  stupnja 100 koji ima sve nultočke cjelobrojne, a da vrijedi  $p(2021) = 2021$ .

**Napomena:** točno rješenje svakog podzadatka nosi 2 boda. Netočno ili prazno rješenje nosi  $-1$  bod, no tako da ukupan broj bodova na cijelom kolokviju ne bude manji od 0.

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 1**

Drugi kolokvij – 18. veljače 2021.

**Zadatak 5.** (2+2+3 boda)

- (a) Definirajte djeljivost u  $\mathbb{R}[x]$ . Iskažite teorem o dijeljenju s ostatkom za polinome.
- (b) Dokažite da je najveća zajednička mjera (za prirodne brojeve) asocijativna, tj. da za sve  $a, b, c \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$M(M(a, b), c) = M(a, M(b, c)).$$

- (c) Iskažite Cantor-Bernstein-Schröderov teorem. Odredite kardinalnost skupa svih beskonačnih podskupova od  $\mathbb{N}$ .

Sve svoje tvrdnje precizno i detaljno iskažite i dokažite!