ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 3. prosinca 2020.

Zadatak 1. (2+5 bodova)

(a) Prikažite skupovne operacije $\cap$ i $\cup$ koristeći samo operacije $\setminus$ i Δ (nije potrebno dokazivati jednakosti).

(b) Neka su A, B, C i D proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$D \setminus \big(A \setminus (B \cup C)\big) \quad \text{i} \quad D \setminus \big((A \setminus B) \cup (A \setminus C)\big).$$

Rješenje.

(a) $A \cap B = A \setminus (A \Delta B), \quad A \cup B = A \Delta (B \setminus A).$

(b) Neka su A, B, C, D proizvoljni skupovi. Stavimo

$$S = A \setminus (B \cup C),$$

$$T = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Primijetimo kako tada zapravo ispitujemo odnos skupova $D \setminus S$ i $D \setminus T$, za što je dovoljno ispitati odnose skupova S i T. Skicom Vennovih dijagrama možemo očekivati da uvijek vrijedi $S \subseteq T$, no da obratna inkluzija ne mora biti istinita. Pokažimo prvo spomenutu inkluziju. Kako vrijedi $B \subseteq B \cup C$, to prvo imamo

$$A \setminus (B \cup C) \subseteq A \setminus B,$$

a zatim očito i

$$A \setminus B \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Time smo dokazali da za sve skupove A, B, C vrijedi $S \subseteq T$. Iz upravo dobivenog zaključujemo da vrijedi

$$D \setminus T \subseteq D \setminus S.$$

Pokažimo kontraprimjerom da obratna inkluzija ne mora vrijediti. Ponovno je dovoljno razmisliti o primjerima A, B, C za koji će vrijediti $T \nsubseteq S$; za D tada naprosto uzmemo skup koji je jednak $A \cup B \cup C$. Jedan od mogućih kontraprimjera je

$$A = B = \{0\},\ C = \emptyset,\ D = \{0\},$$

jer je u tom slučaju

$$D \setminus S = \{0\} \nsubseteq \emptyset = D \setminus T.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 3. prosinca 2020.

Zadatak 2. (2+2+3 boda) Neka je $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ partitivni skup od $\mathbb{N}$.

(a) Simbolima matematičke logike zapišite negaciju i obrat po kontrapoziciji suda

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))(\exists f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}))(\forall C, D \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\big(A\Delta D = B\Delta C \implies D = f(C)\big).$$

(b) Dokažite da je tvrdnja iz (a) dijela istinita.

(c) Na $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ je dana binarna relacija ρ sa:

$$(A, B)\ \rho\ (C, D) \iff A\Delta D = B\Delta C.$$

Ispitajte je li ρ refleksivna, simetrična, antisimetrična i tranzitivna.

Napomena: Simetrična razlika Δ je asocijativna skupovna operacija.
Rješenje.

(a) Negacija:

$$(\exists A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))(\forall f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}))(\exists C, D \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\big(A\Delta D = B\Delta C \wedge\ D \neq f(C)\big).$$

Obrat po kontrapoziciji:

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))(\exists f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}))(\forall C, D \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\big(D \neq f(C) \implies A\Delta D \neq B\Delta C\big).$$

(b) Za proizvoljne $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiramo funkciju $f(C) = A\Delta(B\Delta C)$. Sada za proizvoljne $C, D \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ pretpostavimo da vrijedi $A\Delta D = B\Delta C$. Iz računa

$$\begin{aligned} A\Delta/ \quad A\Delta D &= B\Delta C \\ A\Delta(A\Delta D) &= A\Delta(B\Delta C) \\ (A\Delta A)\Delta D &= A\Delta(B\Delta C) \\ \emptyset\Delta D &= A\Delta(B\Delta C) \\ D &= A\Delta(B\Delta C) \end{aligned}$$

vidimo da je $D = f(C)$ pa smo dokazali tvrdnju.

(c) Refleksivnost: $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ A\Delta B = B\Delta A$ slijedi iz $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ i komutativnosti unije.

Simetričnost: $\forall (A, B), (C, D) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $A\Delta D = B\Delta C \implies C\Delta B = D\Delta A$ ponovno slijedi iz $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ i komutativnosti unije.

Antisimetričnost: $\forall (A, B), (C, D) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$A\Delta D = B\Delta C \wedge C\Delta B = D\Delta A \implies (A, B) = (C, D)$$

ne vrijedi jer je za $(A, B) = (\{1\}, \{1\})$ i $(C, D) = (\{2\}, \{2\})$ na lijevoj strani implikacije imamo $\{1\}\Delta\{2\} = \{1\}\Delta\{2\} \wedge \{2\}\Delta\{1\} = \{2\}\Delta\{1\}$ što je istina, a jasno $(\{1\}, \{1\}) \neq (\{2\}, \{2\})$.

Tranzitivnost: $\forall (A,B),(C,D),(E,F) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$A\Delta D = B\Delta C \wedge C\Delta F = D\Delta E \implies A\Delta F = B\Delta E$$

slijedi iz računa

$$\begin{aligned}
A\Delta D &= B\Delta C \quad /\Delta E \\
(A\Delta D)\Delta E &= (B\Delta C)\Delta E \\
A\Delta(D\Delta E) &= B\Delta(C\Delta E) \\
A\Delta(F\Delta C) &= B\Delta(E\Delta C) \\
(A\Delta F)\Delta C &= (B\Delta E)\Delta C \quad /\Delta C \\
A\Delta F &= B\Delta E
\end{aligned}$$

gdje smo koristili pretpostavku da je lijeva strana implikacije istinita te činjenicu da za $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ vrijedi $X\Delta X = \emptyset$ i $X\Delta\emptyset = X$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 3. prosinca 2020.

Zadatak 3. (7 bodova) Matematičkom indukcijom dokažite da nejednakost

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n} \geq \frac{n^2}{2\sqrt{n}}$$

vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Rješenje.

Baza: Za $n=1$ gornja nejednakost glasi $1 \geq \frac{1^2}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$, što očito vrijedi.

Pretpostavka: Pretpostavimo da za neki prirodan broj k vrijedi

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{k} \geq \frac{k^2}{2\sqrt{k}}.$$

Korak: Dokažimo da iz pretpostavke slijedi da gornja nejednakost vrijedi i za $k+1$, tj. da vrijedi

$$1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1} \geq \frac{(k+1)^2}{2\sqrt{k+1}}.$$

Kako je po pretpostavci $1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{k} \geq \frac{k^2}{2\sqrt{k}}$, zbog tranzitivnosti uređaja dovoljno je dokazati

$$\frac{k^2}{2\sqrt{k}}+\sqrt{k+1} \geq \frac{(k+1)^2}{2\sqrt{k+1}}.$$

Računamo:

$$\begin{aligned} & \frac{k^2}{2\sqrt{k}}+\sqrt{k+1} \geq \frac{(k+1)^2}{2\sqrt{k+1}} \\ \Leftrightarrow \quad & k\sqrt{k}\sqrt{k+1}+2(k+1) \geq (k+1)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & k\sqrt{k}\sqrt{k+1} \geq k^2-1 \\ \Leftrightarrow \quad & k\sqrt{k} \geq (k-1)\sqrt{k+1} \end{aligned}$$

Kako su obje strane gornje nejednakosti nenegativne za svaki $k \in \mathbb{N}$, kvadriranjem dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$k^3 \geq k^3-k^2-k+1,$$

odnosno

$$k^2+k \geq 1,$$

što očito vrijedi za svaki prirodan broj k.

Po principu matematičke indukcije, za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n} \geq \frac{n^2}{2\sqrt{n}}.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 3. prosinca 2020.

Zadatak 4.

(a) Ispišite sve particije skupa $\{a,\, b,\, c\}$.

Rješenje. $\big\{\{a,b,c\}\big\}$, $\big\{\{a\},\{b,c\}\big\}$, $\big\{\{b\},\{a,c\}\big\}$, $\big\{\{c\},\{a,b\}\big\}$, $\big\{\{a\},\{b\},\{c\}\big\}$

(b) $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \{n \in \mathbb{N} : n \mid k\} =$

Rješenje. $\{1\}$ (jednočlan skup čiji jedini element je jedinica; taj i samo taj prirodni broj dijeli svaki cijeli broj različit od nule)

(c) Zaokružite (T)očno ili (N)etočno:

T N Svaki podskup binarne relacije je Kartezijev produkt dvaju skupova.

Rješenje. N (ako je skup A barem dvočlan, dijagonala od $A\times A$ nije Kartezijev produkt; sličica s dijagonalom u skripti je upravo takav primjer, ali možete razmišljati i o dijagonali skupa $\{a,b\}\times\{a,b\}$, odnosno $\{(a,a),(b,b)\}$)

T N Postoji relacija ekvivalencije koja je parcijalni uređaj.

Rješenje. T (pita se postoji li neka relacija koja je istovremeno refleksivna, simetrična, antisimetrična i tranzitivna; postoji, recimo na skupu $\{a\}$, relacija $\{(a,a)\}$ je upravo takva)

T N Svaki skup se može prikazati kao unija beskonačne indeksirane familije čija su svaka dva elementa međusobno disjunktna.

Rješenje. T (svaki skup A možemo prikazati ovako: $A = A\cup\emptyset\cup\emptyset\cup\ldots$; bitno je primijetiti da je $A\cap\emptyset=\emptyset$ za svaki skup A, uključujući $A=\emptyset$)

(d) Dokažite ili opovrgnite: $(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\equiv(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$.

Rješenje. Označimo lijevu stranu sa L, a desnu sa D. Dokazujemo $L\equiv D$.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge Q$	L	$P\vee Q$	$\neg P\vee\neg Q$	D
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0

Napomena: točno rješenje svakog podzadatka nosi 2 boda. Netočno ili prazno rješenje nosi -1 bod, no tako da ukupan broj bodova na cijelom kolokviju ne bude manji od 0.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 3. prosinca 2020.

Zadatak 5. (2+2+3 boda)

(a) Definirajte sljedeće pojmove: partitivni skup, relacija parcijalnog uređaja.

(b) Neka je ρ relacija ekvivalencije definirana na nepraznom skupu A. Dokažite da je kvocijentni skup $A/_\rho$ jedna particija skupa A.

(c) Neka je $\mathcal{F}$ skup svih formula logike sudova u kojima se javljaju točno dvije različite varijable. Na skupu $\mathcal{F}$ definiramo relaciju $\sim$ ovako: $F \sim G$ ako varijable u formuli G možemo preimenovati tako da dobivena formula bude semantički jednaka formuli F. Na primjer, formula $A \vee (A \wedge \neg B)$ je u relaciji s formulom $\neg(\neg Y \vee B) \vee Y$ (u drugoj formuli preimenujemo Y u A, a B ostavimo). Lako se vidi da je $\sim$ relacija ekvivalencije (ne trebate dokazivati). Odredite broj klasa te relacije.

Sve svoje tvrdnje precizno i detaljno iskažite i dokažite!

Rješenje.

(a) Partitivni skup skupa S je skup čiji elementi su svi podskupovi skupa S.
Relacija parcijalnog uređaja je binarna relacija koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

(b) Provjeravamo da skup $A/_\rho$ zadovoljava svojstva iz definicije particije:

(1) Za sve $[x] \in A/_\rho$ vrijedi $[x] \neq \emptyset$: kako je ρ refleksivna, vrijedi $x\rho x$, pa je $x \in [x]$, što znači $[x] \neq \emptyset$.

(2) Za sve $[x], [y] \in A/_\rho$ vrijedi $[x] = [y]$ ili $[x] \cap [y] = \emptyset$: ako je $x\rho y$ onda po teoremu dokazanom na predavanju slijedi $[x] = [y]$, a ako je $x \not\rho y$, onda po istom teoremu imamo $[x] \cap [y] = \emptyset$, dakle, različiti elementi od $A/_\rho$ su disjunktni.

(3) $\bigcup_{[x]\in A/_\rho}[x] = A$: za svaki $x \in A$ vrijedi $x \in [x]$, pa slijedi $x \in \bigcup_{[x]\in A/_\rho}[x]$, tj. $A \subseteq \bigcup_{[x]\in A/_\rho}[x]$. Obratna inkluzija je trivijalna: za svaku klasu $[x]$ vrijedi $[x] \subseteq A$, pa je i $\bigcup_{[x]\in A/_\rho}[x] \subseteq A$.

(c) Varijable u svakoj formuli možemo preimenovati u A i B, pa je svaka formula u relaciji s nekom formulom čije su varijable A i B i dovoljno je promatrati samo takve formule. Dvije formule su u relaciji ako imaju istu tablicu istinitosti. Tablica istinitosti za neku formulu F izgleda ovako:

A	B	F
0	0	α_1
0	1	α_2
1	0	α_3
1	1	α_4

gdje su $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \{0, 1\}$, odnosno, imamo najviše 16 neekvivalentnih formula, a svaka klasa je jednoznačno određena četvorkom $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Ako u formuli F preimenujemo varijablu A u B i obratno, dobit ćemo formulu G koja je u relaciji s F, a koja ima tablicu istinitosti

A	B	G
0	0	α_1
0	1	α_3
1	0	α_2
1	1	α_4

Stoga su klase određene četvorkama $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ i $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_4)$ iste (i različite od bilo koje klase određene nekom trećom četvorkom). Koliko postoji različitih klasa? Klase određene četvorkama $(\alpha_1, 0, 0, \alpha_4)$ i $(\alpha_1, 1, 1, \alpha_4)$ su različite, a klase određene sa $(\alpha_1, 0, 1, \alpha_4)$ i $(\alpha_1, 1, 0, \alpha_4)$ su iste, za svaki $\alpha_1, \alpha_4 \in \{0, 1\}$. Dakle, za fiksne α_1, α_4 imamo po 3 različite klase, te stoga ukupno postoji 12 različitih klasa.