JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2019.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1.

a) (5 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju broja

$$2851^{604^{20}}$$

s brojem 14.

b) (2 boda) Odredite $M(2^{200} - 2^{100}, 2^{200} + 2^{101})$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2019.

Zadatak 2.

Dana je familija polinoma $\mathcal{P} = \{p_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, gdje je

$$p_n(x) = x^3 + 2(1-n)x^2 + n(n-4)x + 2n^2.$$

Neka je $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ kojem je $d(x) \in \mathbb{R}[x]$ najveća zajednička mjera sa svakim polinomom iz familije $\mathcal{P}$, dakle $M(f(x), p_n(x)) = d(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) (5 bodova) Postoje li $f(x)$ i $d(x)$ ako je $\deg d(x) = 1$?

b) (2 boda) Postoje li $f(x)$ i $d(x)$ ako $d(x)$ ima višestruku nultočku?

Ako da, odredite sve moguće $f(x)$ i $d(x)$. Ako ne, obrazložite.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2019.

Zadatak 3.

a) (5 bodova) Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x+y+z &= 5 \\ x(y+z)^2+y(x+z)^2+z(x+y)^2 &= -14 \\ x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y) &= 34. \end{aligned}$$

b) (2 boda) Napišite oblik rastava na parcijalne razlomke za funkciju

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-4)^2(x^2+3x+7)^3}.$$

Konstante u brojnicima nije potrebno računati.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2019.

Zadatak 4.

(a) Iskažite Mali Fermatov teorem tako da razdvojite pretpostavku i tvrdnju teorema.
Pretpostavka:

Tvrdnja:

(b) Zaokružite tvrdnje koje su istinite za sve $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ i proste brojeve p. Pokraj onih koje nisu istinite navedite kontraprimjer.

(1) $a^p \equiv b^p \pmod{n} \ \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$

(2) $a|bp \ \Rightarrow \ (a|b \ \vee \ a|p)$

(3) $p|a^n \ \Rightarrow \ p|a.$

(c) Zaokružite tvrdnje koje su istinite za polinom $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(x) = (x-2)^2(x+5) - 19$:

(1) f je injekcija

(2) f je surjekcija

(3) f ima cjelobrojnu nultočku

(d) Navedite primjer polinoma $p \in \mathbb{C}[x]$ stupnja 10 čiji su svi koeficijenti cijeli brojevi, te koji ima dvije nultočke u skupu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, tri u skupu $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, a sve preostale nultočke su cjelobrojne.

Napomena: točno rješenje svakog podzadatka nosi 2 boda. Netočno ili prazno rješenje nosi -1 bod, no tako da ukupan broj bodova na cijelom kolokviju ne bude manji od 0.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2019.

Zadatak 5. (2+2+3 boda)

(a) Definirajte pojam mjere dvaju prirodnih brojeva.

(b) Dokažite da prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

(c) Neka su $a, b, c, d, k, \ell \in \mathbb{Z}$, te neka je p prost broj. Pokažite da sustav kongruencija

$$\left.\begin{array}{rcl} ax + by & \equiv & k \pmod{p} \\ cx + dy & \equiv & \ell \pmod{p} \end{array}\right\}$$

ima jedinstveno rješenje $(x, y) \in \{1, 2, \ldots, p\} \times \{1, 2, \ldots, p\}$ ako i samo ako za determinantu sustava vrijedi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2019.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1.

a) (5 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju broja

$$2661^{598^{20}}$$

s brojem 26.

b) (2 boda) Odredite $M(3^{202} - 3^{101}, 3^{202} + 3^{102})$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2019.

Zadatak 2.

Dana je familija polinoma $\mathcal{Q} = \{q_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, gdje je

$$q_n(x) = x^3 + (3 - 2n)x^2 + n(n - 6)x + 3n^2.$$

Neka je $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ kojem je $d(x) \in \mathbb{R}[x]$ najveća zajednička mjera sa svakim polinomom iz familije $\mathcal{Q}$, dakle $M(f(x), q_n(x)) = d(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) (5 bodova) Postoje li $f(x)$ i $d(x)$ ako je $\deg d(x) = 1$?

b) (2 boda) Postoje li $f(x)$ i $d(x)$ ako $d(x)$ ima višestruku nultočku?

Ako da, odredite sve moguće $f(x)$ i $d(x)$. Ako ne, obrazložite.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2019.

Zadatak 3.

a) (5 bodova) Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x+y+z&=2\\ x(y+z)^2+y(x+z)^2+z(x+y)^2&=4\\ x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)&=-56. \end{aligned}$$

b) (2 boda) Napišite oblik rastava na parcijalne razlomke za funkciju

$$f(x)=\frac{1}{(x^2-9)^2(x^2+4x+5)^3}.$$

Konstante u brojnicima nije potrebno računati.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2019.

Zadatak 4.

(a) Iskažite Osnovni teorem aritmetike tako da razdvojite pretpostavku i tvrdnju teorema.
Pretpostavka:

Tvrdnja:

(b) Zaokružite tvrdnje koje su istinite za sve $a, n \in \mathbb{N}$ i proste brojeve p, q. Pokraj onih koje nisu istinite navedite kontraprimjer.

(1) $p^a \equiv q^a \pmod{n} \Rightarrow p \equiv q \pmod{n}$

(2) $pq|a \Rightarrow (p|a \wedge q|a)$

(3) $a|pq \Rightarrow (a|p \vee a|q)$.

(c) Zaokružite tvrdnje koje su istinite za polinom $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(x) = (x+3)^2(x-1)^4 - 9$:

(1) f je injekcija

(2) f je surjekcija

(3) f ima cjelobrojnu nultočku

(d) Navedite primjer polinoma $p \in \mathbb{C}[x]$ stupnja 12 čiji su svi koeficijenti cijeli brojevi, te koji ima četiri nultočke u skupu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, tri u skupu $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, a sve preostale nultočke su cjelobrojne.

Napomena: točno rješenje svakog podzadatka nosi 2 boda. Netočno ili prazno rješenje nosi -1 bod, no tako da ukupan broj bodova na cijelom kolokviju ne bude manji od 0.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2019.

Zadatak 5. (2+2+3 boda)

(a) Definirajte pojam mjere dvaju prirodnih brojeva.

(b) Dokažite da prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

(c) Neka su $a, b, c, d, k, \ell \in \mathbb{Z}$, te neka je p prost broj. Pokažite da sustav kongruencija

$$\left.\begin{array}{rcl} ax + by & \equiv & k \pmod{p} \\ cx + dy & \equiv & \ell \pmod{p} \end{array}\right\}$$

ima jedinstveno rješenje $(x, y) \in \{1, 2, \ldots, p\} \times \{1, 2, \ldots, p\}$ ako i samo ako za determinantu sustava vrijedi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite!