JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 23. studeni 2018.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. Matematičkom indukcijom dokažite da nejednakost

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2-\frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

vrijedi za sve prirodne brojeve n.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 23. studeni 2018.

Zadatak 2.

(a) Neka je R tranzitivna relacija na skupu X takva da $(\forall x \in X)\ (x, x) \notin R$ te neka je Q relacija na X definirana s

$$xQy \;\Leftrightarrow\; (x = y \lor xRy).$$

Dokažite da je Q parcijalni uređaj na X.

(b) Na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ zadana je relacija ϱ definirana s

$$a\varrho b \;\Leftrightarrow\; (\exists p \in \mathcal{P})(p \mid a \land p \mid b),$$

pri čemu je $\mathcal{P}$ skup prostih brojeva. Je li ϱ refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna? Odredite najmanju relaciju ekvivalencije koja sadrži relaciju ϱ. Obrazložite!

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 23. studeni 2018.

Zadatak 3.

a) Dokažite da je simetrična razlika $\triangle$ asocijativna.

b) Zapišite $A_1 \triangle A_2 \triangle A_3$, $A_1 \triangle A_2 \triangle A_3 \triangle A_4$ i $A_1 \triangle A_2 \triangle A_3 \triangle A_4 \triangle A_5$ kao uniju skupova koji su presjeci skupova A_i ili A_i^c, za $i = 1, \dots, n$, $n \in \{3, 4, 5\}$. Obrazložite!

Uputa: Možete koristiti skraćenu notaciju preko binarnih n-torki. Na primjer, za $n = 2$, skup $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c)$ zapisati kao $S = \{(1,1), (0,1), (0,0)\}$, gdje je na $i-$tom mjestu u $n-$torci 1 ako se u presjeku nalazi A_i, a 0 ako se nalazi A_i^c. Također možete riječima opisati koje $n-$torke se nalaze u skupu S.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 23. studeni 2018.

Zadatak 4.

(a) Neka je $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Zaokružite skupove $\mathcal{F}$ takve da je $\mathcal{F}$ particija od A.

(1) $\mathcal{F} = \{\{2, 3, 4, 5, 6\}\}$ (2) $\mathcal{F} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ (3) $\mathcal{F} = \{\{2, 3, 6\}, \{3, 4, 5\}\}$

(4) $\mathcal{F} = \{\{6\}, \{2, 3, 4\}\}$

(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{n}\} =$

(c) Neka je $B = \{\{2, 4, 6, 8, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Odredite relaciju ekvivalencije $\sim$ na $\mathbb{N}$ takvu da $\mathbb{N}/_{\sim} = B$.

(d) Neka je $\leq$ relacija parcijalnog uređaja na skupu A. Koristeći kvantifikatore i logičke veznike iskažite tvrdnju da je $\leq$ totalni uređaj.

Napišite negaciju gornje tvrdnje, tako da se ne pojavljuje logički veznik $\neg$.

Napomena: točno rješenje svakog podzadatka nosi 2 boda. Netočno ili prazno rješenje nosi -1 bod, no tako da ukupan broj bodova na cijelom kolokviju ne bude manji od 0.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 23. studeni 2018.

Zadatak 5.

(a) Definirajte sljedeće pojmove: najveći element, supremum.

(b) Neka je $(A, \leq)$ parcijalno uređen skup te $B \subseteq A$. Dokažite da postoji najviše jedan supremum skupa A. Ukoliko B ima gornju među, da li tada nužno supremum postoji?

(c) Definirajte uređaj $\leq$ na $\mathbb{N}$. Dokažite da je $(\mathbb{N}, \leq)$ dobro uređen skup.

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite!

JMBAG — IME I PREZIME — BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 23. studeni 2018.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. Matematičkom indukcijom dokažite da nejednakost

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{m\sqrt{m-1}}\right)<1-\frac{1}{\sqrt{m}}$$

vrijedi za sve prirodne brojeve m veće od 1.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 23. studeni 2018.

Zadatak 2.

(a) Neka je Q tranzitivna relacija na skupu A takva da $(\forall a \in A)\ (a, a) \notin Q$ te neka je R relacija na A definirana s

$$aRb \;\Leftrightarrow\; (a = b \vee aQb).$$

Dokažite da je R parcijalni uređaj na A.

(b) Na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ zadana je relacija τ definirana s

$$x\tau y \;\Leftrightarrow\; (\exists p \in \mathcal{P})(p \mid x \wedge p \mid y),$$

pri čemu je $\mathcal{P}$ skup prostih brojeva. Je li τ refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna? Odredite najmanju relaciju ekvivalencije koja sadrži relaciju τ. Obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 23. studeni 2018.

Zadatak 3.

a) Dokažite da je simetrična razlika $\triangle$ asocijativna.

b) Zapišite $B_1 \triangle B_2 \triangle B_3$, $B_1 \triangle B_2 \triangle B_3 \triangle B_4$ i $B_1 \triangle B_2 \triangle B_3 \triangle B_4 \triangle B_5$ kao uniju skupova koji su presjeci skupova B_i ili B_i^c, za $i = 1, \ldots, n$, $n \in \{3, 4, 5\}$. Obrazložite!

Uputa: Možete koristiti skraćenu notaciju preko binarnih n-torki. Na primjer, za $n = 2$, skup $(B_1 \cap B_2) \cup (B_1^c \cap B_2) \cup (B_1^c \cap B_2^c)$ zapisati kao $S = \{(1,1), (0,1), (0,0)\}$, gdje je na $i-$tom mjestu u $n-$torci 1 ako se u presjeku nalazi B_i, a 0 ako se nalazi B_i^c. Također možete riječima opisati koje $n-$torke se nalaze u skupu S.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 23. studeni 2018.

Zadatak 4.

(a) Neka je $\leq$ relacija parcijalnog uređaja na skupu A. Koristeći kvantifikatore i logičke veznike iskažite tvrdnju da je $\leq$ totalni uređaj.

Napišite negaciju gornje tvrdnje, tako da se ne pojavljuje logički veznik $\neg$.

(b) Neka je $A = \{\{1, 3, 5, 7, \dots\}, \{2, 4, 6, 8, \dots\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Odredite relaciju ekvivalencije $\sim$ na $\mathbb{N}$ takvu da $\mathbb{N}/_{\sim} = A$.

(c) Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Zaokružite podskupove $\mathcal{F}$ takve da je $\mathcal{F}$ particija od A.

(1) $\mathcal{F} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (2) $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ (3) $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}\}$

(4) $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$

(d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}\} =$

Napomena: točno rješenje svakog podzadatka nosi 2 boda. Netočno ili prazno rješenje nosi -1 bod, no tako da ukupan broj bodova na cijelom kolokviju ne bude manji od 0.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 23. studeni 2018.

Zadatak 5.

(a) Definirajte sljedeće pojmove: najmanji element, infimum.

(b) Neka je $(A, \leq)$ parcijalno uređen skup te $B \subseteq A$. Dokažite da postoji najviše jedan infimum skupa A. Ukoliko B ima donju među, da li tada nužno infimum postoji?

(c) Definirajte uređaj $\leq$ na $\mathbb{N}$. Dokažite da je $(\mathbb{N}, \leq)$ dobro uređen skup.

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite!