JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 16. veljače 2018.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje. Za studente koji ostvare uvjet za pristup završnom ispitu, pismeni dio usmenog ispita će se održati u četvrtak, 22. veljače u 9h.

Zadatak 1. Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodni broj n veći od 1 vrijedi

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 16. veljače 2018.

Zadatak 2. Neka je φ Eulerova funkcija i neka je $p \in \mathbb{N}$ neparan prost broj.

(a) Koristeći definiciju Eulerove funkcije dokažite da za $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

(b) Pojednostavnite izraz

$$(p+1)\Big(\sum_{k=0}^{18} \varphi(p^{2k})\Big)\Big(\sum_{k=0}^{18} \varphi(2p^k)\Big) + 1.$$

(d) Odredite kojoj klasi ekvivalencije relacije modulo 27 pripadaju neparni prosti brojevi p za koje je izraz iz (b) djeljiv sa 27.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 16. veljače 2018.

Zadatak 3.

(a) Neka je $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 12$ i $g(x) = x^2 + mx + n$. Odredite sve moguće koeficijente m i n takve da je polinom f djeljiv polinomom g.

(b) Odredite koeficijente a i b polinoma $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 26$ ako ima tri različite nultočke u skupu $\mathbb{N}$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

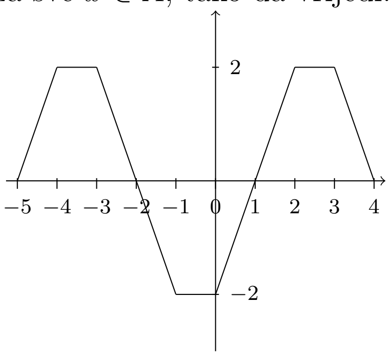
Popravni kolokvij – 16. veljače 2018.

Zadatak 4.

(a) Precizno riječima iskažite Mali Fermatov teorem. Razdvojite pretpostavku i tvrdnju teorema.
pretpostavka:

tvrdnja:

(b) Promotrimo funkciju $f : [-5, 4] \to [-2, 2]$ čiji je graf na donjoj slici. Odredite domenu A i kodomenu B za funkciju $g : A \to B$ koja djeluje po pravilu $g(x) = f(x)$, za sve $x \in A$, tako da vrijedi:



(a) g je injekcija, ali nije surjekcija:
A =
B =

(b) g nije injekcija, ali je surjekcija:
A =
B =

(c) Navedite primjer polinom $p \in \mathbb{Z}[x]$ stupnja 101 koji ima **točno** tri različite realne nultočke.

(d) Neka je P skup svih parnih, a N skup svih neparnih prirodnih brojeva. Postoji li bijekcija $f : N \to P$? Ako postoji, konstruirajte ju.

(e) Neka je $\sim$ relacija definirana na skupu A. Koristeći kvantifikatore i logičke veznike iskažite tvrdnju da je $\sim$ tranzitivna relacija.

Napišite negaciju gornje tvrdnje, tako da se ne pojavljuje logički veznik $\neg$ (smije se pojaviti $\notin$ ili $\not\sim$).

Napomena: točno rješenje svakog podzadatka nosi 2 boda. Netočno ili prazno rješenje nosi -1 bod, no tako da ukupan broj bodova na cijelom kolokviju ne bude manji od 0.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 16. veljače 2018.

Zadatak 5.

(a) Definirajte pojmove: klasa ekvivalencije, particija skupa.

(b) Neka je A skup i $\sim$ relacija ekvivalencije na A. Neka su $a, b \in A$. Dokažite da vrijedi ili $[a] = [b]$ ili $[a] \cap [b] = \emptyset$.

(c) Neka je $S_i = [i, i+1\rangle$, $i \in \mathbb{Z}$. Dokažite da je $P = \{S_i : i \in \mathbb{Z}\}$ particija skupa $\mathbb{R}$. Postoji li relacija ekvivalencije $\sim$ na $\mathbb{R}$ takva da $P = \mathbb{R}/_{\sim}$? Ako da, odredite je.

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 16. veljače 2018.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje. Za studente koji ostvare uvjet za pristup završnom ispitu, pismeni dio usmenog ispita će se održati u četvrtak, 22. veljače u 9h.

Zadatak 1. Matematičkom indukcijom dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{4(n+1)}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 16. veljače 2018.

Zadatak 2. Neka je φ Eulerova funkcija i neka je $p \in \mathbb{N}$ neparan prost broj.

(a) Koristeći definiciju Eulerove funkcije dokažite da za $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

(b) Pojednostavnite izraz

$$(p+1)(\sum_{k=0}^{20} \varphi(2p^k))(\sum_{k=0}^{20} \varphi(p^{2k})) + 2.$$

(c) Odredite kojoj klasi ekvivalencije relacije modulo 25 pripadaju neparni prosti brojevi p za koje je izraz iz (b) djeljiv sa 25.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 16. veljače 2018.

Zadatak 3.

(a) Neka je $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12$ i $g(x) = x^2 + mx + n$. Odredite sve moguće koeficijente m i n takve da je polinom f djeljiv polinomom g.

(b) Odredite koeficijente a i b polinoma $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 34$ ako ima tri različite nultočke u skupu $\mathbb{N}$.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

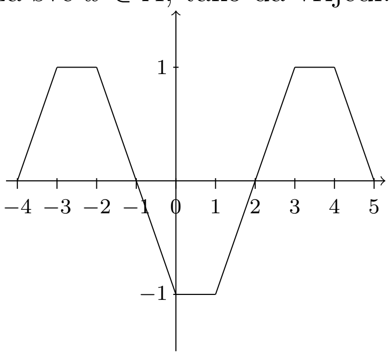
Popravni kolokvij – 16. veljače 2018.

Zadatak 4.

(a) Precizno riječima iskažite Teorem o dijeljenju s ostatkom za brojeve. Razdvojite pretpostavku i tvrdnju teorema.
pretpostavka:

tvrdnja:

(b) Promotrimo funkciju $f : [-4, 5] \to [-1, 1]$ čiji je graf na donjoj slici. Odredite domenu A i kodomenu B za funkciju $g : A \to B$ koja djeluje po pravilu $g(x) = f(x)$, za sve $x \in A$, tako da vrijedi:



(a) g je injekcija, ali nije surjekcija:
A =
B =

(b) g nije injekcija, ali je surjekcija:
A =
B =

(c) Navedite primjer polinom $p \in \mathbb{Z}[x]$ stupnja 120 koji ima **točno** dvije različite realne nultočke.

(d) Neka je P skup svih parnih, a N skup svih neparnih prirodnih brojeva. Postoji li bijekcija $f : P \to N$? Ako postoji, konstruirajte ju.

(e) Neka je $\sim$ relacija definirana na skupu A. Koristeći kvantifikatore i logičke veznike iskažite tvrdnju da je $\sim$ antisimetrična relacija.

Napišite negaciju gornje tvrdnje, tako da se ne pojavljuje logički veznik $\neg$ (smije se pojaviti $\notin$ ili $\not\sim$).

Napomena: točno rješenje svakog podzadatka nosi 2 boda. Netočno ili prazno rješenje nosi -1 bod, no tako da ukupan broj bodova na cijelom kolokviju ne bude manji od 0.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 16. veljače 2018.

Zadatak 5.

(a) Definirajte pojmove: klasa ekvivalencije, kvocijentni skup.

(b) Neka je A skup i $\sim$ relacija ekvivalencije na A. Neka su $a, b \in A$. Dokažite da vrijedi ili $[a] = [b]$ ili $[a] \cap [b] = \emptyset$.

(c) Neka je $S_i = [i, i+1\rangle$, $i \in \mathbb{Z}$. Dokažite da je $P = \{S_i : i \in \mathbb{Z}\}$ particija skupa $\mathbb{R}$. Postoji li relacija ekvivalencije $\sim$ na $\mathbb{R}$ takva da $P = \mathbb{R}/_\sim$? Ako da, odredite je.

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite!