JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 2. veljače 2018.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje. Za studente koji ostvare uvjet za pristup završnom ispitu, pismeni dio usmenog ispita će se održati u ponedjeljak, 19. veljače u 9h.

Zadatak 1. Dokažite da sljedeće jednadžbe nemaju rješenja za $m, n \in \mathbb{N}$:

a) $n^2 - 7m^2 = 28$

b) $n^{21} - n + 11 = 5^m$

Rješenje:

a) Pretpostavimo da postoje $m, n \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi jednadžba $n^2 - 7m^2 = 28$. Jer $7|28$, slijedi da $7|n^2$ pa jer je 7 prost broj imamo $7|n$. Zapišimo $n = 7n_0$, za neki $n_0 \in \mathbb{N}$. Supstitucijom u jednadžbu dobivamo:

$$49n_0^2 - 7m^2 = 28 \Leftrightarrow 7n_0^2 - m^2 = 4$$

Gledajući jednadžbu modulo 7 zaključujemo da vrijedi:

$$-m^2 \equiv 4 \pmod 7 \Leftrightarrow m^2 \equiv 3 \pmod 7$$

No niti jedan prirodan broj ne zadovoljava tu kongruenciju jer: $0^2 \equiv 0 \pmod 7$, $1^2 \equiv 1 \pmod 7$, $2^2 \equiv 4 \pmod 7$, $3^2 \equiv 2 \pmod 7$, $4^2 \equiv 2 \pmod 7$, $5^2 \equiv 4 \pmod 7$, $6^2 \equiv 1 \pmod 7$. Zaključujemo, takav $m \in \mathbb{N}$ ne postoji, pa time niti rješenje početne jednadžbe. $\square$

b) Pretpostavimo da postoje $m, n \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi jednadžba $n^{21} - n + 11 = 5^m$. Primijetimo da $5 \nmid n$ jer bi u suprotnom $5|11$. Dakle, $M(n, 5) = 1$. No tada je i $M(n, 25) = 1$, pa Eulerov teorem daje:

$$n^{\varphi(25)} \equiv 1 \pmod{25} \Leftrightarrow n^{20} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow n^{21} \equiv n \pmod{25}$$

Time vidimo da za $m \geq 2$ gledajući jednadžbu modulo 25, dobivamo kontradikciju jer

$$n^{21} - n + 11 \equiv 0 \pmod{25} \Leftrightarrow 11 \equiv 0 \pmod{25}$$

Zbog toga je jedina mogućnost $m = 1$ što daje:

$$n^{21} - n = -6$$

Ova jednadžba nema rješenje u prirodnim brojevima jer $n^{21} - n > -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 2. veljače 2018.

Zadatak 2. Odredite koeficijente $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i najveću zajedničku mjeru polinoma

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + ax^2 - 22x + b,$$
$$g(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 + cx + 3$$

ako je poznato da njihova najveća zajednička mjera ima dvostruku cjelobrojnu nultočku.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 2. veljače 2018.

Zadatak 3.

a) Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z} &= -2 \\ x+y+z &= 1 \\ x^2+y^2+z^2 &= 3. \end{aligned}$$

b) Napišite oblik rastava na parcijalne razlomke za funkciju

$$f(x)=\frac{1}{(x+2)^3(x^2+x+1)^2}.$$

Konstante u brojnicima nije potrebno računati.

Rješenje:

a) Kvadriranjem druge jednadžbe i uvrštavanjem u treću dobivamo

$$xy+xz+yz=-1.$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu s xyz dobivamo

$$x^2z+y^2x+z^2y+y^2z+z^2x+x^2y=-2xyz,$$

odnosno

$$xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)=-2xyz,$$

t.j.

$$xy(1-z)+xz(1-y)+yz(1-x)=-2xyz,$$

odakle slijedi $xyz=-1$. Prema Vieteovim formulama, x, y i z su nultočke polinoma

$$p(t)=t^3-t^2-t+1=(t-1)^2(t+1).$$

Dakle rješenja su uređene trojke: $(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)$.

b)

$$f(x)=\frac{1}{(x+2)^3(x^2+x+1)^2}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{(x+2)^2}+\frac{c}{(x+2)^3}+\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 2. veljače 2018.

Zadatak 4.

a) Precizno riječima iskažite Osnovni teorem algebre. Razdvojite pretpostavku i tvrdnju teorema.
pretpostavka: Neka je $p \in \mathbb{C}[x]$ polinom stupnja većeg ili jednakog od 1.

tvrdnja: Postoji $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da $p(\alpha) = 0$.

b) Dan je skup $A = \{p, q, r\}$. Odaberite $D \subseteq A$ i $K \subseteq A$ i funkciju $f : D \to K$ tako da:

(i) f je injekcija, ali nije surjekcija: $D = \{p\},\ K = \{p, q\}$

Pravilo za f: $f(p) = p$.

(ii) f je bijekcija: $D = \{p\},\ K = \{p\}$

Pravilo za f:$f(p) = p$.

c) Zaokružite tvrdnje koje su istinite za SVE $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, te $n \in \mathbb{N}$.

(i) $a \equiv b \pmod{n}\ \ \&\ \ c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{n}$.
Istina.

(ii) $ac \equiv bc \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$.
$a = 1,\ b = 2,\ c = 2\ , n = 2$.

Pokraj tvrdnji koje nisu istinite, napišite kontraprimjer (odnosno, a, b, c, d, n za koje tvrdnja ne vrijedi).

d) Navedite primjer polinoma $p \in \mathbb{Z}[x]$ stupnja 50 koji ima barem dvije različite cjelobrojne nultočke.
$p(x) = x^{25}(x - 1)^{25}$.

Napomena: točno rješenje svakog podzadatka nosi 2 boda. Netočno ili prazno rješenje nosi -1 bod, no tako da ukupan broj bodova na cijelom kolokviju ne bude manji od 0.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 2. veljače 2018.

Zadatak 5.

a) Iskažite Bézoutov identitet za cijele brojeve.
Neka su $a, b \in \mathbb{N}$. Tada postoje cijeli brojevi $x, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$M(a,b) = x \cdot a + y \cdot b.$$

b) Iskažite i dokažite Bézoutov teorem za polinome.
$\alpha \in \mathbb{C}$ je nultočka polinoma $f \in \mathbb{C}[x]$ ako i samo ako $(x - \alpha)|f$.

($\Rightarrow$): Neka je $\alpha \in \mathbb{C}$ nultočka polinoma f. Po Teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje $q \in \mathbb{C}[x]$ i $r \in \mathbb{C}$ takvi da

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + r.$$

Uvrštavanjem $x = \alpha$ u gornju jednakost dobivamo $r = 0$, tj. $(x - \alpha)|f$.

($\Leftarrow$): Pretpostavimo $(x - \alpha)|f$, tj. postoji $q \in \mathbb{C}[x]$ takav da $f(x) = (x - \alpha)q(x)$. Uvrštavanjem $x = \alpha$ dobivamo $f(\alpha) = 0$, tj. α je nultočka polinoma f.

c) Odredite kardinalni broj skupa $\mathbb{Z}[x]$.

Za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $\mathcal{P}_n = \{p \in \mathbb{Z}[x] : \deg\ p = n\}$. Definirajmo preslikavanje $f : \mathcal{P}_n \to \mathbb{Z}^{n+1}$ formulom

$$f(p) = (a_0, a_1, \dots, a_n),$$

gdje je $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$. Po teoremu o jednakosti polinoma f je injekcija. Koristeći Prop 6.20 (skripta) lako se vidi indukcijom da je $\mathrm{card}(\mathbb{Z}^n) = \aleph_0$. Dakle, $\mathrm{card}(\mathcal{P}_n) \leq \aleph_0$. S druge strane definirajmo $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_n$ sa $g(m) = mx^n$. Kako je g injekcija, imamo $\mathrm{card}(\mathcal{P}_n) = \aleph_0$.

Sada iz $\mathbb{Z}[x] = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$ imamo $\mathrm{card}\mathbb{Z}[x] = \aleph_0$. U zadnjem koraku koristili smo Prop 6.26 (skripta), tj. da je prebrojiva unija prebrojivoh skupova opet prebrojiv skup.

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 2. veljače 2018.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje. Za studente koji ostvare uvjet za pristup završnom ispitu, pismeni dio usmenog ispita će se održati u ponedjeljak, 19. veljače u 9h.

Zadatak 1. Dokažite da sljedeće jednadžbe nemaju rješenja za $m, n \in \mathbb{N}$:

a) $n^2 - 5m^2 = 40$

b) $n^{19} - n + 7 = 3^m$
Rješenje:

a) Pretpostavimo da postoje $m, n \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi jednadžba $n^2 - 5m^2 = 40$. Jer $5|40$, slijedi da $5|n^2$ pa jer je 5 prost broj imamo $5|n$. Zapišimo $n = 5n_0$, za neki $n_0 \in \mathbb{N}$. Supstitucijom u jednadžbu dobivamo:

$$25n_0^2 - 5m^2 = 40 \Leftrightarrow 5n_0^2 - m^2 = 8$$

Gledajući jednadžbu modulo 5 zaključujemo da vrijedi:

$$-m^2 \equiv 3 \pmod 5 \Leftrightarrow m^2 \equiv 2 \pmod 5$$

No niti jedan prirodan broj ne zadovoljava tu kongruenciju jer: $0^2 \equiv 0 \pmod 5$, $1^2 \equiv 1 \pmod 5$, $2^2 \equiv 4 \pmod 5$, $3^2 \equiv 4 \pmod 5$, $4^2 \equiv 1 \pmod 5$. Zaključujemo, takav $m \in \mathbb{N}$ ne postoji, pa time niti rješenje početne jednadžbe. $\square$

b) Pretpostavimo da postoje $m, n \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi jednadžba $n^{19} - n + 7 = 3^m$. Primijetimo da $3 \nmid n$ jer bi u suprotnom $3|7$. Dakle, $M(n, 3) = 1$. No tada je i $M(n, 27) = 1$, pa Eulerov teorem daje:

$$n^{\varphi(27)} \equiv 1 \pmod{27} \Leftrightarrow n^{18} \equiv 1 \pmod{27} \Rightarrow n^{19} \equiv n \pmod{27}$$

Time vidimo da za $m \geq 3$ gledajući jednadžbu modulo 27, dobivamo kontradikciju jer

$$n^{19} - n + 7 \equiv 0 \pmod{27} \Leftrightarrow 7 \equiv 0 \pmod{27}$$

Zbog toga su jedine mogućnosti $m = 1$ i $m = 2$ što daje:

$$n^{19} - n = -4 \text{ i } n^{19} - n = 2.$$

Ove jednadžbe nemaju rješenje u prirodnim brojevima jer je $n \mapsto n^{19} - n$ strogo rastuća funkcija, a za $n = 1, 2$ dobivamo vrijednosti $0, 2^{19} - 2$. $\square$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 2. veljače 2018.

Zadatak 2. Odredite koeficijente $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i najveću zajedničku mjeru polinoma

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 + ax - 3, \\ g(x) &= x^4 - 6x^3 + bx^2 + 22x + c \end{aligned}$$

ako je poznato da njihova najveća zajednička mjera ima dvostruku cjelobrojnu nultočku.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 2. veljače 2018.

Zadatak 3.

a) Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} &= 7 \\ a+b+c &= 5 \\ a^2+b^2+c^2 &= 9. \end{aligned}$$

b) Napišite oblik rastava na parcijalne razlomke za funkciju

$$f(x)=\frac{1}{(x-5)^2(x^2+2x+5)^3}.$$

Konstante u brojnicima nije potrebno računati.

Rješenje:

a) Kvadriranjem druge jednadžbe i uvrštavanjem u treću dobivamo

$$ab+ac+bc=8.$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu s abc dobivamo

$$a^2c+b^2a+c^2b+b^2c+c^2a+a^2b=7abc,$$

odnosno

$$ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)=7abc,$$

t.j.

$$ab(1-c)+ac(1-z)+bc(1-a)=7abc,$$

odakle slijedi $abc=4$. Prema Vieteovim formulama, a,b i c su nultočke polinoma

$$p(t)=t^3-5t^2+8t-4=(t-2)^2(t-1).$$

Dakle rješenja su uređene trojke: $(2,2,1),(1,2,2),(2,1,2)$.

b)

$$f(x)=\frac{1}{(x-5)^2(x^2+2x+5)^3}=\frac{a}{x-5}+\frac{b}{(x-5)^2}+\frac{Ax+B}{x^2+2x+5}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+5)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+2x+5)^3}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 2. veljače 2018.

Zadatak 4.

a) Precizno riječima iskažite Teorem o djeljenju s ostatkom za cijele brojeve. Razdvojite pretpostavku i tvrdnju teorema.
pretpostavka: Neka su a i b cijeli brojevi takvi da $b > 0$.

tvrdnja: Postoje jedinstveni cijeli brojevi q, r takvi da $0 \leq r < b$ i vrijedi

$$a = q \cdot b + r.$$

b) Dan je skup $A = \{p, q, r\}$. Odaberite $D \subseteq A$ i $K \subseteq A$ i funkciju $f : D \to K$ tako da:

(i) f nije injekcija, ali je surjekcija: $D = \{p, q\},\ K = \{p\}$

Pravilo za f: $f(p) = p,\ f(q) = p$.

(ii) f nije injekcija ni surjekcija: $D = \{p, q\},\ K = \{p, q\}$

Pravilo za f: $f(p) = p,\ f(q) = p$.

c) Zaokružite tvrdnje koje su istinite za SVE $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, te $n \in \mathbb{N}$.

(i) $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.
$a = 2$, $n = 2$.

(ii) $a \equiv b \pmod{n}$ & $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{n}$.
Istina.

Pokraj tvrdnji koje nisu istinite, napišite kontraprimjer (odnosno, a, b, c, d, n za koje tvrdnja ne vrijedi).

d) Navedite primjer polinoma $p \in \mathbb{R}[x]$ stupnja 150 koji ima barem dvije različite racionalne nultočke.
$p(x) = x^{100}(x-1)^{50}$.

Napomena: točno rješenje svakog podzadatka nosi 2 boda. Netočno ili prazno rješenje nosi -1 bod, no tako da ukupan broj bodova na cijelom kolokviju ne bude manji od 0.

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 2. veljače 2018.

Zadatak 5.

a) Iskažite Bézoutov identitet za cijele brojeve.

b) Iskažite i dokažite Bézoutov teorem za polinome.

c) Odredite kardinalni broj skupa $\mathbb{Z}[x]$.

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite!