JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 24. studenog 2017.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. Ispitajte odnos skupova:

$$C \setminus (A \triangle B) \qquad \text{i} \qquad (A \cap C) \cup (C \setminus B).$$

Rješenje: Neka je $x \in C \setminus (A \triangle B)$. Tada imamo $x \in C$ i $x \notin A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Dakle $x \in C$ i vrijedi $x \notin A \cup B$ ili $x \in A \cap B$. Imamo dva slučaja:

(1) $x \notin A \cup B$
Tada $x \notin A$ i $x \notin B$, pa zbog $x \in C$ i $x \notin B$ imamo $x \in C \setminus B$, pa zaključujemo $x \in (A \cap C) \cup (C \setminus B)$.

(2) $x \in A \cap B$
Tada $x \in A$ i $x \in B$, pa zbog $x \in C$ i $x \in A$ slijedi $x \in A \cap C$, pa vidimo da je opet $x \in (A \cap C) \cup (C \setminus B)$.

Dokazali smo

$$C \setminus (A \triangle B) \subseteq (A \cap C) \cup (C \setminus B).$$

Obratna inkluzija ne vrijedi. Uzmimo primjerice

$$A = C = \{1\},\ B = \emptyset.$$

Tada je

$$C \setminus (A \triangle B) = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset,$$

$$(A \cap C) \cup (C \setminus B) = \{1\} \cup (\{1\} \setminus \emptyset) = \{1\}.$$

Kako $\{1\} \not\subseteq \emptyset$, vidimo da

$$(A \cap C) \cup (C \setminus B) \not\subseteq C \setminus (A \triangle B).$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 24. studenog 2017.

Zadatak 2. Na partitivnom skupu skupa prirodnih brojeva $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zadana je relacija ϱ defnirana s

$$A \varrho B \;\Leftrightarrow\; (\exists n \in \mathbb{N})(B = A \cup \{n\}).$$

(a) Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna. Sve svoje tvrdnje dokažite.

(b) Može li se ϱ nadopuniti do relacije parcijalnog uređaja? Obrazložite.

Rješenje:

(a)
- refleksivnost
  ϱ nije refleksivna jer je $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, no za niti jedan $n \in \mathbb{N}$ ne vrijedi $\emptyset = \emptyset \cup \{n\}$, pa $(\emptyset, \emptyset) \notin \varrho$.
- simetričnost
  ϱ nije simetrična jer je primjerice $(\emptyset, \{1\}) \in \varrho$, ali $(\{1\}, \emptyset) \notin \varrho$.
- antisimetričnost
  Pretpostavimo da vrijedi $(A, B), (B, A) \in \varrho$, za neke $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Tada postoje $n, m \in \mathbb{N}$ takvi da je $B = A \cup \{n\}$ i $A = B \cup \{m\}$. Iz ovoga slijedi redom $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, pa je $A = B$. Dakle ϱ je antisimetrična.
- tranzitivnost
  ϱ nije tranzitivna jer imamo $(\emptyset, \{1\}), (\{1\}, \{1, 2\}) \in \varrho$, no $(\emptyset, \{1, 2\}) \notin \varrho$ (u suprotnom bi dvočlan skup $\{1, 2\}$ mogli prikazati kao prazan skup unija neki jednočlan skup, što je očito nemoguće).

(b) Ispitujemo postoji li relacija parcijalnog uređaja ϱ' takva da vrijedi $\varrho \subseteq \varrho'$. Uočimo da vrijedi implikacija

$$A \varrho B \;\Rightarrow\; A \subseteq B.$$

Dakle vidimo da je relacija ϱ sadržana u relaciji $\subseteq$, a znamo da je $\subseteq$ relacija parcijalnog uređaja. Dakle, odgovor na pitanje je da.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 24. studenog 2017.

Zadatak 3. Neka je x pozitivan, a y negativan realan broj takav da je $x+y>0$. Matematičkom indukcijom dokažite da za sve prirodne brojeve n veće od 1 vrijedi

$$x^n+(-1)^{n+1}y^n>n\cdot(x+y)\cdot(-1)^{n-1}y^{n-1}.$$

Rješenje: Uvedimo supstituciju $a=x$, $b=-y$. Tada su a i b pozitivni realni brojevi i vrijedi $a>b$. Treba dokazati da za sve prirodne brojeve veće od 1 vrijedi

$$a^n-b^n>n\cdot(a-b)b^{n-1}.$$

Baza indukcije: $n=2$. Treba dokazati $a^2-b^2>2\cdot(a-b)b$. Budući je $a-b>0$, dovoljeno je dokazati $a+b>2b$, odnosno $a>b$, a to je ispunjeno po uvjetu zadatka.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj $n\geq 2$.

Korak indukcije: Po pretpostavci imamo:

$$a^n-b^n>n\cdot(a-b)b^{n-1}.$$

Ako tu nejednakost pomnožimo s $b>0$, dobivamo

$$a^n\cdot b-b^{n+1}>n\cdot(a-b)b^n.$$

Dodamo li toj nejednakosti $(a-b)b^n$ s lijeve i desne strane, dobivamo

$$a^n\cdot b+ab^n-2b^{n+1}>(n+1)\cdot(a-b)b^n.$$

Sada je dovoljno dokazati da vrijedi

$$a^{n+1}-b^{n+1}>a^n\cdot b+ab^n-2b^{n+1},$$

što je ekvivalentno nejednakosti:

$$a^{n+1}>a^n\cdot b+ab^n-b^{n+1},$$

odnosno

$$a^n(a-b)-b^n(a-b)>0,$$

tj.

$$(a^n-b^n)(a-b)>0,$$

a to vrijedi za sve pozitivne realne brojeve a i b takve da je $a>b$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 24. studenog 2017.

Zadatak 4.

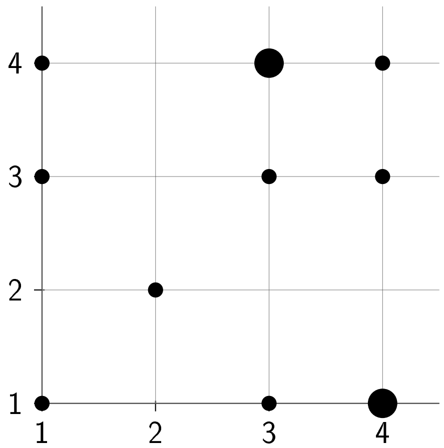
(a) Neka je $\sim$ relacija definirana na skupu A. Koristeći kvantifikatore i logičke veznike iskažite tvrdnju da je $\sim$ simetrična relacija.

Rješenje: $(\forall x \in A)(\forall y \in A)\ x \sim y \ \Rightarrow\ y \sim x.$

Napišite negaciju gornje tvrdnje, tako da se ne pojavljuje logički veznik $\neg$ (smije se pojaviti $\notin$ ili $\nsim$).

Rješenje: $(\exists x \in A)(\exists y \in A)\ x \sim y \ \wedge\ y \nsim x.$

(b) Nadopunite relaciju $\rho \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$ na donjoj slici tako da ona postane relacija ekvivalencije, ali tako da ne sadrži baš sve uređene parove iz $\{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$.



Za relaciju koju ste nacrtali, odredite [1], [2], [3], [4].

Rješenje: Na slici su manjim krugovima označeni dodani uređeni parovi: zbog refleksivnosti dodajemo $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$; zbog simetričnosti $(4,3)$ i $(1,4)$; zbog tranzitivnosti još i $(1,3)$ i $(3,1)$.
Slijedi: $[1] = [3] = [4] = \{1,3,4\}$, $[2] = \{2\}$.

(c) Neka je $A = \{2,3,5,8\}$, te $\mathcal{F} = \{\{5,3,8\},\{2\}\}$. Zaokružite tvrdnje koje su istinite:

(1) $\mathcal{F}$ je particija od A (2) $\mathcal{P}(A)$ je particija od A (3) $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(A)$.

Rješenje: Istinita je samo tvrdnja (1).

(d) Neka je A skup koji ima 10 elemenata, a ρ relacija ekvivalencije na A takva da kvocijentni skup $A/_{\rho}$ ima točno 2 elementa. Koliko najviše elemenata ima skup ρ?

Rješenje: Neka je $A/_{\rho} = \{[x],[y]\}$. Označimo sa n_x i n_y broj elemenata od $[x]$ i $[y]$, redom; možemo uzeti da je $n_x \geq n_y$. Svi elementi skupa $[x]$ su međusobno u relaciji, kao i svi elementi skupa $[y]$. Stoga ρ ima $n_x^2 + n_y^2$ elemenata. Kako A ima 10 elemenata, moguće su samo sljedeće kombinacije: $(n_x, n_y) \in \{(9,1),(8,2),(7,3),(6,4),(5,5)\}$. Najveću sumu kvadrata ima par $(9,1)$, pa ρ može imati najviše $9^2 + 1^2 = 82$ elementa.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 24. studenog 2017.

Zadatak 5.

(a) Definirajte sljedeće pojmove: relacija parcijalnog uređaja, supremum.

Rješenje:
Relacija parcijalnog uređaja: Neka je ρ relacija na skupu A. Kažemo da je ρ relacija parcijalnog uređaja ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Supremum: Neka je ρ relacija parcijalnog uređaja na skupu A, te neka je $B \subseteq A$. Za element $a \in A$ kažemo da je gornja međa skupa B ako za sve $b \in B$ vrijedi $b \,\rho\, a$. Element $s \in A$ je supremum skupa B ako vrijedi: (1) s je gornja međa skupa B, te (2) za svaku gornju među a skupa B vrijedi $s \,\rho\, a$.

(b) Koristeći samo Peanove aksiome, definiciju zbrajanja i uređaja na $\mathbb{N}$, dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 \leq n$.

Rješenje: Po definiciji, za $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi $a \leq b$ ako je $a = b$ ili postoji $c \in \mathbb{N}$ takav da je $a + c = b$. Koristeći tu definiciju, te definiciju zbrajanja (konkretno: $1 + 1 = s(1)$, te $1 + s(c) = s(1 + c)$) pokažimo indukcijom da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 \leq n$.

(baza) $n = 1$. Po definiciji $\leq$ odmah slijedi $1 \leq n$.

(korak) Pretpostavimo da za neko $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 \leq n$, te pokažimo da tada također vrijedi $1 \leq s(n)$. Po definiciji $\leq$, $1 \leq n$ vodi na dvije mogućnosti. Prva mogućnost je da vrijedi $1 = n$. Tada $s(1) = s(n)$, pa po definiciji zbrajanja imamo $1 + 1 = s(n)$, iz čega po definiciji $\leq$ slijedi $1 \leq s(n)$. Druga mogućnost je da postoji $c \in \mathbb{N}$ takav da je $1 + c = n$. Tada $s(1 + c) = s(n)$, pa po definiciji zbrajanja imamo $1 + s(c) = s(n)$, pa ponovno po definiciji $\leq$ slijedi $1 \leq s(n)$.

(c) Neka je S skup, te neka je na $\mathcal{P}(S)$ definirana relacija parcijalnog uređaja $\subseteq$ ("biti podskup"). Nadalje, neka je $A_n \in \mathcal{P}(S)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Označimo

$$\mathcal{F} := \{A_n \;:\; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(S).$$

Čemu je jednako $\sup \mathcal{F}$? Dokažite!

Rješenje: Supremum ćemo lako odrediti kada vidimo što mora zadovoljavati gornja međa. Neka je X neka gornja međa skupa $\mathcal{F}$. Kako je zadana relacija uređaja $\subseteq$, to znači $(\forall A \in \mathcal{F})\ A \subseteq X$, odnosno, $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \subseteq X$. Vidimo da $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ zadovoljava ovo svojstvo, tj. da je to jedna gornja međa. Pokažimo i da je skup U supremum. Neka je X bilo koja gornja međa skupa $\mathcal{F}$. Trebamo pokazati da vrijedi $U \subseteq X$. Neka je $a \in U$ proizvoljan. Tada, po definiciji unije, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a \in A_n$. No kako je X gornja međa, vrijedi $A_n \subseteq X$, pa onda i $a \in X$. Ovim smo pokazali da vrijedi $U \subseteq X$, pa je $\sup \mathcal{F} = U = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 24. studenog 2017.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. Ispitajte odnos skupova:

$$(A \cap B) \cup (B \setminus C) \qquad \text{i} \qquad B \setminus (A \triangle C).$$

Rješenje: Neka je $x \in B \setminus (A \triangle C)$. Tada imamo $x \in B$ i $x \notin A \triangle C = (A \cup C) \setminus (A \cap C)$. Dakle $x \in B$ i vrijedi $x \notin A \cup C$ ili $x \in A \cap C$. Imamo dva slučaja:

(1) $x \notin A \cup C$
Tada $x \notin A$ i $x \notin C$, pa zbog $x \in B$ i $x \notin C$ imamo $x \in B \setminus C$, pa zaključujemo $x \in (A \cap B) \cup (B \setminus C)$.

(2) $x \in A \cap C$
Tada $x \in A$ i $x \in C$, pa zbog $x \in B$ i $x \in A$ slijedi $x \in A \cap B$, pa vidimo da je opet $x \in (A \cap B) \cup (B \setminus C)$.

Dokazali smo

$$B \setminus (A \triangle C) \subseteq (A \cap B) \cup (B \setminus C).$$

Obratna inkluzija ne vrijedi. Uzmimo primjerice

$$A = B = \{1\},\ C = \emptyset.$$

Tada je

$$B \setminus (A \triangle C) = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset,$$
$$(A \cap B) \cup (B \setminus C) = \{1\} \cup (\{1\} \setminus \emptyset) = \{1\}.$$

Kako $\{1\} \not\subseteq \emptyset$, vidimo da

$$(A \cap B) \cup (B \setminus C) \not\subseteq B \setminus (A \triangle C).$$

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 24. studenog 2017.

Zadatak 2. Na partitivnom skupu skupa cijelih brojeva $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ zadana je relacija τ defnirana s

$$A \tau B \ \Leftrightarrow \ (\exists n \in \mathbb{Z})(A = B \cup \{n\}).$$

(a) Odredite je li relacija τ refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna. Sve svoje tvrdnje dokažite.

(b) Može li se τ nadopuniti do relacije parcijalnog uređaja? Obrazložite.

Rješenje:

(a)
- refleksivnost
  τ nije refleksivna jer je $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, no za niti jedan $n \in \mathbb{Z}$ ne vrijedi $\emptyset = \emptyset \cup \{n\}$, pa $(\emptyset, \emptyset) \notin \tau$.
- simetričnost
  τ nije simetrična jer je primjerice $(\{1\}, \emptyset) \in \tau$, ali $(\emptyset, \{1\}) \notin \tau$.
- antisimetričnost
  Pretpostavimo da vrijedi $(A, B), (B, A) \in \tau$, za neke $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Tada postoje $n, m \in \mathbb{Z}$ takvi da je $A = B \cup \{n\}$ i $B = A \cup \{m\}$. Iz ovoga slijedi redom $B \subseteq A$ i $A \subseteq B$, pa je $A = B$. Dakle τ je antisimetrična.
- tranzitivnost
  τ nije tranzitivna jer imamo $(\{1,2\}, \{1\}), (\{1\}, \emptyset) \in \tau$, no $(\{1,2\}, \emptyset) \notin \tau$ (u suprotnom bi dvočlan skup $\{1, 2\}$ mogli prikazati kao prazan skup unija neki jednočlan skup, što je očito nemoguće).

(b) Ispitujemo postoji li relacija parcijalnog uređaja τ' takva da vrijedi $\tau \subseteq \tau'$. Uočimo da vrijedi implikacija

$$A \varrho B \ \Rightarrow \ A \supseteq B.$$

Dakle vidimo da je relacija τ sadržana u relaciji $\supseteq$, a znamo da je $\supseteq$ relacija parcijalnog uređaja. Dakle, odgovor na pitanje je da.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 24. studenog 2017.

Zadatak 3. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a > b$. Matematičkom indukcijom dokažite da za sve prirodne brojeve n veće od 1 vrijedi

$$a^n - b^n > n \cdot (a-b) \cdot b^{n-1}.$$

Rješenje: Baza indukcije: $n = 2$. Treba dokazati $a^2 - b^2 > 2 \cdot (a-b)b$. Budući je $a - b > 0$, dovoljeno je dokazati $a + b > 2b$, odnosno $a > b$, a to je ispunjeno po uvjetu zadatka.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj $n \geq 2$.

Korak indukcije: Po pretpostavci imamo:

$$a^n - b^n > n \cdot (a-b)b^{n-1}.$$

Ako tu nejednakost pomnožimo s $b > 0$, dobivamo

$$a^n \cdot b - b^{n+1} > n \cdot (a-b)b^n.$$

Dodamo li toj nejednakosti $(a-b)b^n$ s lijeve i desne strane, dobivamo

$$a^n \cdot b + ab^n - 2b^{n+1} > (n+1) \cdot (a-b)b^n.$$

Sada je dovoljno dokazati da vrijedi

$$a^{n+1} - b^{n+1} > a^n \cdot b + ab^n - 2b^{n+1},$$

što je ekvivalentno nejednakosti:

$$a^{n+1} > a^n \cdot b + ab^n - b^{n+1},$$

odnosno

$$a^n(a-b) - b^n(a-b) > 0,$$

tj.

$$(a^n - b^n)(a-b) > 0,$$

a to vrijedi za sve pozitivne realne brojeve a i b takve da je $a > b$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 24. studenog 2017.

Zadatak 4.

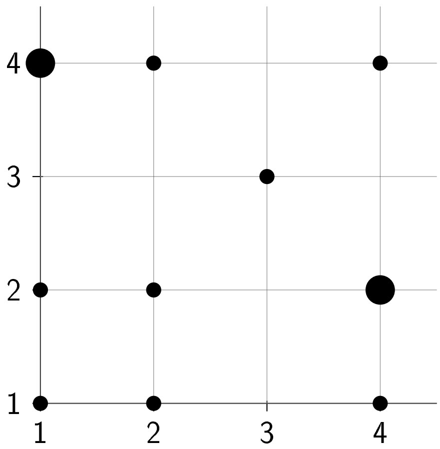
(a) Neka je $\sim$ relacija definirana na skupu A. Koristeći kvantifikatore i logičke veznike iskažite tvrdnju da je $\sim$ tranzitivna relacija.

Rješenje: $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)\ (x \sim y\ \wedge\ y \sim z)\ \Rightarrow\ x \sim z.$

Napišite negaciju gornje tvrdnje, tako da se ne pojavljuje logički veznik $\neg$ (smije se pojaviti $\notin$ ili $\not\sim$).

Rješenje: $(\exists x \in A)(\exists y \in A)(\exists z \in A)\ x \sim y\ \wedge\ y \sim z\ \wedge\ x \not\sim z.$

(b) Nadopunite relaciju $\rho \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$ na donjoj slici tako da ona postane relacija ekvivalencije, ali tako da ne sadrži baš sve uređene parove iz $\{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$.



Za relaciju koju ste nacrtali, odredite [1], [2], [3], [4].

Rješenje: Na slici su manjim krugovima označeni dodani uređeni parovi: zbog refleksivnosti dodajemo $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$; zbog simetričnosti $(4,1)$ i $(2,4)$; zbog tranzitivnosti još i $(1,2)$ i $(2,1)$.
Slijedi: $[1] = [2] = [4] = \{1,2,4\}$, $[3] = \{3\}$.

(c) Neka je $A = \{2,3,5,8\}$, te $\mathcal{F} = \{\{3\},\{2,5\},\{8\}\}$. Zakružite tvrdnje koje su istinite:

(1) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ (2) $\mathcal{F}$ je particija od A (3) $\mathcal{F}$ je particija od $\mathcal{P}(A)$

Rješenje: Istinite su tvrdnje (1) i (2).

(d) Neka je A skup koji ima 9 elemenata, a ρ relacija ekvivalencije na A takva da kvocijentni skup $A/_\rho$ ima točno 2 elementa. Koliko najmanje elemenata ima skup ρ?

Rješenje: Neka je $A/_\rho = \{[x],[y]\}$. Označimo sa n_x i n_y broj elemenata od $[x]$ i $[y]$, redom; možemo uzeti da je $n_x \geq n_y$. Svi elementi skupa $[x]$ su međusobno u relaciji, kao i svi elementi skupa $[y]$. Stoga ρ ima $n_x^2 + n_y^2$ elemenata. Kako A ima 9 elemenata, moguće su samo sljedeće kombinacije: $(n_x, n_y) \in \{(8,1),(7,2),(6,3),(5,4)\}$. Najmanju sumu kvadrata ima par $(5,4)$, pa ρ može imati najviše $5^2 + 4^2 = 41$ element.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 24. studenog 2017.

Zadatak 5.

(a) Definirajte sljedeće pojmove: relacija totalnog uređaja, infimum.

Rješenje:
Relacija totalnog uređaja: Neka je ρ relacija na skupu A. Kažemo da je ρ relacija totalnog uređaja ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, te vrijedi: $(\forall x \in A)(\forall y \in A)\ x\rho y\ \vee\ y\rho x$.

Infimum: Neka je ρ relacija parcijalnog uređaja na skupu A, te neka je $B \subseteq A$. Za element $a \in A$ kažemo da je donja međa skupa B ako za sve $b \in B$ vrijedi $a\ \rho\ b$. Element $i \in A$ je infimum skupa B ako vrijedi: (1) i je donja međa skupa B, te (2) za svaku donju među a skupa B vrijedi $a\ \rho\ i$.

(b) Koristeći samo Peanove aksiome, definiciju zbrajanja i uređaja na $\mathbb{N}$, dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 \leq n$.

Rješenje: Po definiciji, za $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi $a \leq b$ ako je $a = b$ ili postoji $c \in \mathbb{N}$ takav da je $a + c = b$. Koristeći tu definiciju, te definiciju zbrajanja (konkretno: $1 + 1 = s(1)$, te $1 + s(c) = s(1 + c)$) pokažimo indukcijom da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 \leq n$.

(baza) $n = 1$. Po definiciji $\leq$ odmah slijedi $1 \leq n$.

(korak) Pretpostavimo da za neko $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 \leq n$, te pokažimo da tada također vrijedi $1 \leq s(n)$. Po definiciji $\leq$, $1 \leq n$ vodi na dvije mogućnosti. Prva mogućnost je da vrijedi $1 = n$. Tada $s(1) = s(n)$, pa po definiciji zbrajanja imamo $1 + 1 = s(n)$, iz čega po definiciji $\leq$ slijedi $1 \leq s(n)$. Druga mogućnost je da postoji $c \in \mathbb{N}$ takav da je $1+c = n$. Tada $s(1+c) = s(n)$, pa po definiciji zbrajanja imamo $1 + s(c) = s(n)$, pa ponovno po definiciji $\leq$ slijedi $1 \leq s(n)$.

(c) Neka je S skup, te neka je na $\mathcal{P}(S)$ definirana relacija parcijalnog uređaja $\subseteq$ ("biti podskup"). Nadalje, neka je $A_n \in \mathcal{P}(S)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Označimo

$$\mathcal{F} := \{A_n\ :\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(S).$$

Čemu je jednako $\inf \mathcal{F}$? Dokažite!

Rješenje: Infimum ćemo lako odrediti kada vidimo što mora zadovoljavati donja međa. Neka je X neka donja međa skupa $\mathcal{F}$. Kako je zadana relacija uređaja $\subseteq$, to znači $(\forall A \in \mathcal{F})\ X \subseteq A$, odnosno, $(\forall n \in \mathbb{N})\ X \subseteq A_n$. Vidimo da $P := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ zadovoljava ovo svojstvo, tj. da je to jedna donja međa. Pokažimo i da je skup P infimum. Neka je X bilo koja donja međa skupa $\mathcal{F}$. Trebamo pokazati da vrijedi $X \subseteq P$. Neka je $a \in X$ proizvoljan. Kako je X donja međa, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $X \subseteq A_n$, pa onda za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a \in A_n$. No po definiciji presjeka, to znači $a \in P$. Ovim smo pokazali da vrijedi $X \subseteq P$, pa je $\inf \mathcal{F} = P = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite!