

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 12. veljače 2016.

Zadatak 1.

- (a) Definirajte sljedeće pojmove: relacija ekvivalencije, klasa ekvivalencije, kvocijentni skup, particija skupa.
- (b) Neka je $P_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + c\}$. Dokažite da je skup $\mathcal{P} = \{P_c : c \in \mathbb{R}\}$ particija skupa \mathbb{R}^2 . **Uputa:** Provjerite po definiciji particije svojstva skupa \mathcal{P} .
- (c) Da li postoji relacija ρ na \mathbb{R}^2 takva da vrijedi $\mathbb{R}^2/\rho = \mathcal{P}$? Ako da, precizno opišite relaciju ρ matematičkim simbolima.
- (d) Napišite iskaz Osnovnog teorema algebre. Obavezno odvojeno navedite što je pretpostavka teorema, a što tvrdnja!

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 12. veljače 2016.

Zadatak 2.

- (a) Napišite simbolima izjavu: "Kvadrat cijelog broja koji nije djeljiv ni s 2 ni s 3 daje ostatak 5 pri dijeljenju sa 6."
- (b) Napišite obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji zadane tvrdnje.
- (c) Odredite istinitost zadane i dobivenih tvrdnji i obrazložite odgovor.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 12. veljače 2016.

Zadatak 3.

- a) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \geq 1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \dots \cdot \frac{4n-1}{4n+1} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}.$$

- b) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$ postoje $x, y \in \mathbb{N}_0$ takvi da je

$$3x + 7y = n.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 12. veljače 2016.

Zadatak 4.

- a) Odredite sve cijele brojeve k takve da je $\frac{k^4+k^3-5k^2+k}{k^2+k-6}$ cijeli broj.
- b) Dokažite da je za svaki prirodni broj a broj

$$a^6 + a^{6^2} + \dots + a^{6^{27}}$$

djeljiv s 9.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 12. veljače 2016.

Zadatak 5.

- a) Odredite nepoznate koeficijente
- a, b, c
- te nultočke polinoma

$$f(x) = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c,$$

ukoliko je poznato da polinom ima jednu trostruku nultočku i dvije jednostruke, čisto imaginarne nultočke.

- b) Rastavite na parcijalne razlomke racionalnu funkciju:

$$f(x) = \frac{x + 5}{(x - 1)^2(x + 1)(x^2 + 4x + 8)^2}.$$

Napomena: Koeficijente u brojnicima ne treba računati.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 12. veljače 2016.

Zadatak 1.

- (a) Definirajte sljedeće pojmove: relacija ekvivalencije, klasa ekvivalencije, kvocijentni skup, particija skupa.
- (b) Neka je $P_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + c\}$. Dokažite da je skup $\mathcal{P} = \{P_c : c \in \mathbb{R}\}$ particija skupa \mathbb{R}^2 . **Uputa:** Provjerite po definiciji particije svojstva skupa \mathcal{P} .
- (c) Da li postoji relacija ρ na \mathbb{R}^2 takva da vrijedi $\mathbb{R}^2/\rho = \mathcal{P}$? Ako da, precizno opišite relaciju ρ matematičkim simbolima.
- (d) Napišite iskaz Osnovnog teorema algebre. Obavezno odvojeno navedite što je pretpostavka teorema, a što tvrdnja!

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 12. veljače 2016.

Zadatak 2.

- (a) Napišite simbolima izjavu: "Ako je suma dvaju cijelih brojeva paran broj, onda suma njihovih kvadrata daje ostatak 4 pri dijeljenju s 8".
- (b) Napišite obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji zadane tvrdnje.
- (c) Odredite istinitost zadane i dobivenih tvrdnji i obrazložite odgovor.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 12. veljače 2016.

Zadatak 3.

- a) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \geq 1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \sqrt{\frac{1}{n+3}}.$$

- b) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$ postoje $x, y \in \mathbb{N}_0$ takvi da je

$$3x + 5y = n.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 12. veljače 2016.

Zadatak 4.

- a) Odredite sve cijele brojeve k takve da je $\frac{k^4+2k^3-14k^2+2k+5}{k^2+2k-15}$ cijeli broj.
- b) Dokažite da je za svaki prirodni broj a broj

$$a^{20} + a^{20^2} + \dots + a^{20^{50}}$$

djeljiv s 25.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 12. veljače 2016.

Zadatak 5.

- a) Odredite nepoznate koeficijente
- a, b, c
- te nultočke polinoma

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + c,$$

ukoliko je poznato da polinom ima jednu trostruku nultočku i dvije jednostruke, čisto imaginarne nultočke.

- b) Rastavite na parcijalne razlomke racionalnu funkciju:

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{(x - 1)^3 x (x^2 + 3x + 5)^2}.$$

Napomena: Koeficijente u brojnicima ne treba računati.