JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2016.

Zadatak 1.

(a) Definirajte pojam mjere dvaju prirodnih brojeva.

(b) Precizno iskažite Bézoutov identitet za cijele brojeve, te pomoću njega dokažite sljedeću tvrdnju: "Neka je $p \in \mathbb{N}$ prost broj, te $a \in \mathbb{Z}$ broj koji nije djeljiv sa p. Tada postoji $b \in \mathbb{Z}$ takav da je $ab \equiv 1 \pmod p$."

(c) Neka je $p \in \mathbb{N}$ prost broj, te f polinom s cjelobrojnim koeficijentima takav da $f(x)$ nije djeljiv sa p ni za koji $x \in \mathbb{Z}$. Dokažite da postoji polinom g s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $f(x)g(x) \equiv 1 \pmod p$, za sve $x \in \mathbb{Z}$.
Uputa: koristite podzadatak (b).

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2016.

Zadatak 2. Odredite ostatak pri dijeljenju broja

$$2015^{\left(2017^{2018}\right)}$$

s 22.

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2016.

Zadatak 3. Odredite sve prirodne brojeve n koji su rješenja jednadžbe

$$\varphi(n) = 78,$$

pri čemu je $\varphi(n)$ broj elemenata skupa $\{1, 2, \cdots, n\}$ koji su relativno prosti s n.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2016.

Zadatak 4. Odredite koeficijente a, b i c te nultočke polinoma

$$f(x) = ax^5 + 3x^4 + bx^3 + 4x^2 + 3x + c,$$

s cjelobrojnim koeficijentima, ako je poznato da polinom f ima jednu cjelobrojnu trostruku nultočku.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2016.

Zadatak 5. Riješite sustav:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= 10 \\ x + y + z &= 4 \\ xy + yz + xz &= 2xyz + 1. \end{aligned}$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2016.

Zadatak 1.

(a) Definirajte pojam mjere dvaju prirodnih brojeva.

(b) Precizno iskažite Bézoutov identitet za cijele brojeve, te pomoću njega dokažite sljedeću tvrdnju: "Neka je $p \in \mathbb{N}$ prost broj, te $a \in \mathbb{Z}$ broj koji nije djeljiv sa p. Tada postoji $b \in \mathbb{Z}$ takav da je $ab \equiv 1 \pmod{p}$."

(c) Neka je $p \in \mathbb{N}$ prost broj, te f polinom s cjelobrojnim koeficijentima takav da $f(x)$ nije djeljiv sa p ni za koji $x \in \mathbb{Z}$. Dokažite da postoji polinom g s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $f(x)g(x) \equiv 1 \pmod{p}$, za sve $x \in \mathbb{Z}$.
Uputa: koristite podzadatak (b).

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2016.

Zadatak 2. Odredite ostatak pri dijeljenju broja

$$2008^{(2011^{2017})}$$

s 21.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2016.

Zadatak 3. Odredite sve prirodne brojeve n koji su rješenja jednadžbe

$$\varphi(n) = 102,$$

pri čemu je $\varphi(n)$ broj elemenata skupa $\{1, 2, \cdots, n\}$ koji su relativno prosti s n.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2016.

Zadatak 4. Odredite koeficijente a, b i c te nultočke polinoma

$$f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 - 4x^2 + 3x + c,$$

s cjelobrojnim koeficijentima, ako je poznato da polinom f ima jednu cjelobrojnu trostruku nultočku.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2016.

Zadatak 5. Riješite sustav:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= 6 \\ x + y + z &= 0 \\ xy + yz + xz &= -\frac{3}{2}xyz. \end{aligned}$$