JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2015.

Zadatak 1.

(a) Definirajte sljedeće pojmove: relacija ekvivalencije, kvocijentni skup.

(b) Neka je A neprazan skup, te $\sim$ i $\approx$ dvije relacije ekvivalencije na A. Definirajmo relaciju $\triangle$ ovako: za $x, y \in A$ je $x \triangle y$ ako i samo ako je $x \sim y$ i $x \approx y$. Dokažite sljedeće tvrdnje:

1. $\triangle$ je relacija ekvivalencije na A.
2. $P \in A/\triangle$ ako i samo ako postoje $Q \in A/\sim$ i $R \in A/\approx$ takvi da je $P = Q \cap R$.

(c) Koristeći samo Peanove aksiome, svojstva zbrajanja na $\mathbb{N}$ i definiciju množenja na $\mathbb{N}$, dokažite da za sve $m, n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi: $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$.

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2015.

Zadatak 2.

(a) Neka $P(x)$ znači "x je prost broj". Koja od navedenih formula predstavlja sud: "Produkt dvaju prostih prirodnih brojeva je neparan prirodan broj"? Zaokružite točan odgovor.

1. $(\forall n, m \in \mathbb{N})(2 \nmid nm \implies (P(n) \quad \& \quad P(m)))$
2. $(\exists n, m \in \mathbb{N})((P(n) \quad \& \quad P(m)) \implies 2 \nmid nm)$
3. $(\forall n, m \in \mathbb{N})((P(n) \quad \& \quad P(m)) \implies ((\exists k \in \mathbb{N})(nm = 2k - 1)))$
4. $(\exists n, m \in \mathbb{N})(P(n) \quad \& \quad P(m) \quad \& \quad 2 \nmid nm)$

(b) Napišite obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji zadane tvrdnje.

(c) Odredite istinitost zadane i dobivenih tvrdnji i obrazložite odgovor.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2015.

Zadatak 3. Na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zadana je relacija ρ na sljedeći način:

$$(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow (2 \mid (a - c) \text{ ili } 3 \mid (b - d)).$$

a) Ispitajte je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Je li ρ relacija parcijalnog uređaja?

b) Je li ρ relacija ekvivalencije? Ako nije, odredite sve načine na koje se može nadopuniti do relacije ekvivalencije.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2015.

Zadatak 4. Neka su A, B i C proizvoljni podskupovi univerzalnog skupa $\mathfrak{U}$. Ispitajte odnos skupova:

$$S = (A \setminus (B \setminus C)) \cup (C^c \cap (A^c \setminus B)) \cup B \quad \text{i} \quad T = (A \cup B) \setminus (C \cap A^c).$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2015.

Zadatak 5.

a) Matematičkom indukcijom dokažite

$$3^{2015} > 2^{2015} + 3 \cdot 2015.$$

b) Neka je x realan broj takav da je $x + \frac{1}{x}$ cijeli broj. Matematičkom indukcijom dokažite da je $x^n + \frac{1}{x^n}$ cijeli broj za svaki prirodan broj n.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2015.

Zadatak 1.

(a) Definirajte sljedeće pojmove: relacija ekvivalencije, klasa ekvivalencije.

(b) Neka je A neprazan skup, te $\sim$ i $\approx$ dvije relacije ekvivalencije na A. Definirajmo relaciju $\triangle$ ovako: za $x, y \in A$ je $x \triangle y$ ako i samo ako je $x \sim y$ i $x \approx y$. Dokažite sljedeće tvrdnje:

1. $\triangle$ je relacija ekvivalencije na A.
2. $P \in A/_{\triangle}$ ako i samo ako postoje $Q \in A/_{\sim}$ i $R \in A/_{\approx}$ takvi da je $P = Q \cap R$.

(c) Koristeći samo Peanove aksiome, svojstva zbrajanja na $\mathbb{N}$ i definiciju množenja na $\mathbb{N}$, dokažite da za sve $m, n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi: $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$.

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2015.

Zadatak 2.

(a) Neka $P(x)$ znači "x je prost broj". Koja od navedenih formula predstavlja sud: "Ako je suma dvaju prirodnih brojeva neparan prirodan broj, onda niti jedan od ta dva broja nije prost"? Zaokružite točan odgovor.

1. $(\forall n, m \in \mathbb{N})(\neg P(n) \quad \& \quad \neg P(m) \quad \& \quad 2 \nmid (n+m))$
2. $(\exists n, m \in \mathbb{N})(2 \nmid (n+m) \implies (\neg P(n) \quad \& \quad \neg P(m)))$
3. $(\forall n, m \in \mathbb{N})(2 \nmid (n+m) \implies \neg(P(n) \quad \& \quad P(m)))$
4. $(\forall n, m \in \mathbb{N})(((\exists k \in \mathbb{N})(n+m = 2k-1)) \implies (\neg P(n) \quad \& \quad \neg P(m)))$

(b) Napišite obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji zadane tvrdnje.

(c) Odredite istinitost zadane i dobivenih tvrdnji i obrazložite odgovor.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2015.

Zadatak 3. Na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zadana je relacija ρ na sljedeći način:

$$(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow (3 \mid (a - c) \text{ ili } 4 \mid (b - d)).$$

a) Ispitajte je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Je li ρ relacija parcijalnog uređaja?

b) Je li ρ relacija ekvivalencije? Ako nije, odredite sve načine na koje se može nadopuniti do relacije ekvivalencije.

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2015.

Zadatak 4. Neka su A, B i C proizvoljni podskupovi univerzalnog skupa $\mathfrak{U}$. Ispitajte odnos skupova:

$$S = (B \setminus (C \setminus A)) \cup (A^c \cap (B^c \setminus C)) \cup C \quad \text{i} \quad T = (B \cup C) \setminus (A \cap B^c).$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2015.

Zadatak 5.

a) Matematičkom indukcijom dokažite

$$4^{2015} > 3^{2015} + 4 \cdot 2015.$$

b) Neka je x realan broj takav da je $x + \frac{1}{x}$ cijeli broj. Matematičkom indukcijom dokažite da je $x^n + \frac{1}{x^n}$ cijeli broj za svaki prirodan broj n.