JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 17. studenog 2014.

Zadatak 1.

(a) Definirajte pojmove: "relacija parcijalnog uređaja" i "relacija totalnog uređaja"; pri tome precizno, matematičkim simbolima definirajte sva svojstva koja te relacije moraju imati. Navedite primjer relacije koja je parcijalni, ali nije totalni uređaj.

(b) Na skupu $\mathbb{N}_0$ definirajte relaciju $\leq$. Dokažite da je ona relacija parcijalnog uređaja.

(c) Na skupu $\mathbb{N}$ definiramo operaciju potenciranja ovako: za $n, k \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} n^1 &:= n, \\ n^{s(k)} &:= n^k \cdot n. \end{aligned}$$

Ovdje smo sa $s(k)$ označili sljedbenika prirodnog broja k.
Dokažite da za sve prirodne brojeve $n, p, q \in \mathbb{N}$ vrijedi $n^{p+q} = n^p \cdot n^q$.

Napomena: U podzadacima (b) i (c) možete pretpostaviti da su na $\mathbb{N}$ već definirane operacije zbrajanja i množenja, te koristiti njihova svojstva poput asocijativnosti, komutativnosti i distributivnosti. Sve svoje tvrdnje **detaljno obrazložite i dokažite**.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 17. studenog 2014.

Zadatak 2. (7 bodova) Neka predikat $P(x)$ znači "x je prost broj". Zadana je tvrdnja: "Postoji prirodan broj manji od svakog prostog broja manjeg od 100."

(a) Napišite zadanu tvrdnju simbolima.

(b) Napišite obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji zadane tvrdnje.

(c) Odredite istinitost zadane i dobivenih tvrdnji i obrazložite odgovor.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 17. studenog 2014.

Zadatak 3. (7 bodova) Na skupu cijelih brojeva zadana je relacija ρ na sljedeći način: Broj a je u relaciji s brojem b ako i samo ako su ili oba broja a i b manja ili jednaka nula ili su oba broja pozitivna i jednaka ili je a pozitivan, a b manji ili jednak od nule, tj.

$$a\rho b \Leftrightarrow (a \leq 0 \wedge b \leq 0) \vee (a > 0 \wedge a = b) \vee (a > 0 \wedge b \leq 0).$$

Ispitajte je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Svoje odgovore obrazložite.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 17. studenog 2014.

Zadatak 4. (7 bodova) Neka su A, B i C proizvoljni podskupovi univerzalnog skupa $\mathfrak{U}$. Ispitajte odnos skupova:

$$S = (A \cup C^c) \triangle (B \cup C^c) \quad \text{i} \quad T = (A \cap B^c) \cup C^c \cup (B \setminus A).$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 17. studenog 2014.

Zadatak 5.

(a) (3 boda) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

(b) (4 boda) Matematičkom indukcijom dokažite da je $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ paran prirodan broj za svaki prirodni broj n.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 17. studenog 2014.

Zadatak 1.

(a) Definirajte pojmove: "relacija parcijalnog uređaja" i "relacija totalnog uređaja"; pri tome precizno, matematičkim simbolima definirajte sva svojstva koja te relacije moraju imati. Navedite primjer relacije koja je parcijalni, ali nije totalni uređaj.

(b) Na skupu $\mathbb{N}_0$ definirajte relaciju $\leq$. Dokažite da je ona relacija parcijalnog uređaja.

(c) Na skupu $\mathbb{N}$ definiramo operaciju potenciranja ovako: za $n, k \in \mathbb{N}$ je

$$n^1 := n,$$
$$n^{s(k)} := n^k \cdot n.$$

Ovdje smo sa $s(k)$ označili sljedbenika prirodnog broja k.
Dokažite da za sve prirodne brojeve $n, p, q \in \mathbb{N}$ vrijedi $n^{p+q} = n^p \cdot n^q$.

Napomena: U podzadacima (b) i (c) možete pretpostaviti da su na $\mathbb{N}$ već definirane operacije zbrajanja i množenja, te koristiti njihova svojstva poput asocijativnosti, komutativnosti i distributivnosti. Sve svoje tvrdnje **detaljno obrazložite i dokažite**.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 17. studenog 2014.

Zadatak 2. (7 bodova) Neka predikat $P(x)$ znači "x je prost broj". Zadana je tvrdnja: "Svaki prirodan broj je veći od svakog prostog broja koji je manji od 50."

(a) Napišite zadanu tvrdnju simbolima.

(b) Napišite obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji zadane tvrdnje.

(c) Odredite istinitost zadane i dobivenih tvrdnji i obrazložite odgovor.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 17. studenog 2014.

Zadatak 3. (7 bodova) Na skupu cijelih brojeva zadana je relacija ρ na sljedeći način: Broj a je u relaciji s brojem b ako i samo ako su ili oba parna ili su oba neparna i jednaka ili je a neparan, a b paran, tj.

$$a\rho b \Leftrightarrow (2 \mid a \wedge 2 \mid b) \vee (2 \nmid a \wedge a = b) \vee (2 \nmid a \wedge 2 \mid b).$$

Ispitajte je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Svoje odgovore obrazložite.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 17. studenog 2014.

Zadatak 4. (7 bodova) Neka su A, B i C proizvoljni podskupovi univerzalnog skupa $\mathfrak{U}$. Ispitajte odnos skupova:

$$S = (A^c \cup C) \triangle ((B \setminus A) \cup C) \quad \text{i} \quad T = (A^c \triangle (B \setminus A)) \cup C.$$

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 17. studenog 2014.

Zadatak 5.

(a) (3 boda) Neka je x pozitivan realan broj. Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

(b) (4 boda) Matematičkom indukcijom dokažite da je $(2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n$ paran prirodan broj za svaki prirodni broj n.