Elementarna matematika 1 - drugi kolokvij, 13.1.2012.

1. **(4 boda)** Definirajte pojmove *surjekcija* i *kompozicija funkcija*. Dokažite: ako je kompozicija $g \circ f$ surjekcija, onda je g surjekcija. Primjerom pokažite da $g \circ f$ može biti surjekcija, a da pritom f nije surjekcija.

2. **(4 boda)** Definirajte najveću zajedničku mjeru $M(a,b)$ prirodnih brojeva $a, b \in \mathbb{N}$. Dokažite: ako je $r \in \mathbb{N}$ ostatak pri dijeljenju a s b, onda $M(a,b)$ dijeli r.

3. **(4 boda)** Odredite sve cijele brojeve k takve da je $\frac{k^2+k-6}{k+5}$ cijeli broj.

4. **(5 bodova)** Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju identitet

$$(p'(x) + p''(x))^2 = p(2x) + p'(2x) - p(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. **(4 boda)** Iskažite teorem o racionalnim nultočkama polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Koristeći taj teorem dokažite da je $\sqrt{1+\sqrt[3]{2}}$ iracionalan broj.

6. **(5 bodova)** Odredite realan broj a ako je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{101} - x^{100} - (a^2 - a)x^{99} - (a-1)x + 3a$ s polinomom $g(x) = x^2 - (a-1)x - a$ jednak $r(x) = 3x - 5a$.

7. **(4 boda)** Neka je $f(x)$ prava racionalna funkcija s nazivnikom $(x^2+1)(x^2-2x+1)$. Zapišite oblik rastava na parcijalne razlomke funkcije $f(x)$ nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$.

8. **(5 bodova)** Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 &= 3 \\
x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\
\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} &= -3.
\end{aligned}$$

Elementarna matematika 1 - drugi kolokvij, 13.1.2012.

1. (4 boda) Definirajte pojmove *injekcija* i *kompozicija funkcija.* Dokažite: ako je kompozicija $g \circ f$ injekcija, onda je f injekcija. Primjerom pokažite da $g \circ f$ može biti injekcija, a da pritom g nije injekcija.

2. (4 boda) Definirajte najveću zajedničku mjeru $M(f, g)$ polinoma $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Dokažite: ako je $r \in \mathbb{R}[x]$ ostatak pri dijeljenju f s g, onda $M(f, g)$ dijeli r.

3. (4 boda) Odredite sve cijele brojeve k takve da je $\frac{k^2+k-12}{k+2}$ cijeli broj.

4. (5 bodova) Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju identitet

$$2p(2x) \cdot p''(p'(x)) = (p'(2x))^2 - (p'(0))^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. (4 boda) Iskažite teorem o racionalnim nultočkama polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Koristeći taj teorem dokažite da je $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$ iracionalan broj.

6. (5 bodova) Ako je $\ell = 2012^3 + 3^{2012}$, odredite zadnju znamenku broja $\ell^{\ell+1}$.

7. (4 boda) Neka je $f(x)$ prava racionalna funkcija s nazivnikom $(x^2-1)(x^2-2x+2)$. Zapišite oblik rastava na parcijalne razlomke funkcije $f(x)$ nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$.

8. (5 bodova) Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} &= 6 \\ x^2y^2z + x^2yz^2 + xy^2z^2 &= 32 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Elementarna matematika 1 - drugi kolokvij, 13.1.2012.

1. **(4 boda)** Definirajte pojmove *surjekcija* i *kompozicija funkcija*. Dokažite: ako su f i g surjekcije, onda je kompozicija $g \circ f$ surjekcija. Primjerima pokažite da $g \circ f$ ne mora biti surjekcija ako je samo f surjekcija, odnosno ako je samo g surjekcija.

2. **(4 boda)** Definirajte najveću zajedničku mjeru $M(a,b)$ prirodnih brojeva $a, b \in \mathbb{N}$. Dokažite: ako je $r \in \mathbb{N}$ ostatak pri dijeljenju a s b, onda $M(a,b)$ dijeli r.

3. **(4 boda)** Odredite sve cijele brojeve k takve da je $\frac{k^2+4k-12}{k+3}$ cijeli broj.

4. **(5 bodova)** Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju identitet
$$p(p'(x)) = p(4x) + p'(2x) + p''(p(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. **(4 boda)** Iskažite teorem o racionalnim nultočkama polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Koristeći taj teorem dokažite da je $\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}$ iracionalan broj.

6. **(5 bodova)** Odredite realan broj a ako je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{99} - (2a+1)x^{98} + (a^2+a)x^{97} + 3ax + 2a$ s polinomom $g(x) = x^2 - (a+1)x + a$ jednak $r(x) = 2ax - 1$.

7. **(4 boda)** Neka je $f(x)$ prava racionalna funkcija s nazivnikom $(x^2+4)(x^2+4x+4)$. Zapišite oblik rastava na parcijalne razlomke funkcije $f(x)$ nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$.

8. **(5 bodova)** Riješite sustav jednadžbi:
$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3+x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2 &= 24 \\ x+y+z &= xyz+2 \\ \frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz} &= 2. \end{aligned}$$

Elementarna matematika 1 - drugi kolokvij, 13.1.2012.

1. (4 boda) Definirajte pojmove *injekcija* i *kompozicija funkcija.* Dokažite: ako su f i g injekcije, onda je kompozicija $g \circ f$ injekcija. Primjerima pokažite da $g \circ f$ ne mora biti injekcija ako je samo f injekcija, odnosno ako je samo g injekcija.

2. (4 boda) Definirajte najveću zajedničku mjeru $M(f,g)$ polinoma $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Dokažite: ako je $r \in \mathbb{R}[x]$ ostatak pri dijeljenju f s g, onda $M(f,g)$ dijeli r.

3. (4 boda) Odredite sve cijele brojeve k takve da je $\frac{k^2+k-6}{k+4}$ cijeli broj.

4. (5 bodova) Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju identitet

$$p'(p(x)) = p(2x) + p'(x) + 3p(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. (4 boda) Iskažite teorem o racionalnim nultočkama polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Koristeći taj teorem dokažite da je $\sqrt[3]{3+\sqrt{7}}$ iracionalan broj.

6. (5 bodova) Ako je $\ell = 2012^7 + 7^{2012}$, odredite zadnju znamenku broja ℓ^ℓ.

7. (4 boda) Neka je $f(x)$ prava racionalna funkcija s nazivnikom $(x^2-4)(x^2-4x+5)$. Zapišite oblik rastava na parcijalne razlomke funkcije $f(x)$ nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$.

8. (5 bodova) Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} &= -3 \\
xy + xz + yz + 2xyz &= 1 \\
\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$