

Elementarna matematika 1 - prvi kolokvij, 4.11.2011.

- (4 boda)** Neka su A, B i C sudovne varijable. S pomoću tablica istinitosti provjerite jesu li sudovi $((A \& B) \vee (B \Rightarrow C))$ i $((B \Rightarrow A) \vee (\neg B \Leftrightarrow \neg C))$ semantički jednaki.
- (5 bodova)**
 - Definirajte pojmove *prost broj* i *složen broj*.
 - Dokažite matematičkom indukcijom da se svaki prirodni broj veći od 1 može prikazati kao umnožak od jednog ili više prostih brojeva.
- (4 boda)**
 - Zapišite simbolima sud: "Svaki realni broj koji zadovoljava jednadžbu $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ je pozitivan".
 - Napišite negaciju suda pod (a) riječima i simbolima.
- (5 bodova)** Matematičkom indukcijom dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj $(-2)^{2n-1} + (-3)^{n+1}$ djeljiv sa 7.
- (4 boda)**
 - Definirajte podskup skupa A i jednakost skupova A i B .
 - Za $S = \{1, 2\}$ napišite dvije različite particije partitivnog skupa $\mathcal{P}(S)$.
- (5 bodova)** Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos skupova $(A \cap B) \setminus (A \setminus C)$ i $(A \cap C) \cup (B \setminus C)$. Dokažite inkluziju koja vrijedi i nađite protuprimjer za onu koja ne vrijedi.
- (4 boda)** Na skupu $\{a, b, c, d, e\}$ dana je binarna relacija $\rho = \{(a, a), (a, d), (b, b), (b, d), (b, e), (c, c), (d, a), (d, b), (d, d), (e, a), (e, b), (e, e)\}$. Provjerite svojstva relacije ρ (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost). Obrazložite svoje tvrdnje!
- (4 boda)** Definirajte relaciju djeljivosti na skupu \mathbb{N} i dokažite da je relacija parcijalnog uređaja.

Elementarna matematika 1 - prvi kolokvij, 4.11.2011.

1. (4 boda) Neka su A, B i C sudovne varijable. S pomoću tablica istinitosti provjerite jesu li sudovi $((A \vee B) \& (B \Leftrightarrow C))$ i $((B \Leftrightarrow \neg A) \& (C \Rightarrow A))$ semantički jednaki.

2. (5 bodova)

(a) Definirajte binomni koeficijent $\binom{n}{i}$.

(b) Dokažite matematičkom indukcijom da za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i.$$

3. (4 boda)

(a) Zapišite simbolima sud: “Ako je prirodan broj m paran i prirodan broj n djeljiv s 3, onda je njihov produkt $m \cdot n$ djeljiv sa 6”.

(b) Napišite obrat po kontrapoziciji suda pod (a) riječima i simbolima.

4. (5 bodova) Matematičkom indukcijom dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj $3^{2n-1} - (-4)^{n+1}$ djeljiv s 13.

5. (4 boda)

(a) Definirajte partitivni skup od S i pojam particije skupa S .

(b) Za skupove $A = [1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ i $B = [2, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$ skicirajte u koordinatnoj ravnini skup $(A \times B) \cap (B \times A)$.

6. (5 bodova) Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos skupova $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$ i $(B \setminus C) \cup (B \setminus A)$. Dokažite inkluziju koja vrijedi i nađite protuprimjer za onu koja ne vrijedi.

7. (4 boda) Na skupu $\{i, j, k, l, m, n\}$ dana je binarna relacija $\rho = \{(i, i), (i, j), (j, j), (k, i), (k, j), (k, k), (k, l), (l, i), (l, l), (l, m), (m, i), (m, j), (m, m)\}$. Ispitajte svojstva relacije ρ (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost). Obrazložite svoje tvrdnje!

8. (4 boda) Definirajte relaciju \sim na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s pomoću koje smo definirali cijele brojeve i dokažite da je relacija ekvivalencije.

Elementarna matematika 1 - prvi kolokvij, 4.11.2011.

- (4 boda)** Neka su A, B i C sudovne varijable. S pomoću tablica istinitosti provjerite jesu li sudovi $((C \Rightarrow B) \vee (\neg C \Leftrightarrow \neg A))$ i $((C \Rightarrow A) \vee (C \& B))$ semantički jednaki.
- (5 bodova)**
 - Definirajte pojmove *prost broj* i *složen broj*.
 - Dokažite matematičkom indukcijom da se svaki prirodni broj veći od 1 može prikazati kao umnožak od jednog ili više prostih brojeva.
- (4 boda)**
 - Zapišite simbolima sud: “Ako realni brojevi x i y zadovoljavaju nejednakost $x^2 + y^2 < 1$, onda su oba manji od 1”.
 - Napišite obrat suda pod (a) riječima i simbolima.
- (5 bodova)** Matematičkom indukcijom dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj $4^{2n-1} - (-5)^{n+1}$ djeljiv s 21.
- (4 boda)**
 - Definirajte skupovnu razliku i simetričnu razliku skupova A i B .
 - Za skupove $A = \{1, 2\}$ i $B = \{3, 4\}$ napišite dvije različite particije Kartezijeva produkta $A \times B$.
- (5 bodova)** Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos skupova $(A \setminus C) \cup (B \cap C)$ i $(A \cap B) \setminus (B \setminus C)$. Dokažite inkluziju koja vrijedi i nađite protuprimjer za onu koja ne vrijedi.
- (4 boda)** Na skupu $\{a, b, c, d, e, f\}$ dana je binarna relacija $\rho = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (c, a), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d), (e, e)\}$. Ispitajte svojstva relacije ρ (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost). Obrazložite svoje tvrdnje!
- (4 boda)** Definirajte relaciju kongruencije modulo n na skupu \mathbb{Z} i dokažite da je relacija ekvivalencije.

Elementarna matematika 1 - prvi kolokvij, 4.11.2011.

1. (4 boda) Neka su A, B i C sudovne varijable. S pomoću tablica istinitosti provjerite jesu li sudovi $((A \Rightarrow B) \& (C \Leftrightarrow \neg B))$ i $((C \vee B) \& (A \Leftrightarrow C))$ semantički jednaki.

2. (5 bodova)

(a) Definirajte binomni koeficijent $\binom{n}{i}$.

(b) Dokažite matematičkom indukcijom da za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i.$$

3. (4 boda)

(a) Zapišite simbolima sud: “Svaki prirodni broj koji je djeljiv s 10, djeljiv je s 2 i s 5”.

(b) Napišite negaciju suda pod (a) riječima i simbolima.

4. (5 bodova) Matematičkom indukcijom dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj $6^{2n-1} + 5^{n+1}$ djeljiv s 31.

5. (4 boda)

(a) Definirajte uniju i presjek skupova A i B .

(b) Za skupove $A = [1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ i $B = [2, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$ skicirajte u koordinatnoj ravnini skup $(A \times B) \setminus (B \times A)$.

6. (5 bodova) Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos skupova $(C \setminus B) \cup (C \setminus A)$ i $(C \cup A) \setminus (B \cup A)$. Dokažite inkluziju koja vrijedi i nađite protuprimjer za onu koja ne vrijedi.

7. (4 boda) Na skupu $\{i, j, k, l, m\}$ dana je binarna relacija $\rho = \{(i, i), (j, k), (j, m), (k, j), (k, k), (k, l), (k, m), (l, k), (l, l), (l, m), (m, j), (m, k), (m, l), (m, m)\}$. Ispitajte svojstva relacije ρ (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost). Obrazložite svoje tvrdnje!

8. (4 boda) Definirajte relaciju \sim na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ s pomoću koje smo definirali racionalne brojeve i dokažite da je relacija ekvivalencije.