# Elementarna matematika 1 - prvi kolokvij, 29.10.2010.

Svaki zadatak vrijedi 4 boda, osim 3. zadatka koji vrijedi 3 boda.
Nije dozvoljena upotreba tablica ni kalkulatora.

**1.** Neka su $P$, $Q$ i $R$ sudovne varijable. S pomoću tablice istinitosti dokažite da je sud $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (\neg P \vee R)$ tautologija.

**2.** Zadan je sud $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})\ (n \cdot x = x^2) \Rightarrow (x = n \vee x = 1)$.

**(a)** Napišite negaciju zadanog suda.

**(b)** Napišite obrat po kontrapoziciji zadanog suda.

**(c)** Ispitajte je li zadani sud istinit. Obrazložite odgovor.

**3.** Zadani su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4\}$. Napišite elemente skupova $A \times B$, $B \times A$ i $(A \times B) \cap (B \times A)$.

**4.** Ispitajte odnos među skupovima $(A \triangle B) \setminus C$ i $A \triangle (B \setminus C)$. Dokažite inkluziju koja vrijedi, a za inkluziju koja ne vrijedi nađite protuprimjer.

**5.** Na skupu $S = \{2, 4, 8, 11, 14\}$ definiramo relaciju $\rho$ na sljedeći način: $x\ \rho\ y$ ako i samo ako $3 \mid x - y$. Ispitajte svojstva relacije $\rho$. Obrazložite svoje tvrdnje.

**6.** U ravnini je raspoređeno $n$ pravaca tako da nikoja dva nisu paralelna i nikoja tri ne prolaze istom točkom. Matematičkom indukcijom dokažite da se oni međusobno sijeku u $\frac{n(n-1)}{2}$ točaka.

**7.** Koristeći matematičku indukciju dokažite da vrijedi

$$3^{2010} - 2^{2010} > 2011^2.$$

**8.** Neka su $A$, $B$ i $S$ skupovi. Definirajte pojmove *particija od* $S$ i *Kartezijev produkt* $A \times B$. Napišite primjer particije skupa $S = \{1, 2, 3\}$ i nabrojite neka svojstva Kartezijeva produkta.

**9.** Definirajte relaciju ekvivalencije na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s pomoću koje smo definirali cijele brojeve. Koliko elemenata sadrži klasa ekvivalencije kojoj pripada par $(1, 2)$? Napišite bar tri elementa iz te klase. Koji cijeli broj predstavlja ta klasa?

# Elementarna matematika 1 - prvi kolokvij, 29.10.2010.

Svaki zadatak vrijedi 4 boda, osim 3. zadatka koji vrijedi 3 boda.
Nije dozvoljena upotreba tablica ni kalkulatora.

**1.** Neka su $P$, $Q$ i $R$ sudovne varijable. S pomoću tablice istinitosti dokažite da je sud $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$ tautologija.

**2.** Zadan je sud $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ (x^2 > y^4 \ \vee \ y^2 > x^4) \Rightarrow (x \geq y^2 \ \vee \ y \geq x^2)$.

**(a)** Napišite negaciju zadanog suda.

**(b)** Napišite obrat po kontrapoziciji zadanog suda.

**(c)** Ispitajte je li zadani sud istinit. Obrazložite odgovor.

**3.** Zadani su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$. Napišite elemente skupova $A \times B$, $B \times A$ i $(A \times B) \cap (B \times A)$.

**4.** Ispitajte odnos među skupovima $(A \triangle B) \cup C$ i $A \triangle (B \cup C)$. Dokažite inkluziju koja vrijedi, a za inkluziju koja ne vrijedi nađite protuprimjer.

**5.** Na skupu $S = \{2, 6, 7, 9, 11\}$ definiramo relaciju $\rho$ na sljedeći način: $x \, \rho \, y$ ako i samo ako $2 \mid x + y$. Ispitajte svojstva relacije $\rho$. Obrazložite svoje tvrdnje.

**6.** Na rukometnom turniru sudjeluje $n$ ekipa, a turnir je organiziran tako da sve ekipe igraju međsobno točno jednom. Matematičkom indukcijom dokažite da je ukupno odigrano $\frac{n(n-1)}{2}$ susreta.

**7.** Koristeći matematičku indukciju dokažite da vrijedi

$$2^{2 \cdot 2010+1} - 3^{2011} > 2010^2.$$

**8.** Neka je $S$ skup. Definirajte pojmove *binarna relacija na* $S$ i *relacija parcijalnog uređaja na* $S$. Napišite primjer relacije parcijalnog uređaja na skupu $S = \{1, 2, 3\}$ i primjer binarne relacije na tom skupu koja nije relacija parcijalnog uređaja.

**9.** Definirajte relaciju ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ s pomoću koje smo definirali racionalne brojeve. Koliko elemenata sadrži klasa ekvivalencije kojoj pripada par $(1, 2)$? Napišite bar tri elementa iz te klase. Koji racionalni broj predstavlja ta klasa?

# Elementarna matematika 1 - prvi kolokvij, 29.10.2010.

Svaki zadatak vrijedi 4 boda, osim 3. zadatka koji vrijedi 3 boda.
Nije dozvoljena upotreba tablica ni kalkulatora.

**1.** Neka su $P$, $Q$ i $R$ sudovne varijable. S pomoću tablice istinitosti dokažite da je sud $((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow R)$ tautologija.

**2.** Zadan je sud $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ (x^3 > y^3) \Rightarrow (x > y \wedge x^2 > y^2)$.

**(a)** Napišite negaciju zadanog suda.

**(b)** Napišite obrat po kontrapoziciji zadanog suda.

**(c)** Ispitajte je li zadani sud istinit. Obrazložite odgovor.

**3.** Zadani su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4\}$. Napišite elemente skupova $A \times B$, $B \times A$ i $(A \times B) \setminus (B \times A)$.

**4.** Ispitajte odnos među skupovima $(A \triangle B) \cap C$ i $A \triangle (B \cap C)$. Dokažite inkluziju koja vrijedi, a za inkluziju koja ne vrijedi nađite protuprimjer.

**5.** Na skupu $S = \{2, 5, 6, 9, 12\}$ definiramo relaciju $\rho$ na sljedeći način: $x\ \rho\ y$ ako i samo ako $3 \mid y + x$. Ispitajte svojstva relacije $\rho$. Obrazložite svoje tvrdnje.

**6.** Na šahovskom turniru sudjeluje $n$ igrača i svatko igra protiv svakog točno jednom. Matematičkom indukcijom dokažite da je ukupno odigrano $\frac{n(n-1)}{2}$ dvoboja.

**7.** Koristeći matematičku indukciju dokažite da vrijedi

$$3^{2010} > 2^{2011} + 2010^2 + 1.$$

**8.** Neka su $A$, $B$ i $S$ skupovi. Definirajte pojmove *partitivni skup od* $S$, *skupovna razlika* $A \setminus B$ i *simetrična razlika* $A \Delta B$. Napišite partitivni skup od $S = \{1, 2, 3\}$ i nabrojite neka svojstva skupovne razlike i simetrične razlike.

**9.** Definirajte relaciju ekvivalencije na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s pomoću koje smo definirali cijele brojeve. Koliko elemenata sadrži klasa ekvivalencije kojoj pripada par $(1, 1)$? Napišite bar tri elementa iz te klase. Koji cijeli broj predstavlja ta klasa?

# Elementarna matematika 1 - prvi kolokvij, 29.10.2010.

Svaki zadatak vrijedi 4 boda, osim 3. zadatka koji vrijedi 3 boda.
Nije dozvoljena upotreba tablica ni kalkulatora.

**1.** Neka su $P$, $Q$ i $R$ sudovne varijable. S pomoću tablice istinitosti dokažite da je sud $((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \wedge R))$ tautologija.

**2.** Zadan je sud $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\ n \mid m^3 \Rightarrow (n \mid m \ \vee \ m \mid n)$.

**(a)** Napišite negaciju zadanog suda.

**(b)** Napišite obrat po kontrapoziciji zadanog suda.

**(c)** Ispitajte je li zadani sud istinit. Obrazložite odgovor.

**3.** Zadani su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$. Napišite elemente skupova $A \times B$, $B \times A$ i $(A \times B) \setminus (B \times A)$.

**4.** Ispitajte odnos među skupovima $(A \cup B) \setminus C$ i $A \cup (B \setminus C)$. Dokažite inkluziju koja vrijedi, a za inkluziju koja ne vrijedi nađite protuprimjer.

**5.** Na skupu $S = \{1, 3, 4, 8, 11\}$ definiramo relaciju $\rho$ na sljedeći način: $x \, \rho \, y$ ako i samo ako $2 \mid y - x$. Ispitajte svojstva relacije $\rho$. Obrazložite svoje tvrdnje.

**6.** U nekoj prostoriji nalazi se $n$ ljudi i svatko se rukuje sa svakim točno jednom. Matematičkom indukcijom dokažite da je ukupno bilo $\frac{n(n-1)}{2}$ rukovanja.

**7.** Koristeći matematičku indukciju dokažite da vrijedi

$$3 \cdot 4^{2010} > 3^{2011} + 4 \cdot 2010^2.$$

**8.** Neka je $S$ skup i $x \in S$. Definirajte pojmove *relacija ekvivalencije na* $S$ i *klasa ekvivalencije* $[x]$. Napišite primjer relacije ekvivalencije na skupu $S = \{1, 2, 3\}$ i ispišite klase ekvivalencije $[1]$, $[2]$ i $[3]$ za tu relaciju ekvivalencije.

**9.** Definirajte relaciju ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ s pomoću koje smo definirali racionalne brojeve. Koliko elemenata sadrži klasa ekvivalencije kojoj pripada par $(1, 1)$? Napišite bar tri elementa iz te klase. Koji racionalni broj predstavlja ta klasa?