ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 – 1. kolokvij

IME I PREZIME   BROJ BODOVA

1. **(4 boda)** S pomoću tablice istinitosti dokažite semantičku jednakost složenih sudova $(\neg(P \Rightarrow Q)) \vee Q \equiv P \vee Q$. Pritom su P i Q sudovne varijable.

2. **(4 boda)** Zadan je sud $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ \ x \geq 2$ ı $y \geq 7 \Rightarrow x \cdot y \geq 14$.
   - **(a)** Iskažite zadani sud riječima.
   - **(b)** Napišite negaciju zadanog suda.
   - **(c)** Napišite obrat po kontrapoziciji zadanog suda.

3. **(3 boda)** Ako je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = [1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$, skicirajte u koordinatnoj ravnini skup $(A \times B) \cup (B \times A)$.

4. **(5 bodova)** Neka je U univerzalni skup i $A, B \subseteq U$.
   - **(a)** Definirajte uniju $A \cup B$.
   - **(b)** Dokažite da vrijedi $A^c \setminus B = (A \cup B)^c$.
   - **(c)** Nacrtajte Vennov dijagram i označite skup iz (b) dijela zadatka.

5. **(5 bodova)**
   - **(a)** Na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiramo relaciju ekvivalencije $\sim$ sa $(a, b) \sim (c, d)$ ako i samo ako je $a + d = b + c$. Dokažite da je ta relacija tranzitivna!
   - **(b)** Cijele brojeve možemo definirati kao klase ekvivalencije relacije iz prvog dijela zadatka. Definirajte zbrajanje takvih klasa $[(a, b)] + [(c, d)]$.
   - **(c)** Dokažite da definicija zbrajanja klasa ne ovisi o izboru predstavnika.

6. **(4 boda)** Na skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ zadana je relacija $\rho = \{(1, 1), (1, 4), (1, 5), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$. Nadopunite ρ do najmanje relacije ekvivalencije i napišite odgovarajuću particiju skupa S na klase ekvivalencije.

7. **(5 bodova)** Principom matematičke indukcije dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(2n - 1) = \frac{1}{6} n(n + 1)(4n - 1).$$

8. **(5 bodova)** Dokažite da je izraz $5^{n+2} + 7^n$ djeljiv sa 12 za sve neparne prirodne brojeve n.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 – 1. kolokvij

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

1. **(4 boda)** S pomoću tablice istinitosti dokažite semantičku jednakost složenih sudova $Q \wedge (P \Leftrightarrow \neg Q) \equiv \neg(Q \Rightarrow P)$. Pritom su P i Q sudovne varijable.

2. **(4 boda)** Zadan je sud $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^+)\ x < -2\ \&\ x^2 \leqslant y \Rightarrow x \geqslant -\sqrt{y}$.

   (a) Iskažite sud riječima.

   (b) Napišite obrat zadanog suda.

   (c) Napišite obrat po kontrapoziciji zadanog suda.

3. **(3 boda)** Ako je $A = \{3\} \cup [4, 6]$ i $B = [3, 5]$, skicirajte u koordinatnoj ravnini skup $(A \times B) \cup (B \times A)$.

4. **(5 bodova)** Neka je U univerzalni skup i $A, B \subseteq U$.

   (a) Definirajte skupovnu razliku $A \setminus B$.

   (b) Dokažite da vrijedi $B^c \setminus A^c = A \setminus B$.

   (c) Nacrtajte Vennov dijagram i označite skup iz (b) dijela zadatka.

5. **(5 bodova)**

   (a) Na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiramo relaciju ekvivalencije $\sim$ sa $(a, b) \sim (c, d)$ ako i samo ako je $a + d = b + c$. Dokažite da je ta relacija refleksivna i simetrična!

   (b) Cijele brojeve možemo definirati kao klase ekvivalencije relacije iz prvog dijela zadatka. Definirajte množenje takvih klasa $[(a, b)] \cdot [(c, d)]$.

   (c) Dokažite da definicija množenja klasa ne ovisi o izboru predstavnika.

6. **(4 boda)** Na skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ zadana je relacija $\rho = \{(1, 1),\ (1, 3),\ (2, 2),\ (3, 1),\ (3, 3),\ (5, 2), (5, 5)\}$. Nadopunite ρ do najmanje relacije ekvivalencije i napišite odgovarajuću particiju skupa S na klase ekvivalencije.

7. **(5 bodova)** Principom matematičke indukcije dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + \ldots + n(3n - 2) = \frac{1}{2}n(n + 1)(2n - 1).$$

8. **(5 bodova)** Dokažite da je izraz $3^{n+1} + 7^n$ djeljiv sa 8 za sve neparne prirodne brojeve n.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 – 1. kolokvij

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

1. **(4 boda)** S pomoću tablice istinitosti dokažite semantičku jednakost složenih sudova $(\neg P \wedge Q) \Rightarrow P \equiv P \vee \neg Q$. Pritom su P i Q sudovne varijable.

2. **(4 boda)** Zadan je sud $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{Z})\ \sin x > 0\ \&\ \sin x < 1 \Rightarrow x \in \langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\rangle \cup \langle \frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\rangle$.

   (a) Iskažite sud riječima.

   (b) Napišite negaciju zadanog suda.

   (c) Napišite obrat zadanog suda.

3. **(3 boda)** Ako je $A = \{2\} \cup [3,5]$ i $B = [1,4]$, skicirajte u koordinatnoj ravnini skup $(A \times B) \cap (B \times A)$.

4. **(5 bodova)** Neka je U univerzalni skup i $A, B \subseteq U$.

   (a) Definirajte komplement A^c.

   (b) Dokažite da vrijedi $A^c \cup B = (A \setminus B)^c$.

   (c) Nacrtajte Vennov dijagram i označite skup iz (b) dijela zadatka.

5. **(5 bodova)**

   (a) Na skupu $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definiramo relaciju ekvivalencije $\sim$ sa $(a,b) \sim (c,d)$ ako i samo ako je $a \cdot d = b \cdot c$. Dokažite da je ta relacija refleksivna i simetrična!

   (b) Racionalne brojeve možemo definirati kao klase ekvivalencije relacije iz prvog dijela zadatka. Definirajte zbrajanje takvih klasa $[(a,b)] + [(c,d)]$.

   (c) Dokažite da definicija zbrajanja klasa ne ovisi o izboru predstavnika.

6. **(4 boda)** Na skupu $S = \{1,2,3,4,5\}$ zadana je relacija $\rho = \{(1,1),\ (1,5),\ (2,2),\ (3,1),\ (3,3),\ (3,5),\ (5,1),(5,3),(5,5)\}$. Nadopunite ρ do najmanje relacije ekvivalencije i napišite odgovarajuću particiju skupa S na klase ekvivalencije.

7. **(5 bodova)** Principom matematičke indukcije dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + \ldots + n(2n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n+5).$$

8. **(5 bodova)** Dokažite da je izraz $3^{n+2}+5^n$ djeljiv sa 16 za sve neparne prirodne brojeve n.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 – 1. kolokvij

______________________________ __________

IME I PREZIME BROJ BODOVA

1. **(4 boda)** S pomoću tablice istinitosti dokažite semantičku jednakost složenih sudova $(P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \equiv \neg(P \vee Q)$. Pritom su P i Q sudovne varijable.

2. **(4 boda)** Zadan je sud $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x < -1$ ili $x > y \Rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$.
   (a) Iskažite sud riječima.
   (b) Napišite negaciju zadanog suda.
   (c) Napišite obrat po kontrapoziciji zadanog suda.

3. **(3 boda)** Ako je $A = \{0,1\} \cup [2,4]$ i $B = [1,3]$, skicirajte u koordinatnoj ravnini skup $(A \times B) \setminus (B \times A)$.

4. **(5 bodova)** Neka je U univerzalni skup i $A, B \subseteq U$.
   (a) Definirajte presjek $A \cap B$.
   (b) Dokažite da vrijedi $A \setminus B = A \cap B^c$.
   (c) Nacrtajte Vennov dijagram i označite skup iz (b) dijela zadatka.

5. **(5 bodova)**
   (a) Na skupu $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definiramo relaciju ekvivalencije $\sim$ sa $(a,b) \sim (c,d)$ ako i samo ako je $a \cdot d = b \cdot c$. Dokažite da je ta relacija tranzitivna!
   (b) Racionalne brojeve možemo definirati kao klase ekvivalencije relacije iz prvog dijela zadatka. Definirajte množenje takvih klasa $[(a,b)] \cdot [(c,d)]$.
   (c) Dokažite da definicija množenja klasa ne ovisi o izboru predstavnika.

6. **(4 boda)** Na skupu $S = \{1,2,3,4,5\}$ zadana je relacija $\rho = \{(1,1),\ (1,5),\ (2,2),\ (2,4),\ (4,2),\ (4,4), (5,5)\}$. Nadopunite ρ do najmanje relacije ekvivalencije i napišite odgovarajuću particiju skupa S na klase ekvivalencije.

7. **(5 bodova)** Principom matematičke indukcije dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:
$$1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + \ldots + n(3n+2) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+3).$$

8. **(5 bodova)** Dokažite da je izraz $5^{n+1} + 7^n$ djeljiv sa 8 za sve neparne prirodne brojeve n.