1	2	3	4	Σ

JMBAG

Ime i Prezime

Profesor

Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - drugi kolokvij

06. 02. 2009.

1.(3) Definirajte skup $\mathbb{Z}$ pomoću relacije ekvivalencije. Dokažite da je ta relacija doista relacija ekvivalencije.

2.(2) Konstruirajte bijekciju sa skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ u skup $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Konstruirajte bijekciju sa skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ u skup $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3.(3) Neka je x_0 nerealna nultočka polinoma $p \in \mathbb{R}[x]$. Dokažite da je tada i $\overline{x_0}$ nultočka od p.

4.(2) Neka su σ_1, σ_2 elementarni simetrični polinomi, a s_k k–ti Newtonov polinom u dvije varijable. Dokažite relaciju

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}.$$

IME I PREZIME JMBAG

5.(3) Odredite ostatak pri dijeljenju broja 234^{56} sa 7.

6.(3) Pokažite da $4 \nmid n^2 + 2n - 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

IME I PREZIME JMBAG

7.(3) Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ stupnja najviše dva takve da je $p(x^2) = (p(x))^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

8.(4) Odredite najveću zajedničku mjeru polinoma f, g i h :
$f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, $h(x) = x^4 - x^3 - x + 1$.

IME I PREZIME JMBAG

9.(3) Odredite koeficijente a i b tako da polinom $p(x) = x^4 + ax^3 + x^2 + bx - 2$ bude djeljiv sa $(x-1)^2$.

10.(4) Odredite koeficijent $a \in \mathbb{R}$ tako da nultočke polinoma
$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax + 1$ zadovoljavaju jednakost $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{21}{4}$.
Odredite koje su to nultočke.

IME I PREZIME JMBAG

11.(3) Primjenom Hornerovog algoritma razvijte polinom
$p(x) = 2x^3 + 15x^2 + 38x + 35$ po potencijama od $(x + 3)$.

12.(2) Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}.$$

1	2	3	4	Σ

JMBAG

Ime i Prezime

Profesor

Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - drugi kolokvij

06. 02. 2009.

1.(3) Definirajte skup $\mathbb{Q}$ pomoću relacije ekvivalencije. Dokažite da je ta relacija doista relacija ekvivalencije.

2.(2) Dokažite da su $[0,1] \times [0,1]$ i $[0,1]$ ekvipotentni skupovi.

3.(3) Neka su p i q relativno prosti cijeli brojevi, takvi da je p/q nultočka polinoma $f \in \mathbb{Z}[x]$. Dokažite da je p djelitelj slobodnog člana od f.

4.(2) Definirajte simetrični polinom u n varijabli, te elementarne simetrične i Newtonove polinome u n varijabli.

IME I PREZIME JMBAG

5.(3) Odredite ostatak pri dijeljenju broja 207^{53} sa 5.

6.(3) Pokažite da $4 \nmid n^3 + 6n + 2$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

IME I PREZIME JMBAG

7.(3) Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ stupnja najviše tri takve da je $p(x+1) = p(x) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

8.(4) Odredite najveću zajedničku mjeru polinoma f, g i h :
$f(x) = x^2 + 3x + 2$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$, $h(x) = x^4 + 2x^3 - x - 2$.

IME I PREZIME JMBAG

9.(3) Odredite koeficijente a i b tako da polinom $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + x + 2$ bude djeljiv sa $(x + 1)^2$.

10.(4) Odredite koeficijent $a \in \mathbb{R}$ tako da nultočke polinoma

$$p(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + ax - \frac{3}{2}$$

zadovoljavaju jednakost $x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2 = \frac{15}{2}$. Odredite koje su to nultočke.

IME I PREZIME JMBAG

11.(3) Primjenom Hornerovog algoritma razvijte polinom
$p(x) = -x^3 - 2x^2 - 6x - 7$ po potencijama od $(x + 1)$.

12.(2) Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{2x^2 - 3x - 1}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}.$$

1	2	3	4	Σ

JMBAG

Ime i Prezime

Profesor

Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - drugi kolokvij
06. 02. 2009.

1.(3) Definirajte skup $\mathbb{Z}$ pomoću relacije ekvivalencije. Dokažite da je operacija $+$ definirana s $[(a,b)]+[(c,d)] = [(a+c,b+d)]$ dobro definirana, tj. da ne ovisi o izboru reprezentanata klase. Ovdje je $[\cdot]$ oznaka za klasu ekvivalencije.

2.(2) Konstruirajte surjekciju s $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{N}$.

3.(3) Odredite koeficijente polinoma koji se dobije dijeljenjem polinoma $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ s polinomom $q(x) = x - \alpha$.

4.(2) Dokažite da su svi realni polinomi trećeg stupnja reducibilni nad $\mathbb{R}$.

IME I PREZIME JMBAG

5.(3) Odredite ostatak pri dijeljenju broja 57^{53} sa 11.

6.(3) Pokažite da $3 \not| \, n^3 + n^2 - n + 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

IME I PREZIME JMBAG

7.(3) Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ takve da je $p(2x) = 2p(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

8.(4) Odredite najveću zajedničku mjeru polinoma f, g i h :
$f(x) = x^2 - 2x - 3$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$, $h(x) = x^4 - 3x^3 - x + 3$.

IME I PREZIME JMBAG

9.(3) Odredite koeficijente a i b tako da polinom $p(x) = x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 4$ bude djeljiv sa $(x-2)^2$.

10.(4) Odredite koeficijent $a \in \mathbb{R}$ tako da nultočke polinoma

$$f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + a$$

zadovoljavaju jednakost $x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 = \frac{7}{2}$. Odredite koje su to nultočke.

IME I PREZIME JMBAG

11.(3) Primjenom Hornerovog algoritma razvijte polinom
$p(x) = 3x^3 - 29x^2 + 94x - 72$ po potencijama od $(x - 3)$.

12.(2) Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{x^2-1}{x^4+2x^2+1}.$$

1	2	3	4	Σ

JMBAG

Ime i Prezime

Profesor

Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - drugi kolokvij

06. 02. 2009.

1.(3) Definirajte skup $\mathbb{Q}$ pomoću relacije ekvivalencije. Dokažite da je operacija $\cdot$ definirana s $[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(a \cdot c, b \cdot d)]$ dobro definirana, tj. da ne ovisi o izboru reprezentanata klase. Ovdje je $[\cdot]$ oznaka za klasu ekvivalencije.

2.(2) Konstruirajte surjekciju s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{Q}$.

3.(3) Neka su polinomi $f, g \in \mathbb{R}[x]$ istog stupnja. Dokažite da su oni jednaki ako i samo ako su im jednaki odgovarajući koeficijenti.

4.(2) Dokažite da su svi kompleksni polinomi stupnja većeg ili jednakog od dva reducibilni nad $\mathbb{C}$.

IME I PREZIME JMBAG

5.(3) Odredite ostatak pri dijeljenju broja 220^{50} sa 7.

6.(3) Pokažite da $3 \nmid 2n^3 + 2n^2 + n - 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

IME I PREZIME JMBAG

7.(3) Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ takve da je $x \cdot (p'(x))^2 = p(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

8.(4) Odredite najveću zajedničku mjeru polinoma f, g i h :
$f(x) = x^2 + 5x + 4$, $g(x) = x^3 + 4x^2 + x + 4$, $h(x) = x^4 + 4x^3 - x - 4$.

IME I PREZIME JMBAG

9.(3) Odredite koeficijente a i b tako da polinom $f(x) = x^4 + ax^3 + 3x^2 + bx - 4$ bude djeljiv sa $(x+2)^2$.

10.(4) Odredite koeficijent $a \in \mathbb{R}$ tako da nultočke polinoma

$$p(x) = x^3 + ax^2 - 5x + 6$$

zadovoljavaju jednakost $x_1(1 + x_2) + x_2(1 + x_3) + x_3(1 + x_1) = -3$. Odredite koje su to nultočke.

IME I PREZIME JMBAG

11.(3) Primjenom Hornerovog algoritma razvijte polinom
$p(x) = x^3 - x^2 - 8x + 13$ po potencijama od $(x - 2)$.

12.(2) Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{x+1}{x^4+4x^2+3}.$$