1	2	3	4	Σ

JMBAG

Ime i Prezime

Profesor

Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - prvi kolokvij
21. 11. 2008.

1. (2) a) Neka su A i B sudovi. Među sudovima:
$\neg A \Rightarrow \neg B$, $B \Rightarrow A$, $\neg B \Rightarrow \neg A$, $A \,\&\, \neg B$, $B \,\&\, \neg A$, $A \vee \neg B$, $B \vee \neg A$ izdvojite:
– obrat po kontrapoziciji suda $A \Rightarrow B$:________________________
– negaciju suda $B \Rightarrow A$:____________________________________

b) Zapišite riječima: $(\forall m \in \mathbb{Z})(\exists x \in \mathbb{R})(m \le x < m+1)$.

2. (3) Neka je $\mathcal{U}$ univerzalni skup.

a) Definirajte razliku dvaju skupova $A, B \subseteq \mathcal{U}$.

b) Dokažite formulu: $(A \cup B^c)^c = A^c \cap B$.

3. Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S. Dokažite da za sve $x, y \in S$
(3) vrijedi $x \nsim y \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$.

4. Kako se zove i kako se definira relacija na skupu $\mathbb{N}$ za koju koristimo
(2) oznaku $a \equiv b \pmod{m}$?
Je li ta relacija tranzitivna? Odgovor obrazložite.

5	6	7	8	9	10	11	12	Σ

JMBAG

Ime i prezime

Profesor

Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - prvi kolokvij

21. 11. 2008.

5. (4) Dan je sud: "Za svaki prirodan broj m postoji realan broj x takav da ako je $x \cdot m = 1$, onda je x racionalan broj."

a) Provjerite istinitost danog suda. Svoj odgovor obrazložite.

b) Zapišite dani sud pomoću kvantifikatora.

c) Negirajte sud iz (b).

d) Napišite obrat po kontrapoziciji implikacije iz (b).

6. (3) Ako su A, B i C skupovi takvi da je $A \cap B = \emptyset$, mora li vrijediti $(A \cap C) \cup B = (A \cup B) \cap C$? Svoj odgovor obrazložite.

7. Neka je S skup te neka su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ particije skupa S sa sljedećim svo-
(3) jstvima:
(i) za svaki $A \in \mathcal{F}$ postoji $B \in \mathcal{G}$ takav da je $A \subseteq B$;
(ii) za svaki $B \in \mathcal{G}$ postoji $A \in \mathcal{F}$ takav da je $B \subseteq A$.
Mora li tada vrijediti $\mathcal{F} = \mathcal{G}$? Svoj odgovor obrazložite.

8. Na skupu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zadana je relacija ρ na sljedeći način:
(3)

$$x \rho y \Leftrightarrow |x - y| > 1 \ .$$

Ispitajte koja svojstva ima relacija ρ. Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? A relacija ekvivalencije? Svoje odgovore obrazložite.

9. Napišite relaciju ekvivalencije na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ čije su
(2) klase $k_1 = \{1, 2, 5\}$, $k_2 = \{3, 6, 7\}$, $k_3 = \{4\}$.

10. Matematičkom indukcijom dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi
(3) $4^n > n^2$.

11. Koristeći matematičku indukciju dokažite da je $6^{2 \cdot 2008} + 19^{2008} + 2^{2009}$
(4) djeljivo sa 17.

12. Izračunajte $M(3^{4102} - 3^{2113}, 3^{4105} - 3^{2113})$.
(3)

1	2	3	4	Σ

JMBAG

Ime i Prezime

Profesor

Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - prvi kolokvij
21. 11. 2008.

1. (2) a) Neka su P i Q sudovi. Među sudovima:
$\neg P \Rightarrow \neg Q$, $Q \Rightarrow P$, $\neg Q \Rightarrow \neg P$, $P \,\&\, \neg Q$, $Q \,\&\, \neg P$, $P \vee \neg Q$, $Q \vee \neg P$ izdvojite:
– obrat po kontrapoziciji suda $Q \Rightarrow P$:________________________
– negaciju suda $P \Rightarrow Q$:_____________________________________
b) Zapišite riječima: $(\forall q \in \mathbb{Q})(\exists n \in \mathbb{N})(nq \in \mathbb{Z})$.

2. (3) Neka je $\mathcal{U}$ univerzalni skup.
a) Definirajte presjek dvaju skupova $A, B \subseteq \mathcal{U}$.

b) Dokažite formulu: $(A^c \cap B)^c = A \cup B^c$.

3. Dokažite da $[0], [1], \ldots, [n-1]$ čine sve moguće klase ostataka modulo
(3) n.

4. Kako se zove i kako se definira relacija na skupu $\mathbb{Z}$ za koju koristimo
(2) oznaku $m \mid n$?
Je li ta relacija antisimetrična? Odgovor obrazložite.

5	6	7	8	9	10	11	12	Σ

JMBAG

IME I PREZIME

PROFESOR

ASISTENT

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - prvi kolokvij
21. 11. 2008.

5. (4) Dan je sud: "Postoji realan broj x takav da $x > 1$ povlači da je x prirodan broj."

   a) Provjerite istinitost danog suda. Svoj odgovor obrazložite.

   b) Zapišite dani sud pomoću kvantifikatora.

   c) Negirajte sud iz (b).

   d) Napišite obrat implikacije iz (b).

6. (3) Ako su A, B i C skupovi takvi da je $B \subseteq C$, mora li vrijediti $(A \cap C) \cup B = (A \cup B) \cap C$? Svoj odgovor obrazložite.

7. (3) Ako su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ podskupovi od $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ takvi da je $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ particija tog skupa, mora li za sve $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$ vrijediti $A \cup B = \emptyset$? Svoj odgovor obrazložite.

8. (3) Na skupu $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$ zadana je relacija ρ na sljedeći način:

$$(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow (a \leq c \wedge b \leq d) \ .$$

Ispitajte koja svojstva ima relacija ρ. Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? A relacija ekvivalencije? Svoje odgovore obrazložite.

9. (2) Napišite relaciju ekvivalencije na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ čije su klase $k_1 = \{1, 3, 5, 7\}$, $k_2 = \{2, 4, 6\}$.

10. (3) Matematičkom indukcijom dokažite da za sve prirodne brojeve $n \geq 6$ vrijedi $2^n > (n + 1)^2$.

11. (4) Koristeći matematičku indukciju dokažite da je $2^{5\cdot 2008+3} + 5^{2008} \cdot 3^{2010}$ djeljivo sa 17.

12. (3) Izračunajte $M(3^{2136} - 1, 3^{2138} + 3^{2136} - 2)$.

1	2	3	4	Σ

JMBAG

Ime i Prezime

Profesor

Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - prvi kolokvij
21. 11. 2008.

1. (2) a) Neka su A i B sudovi. Među sudovima:
$\neg A \Rightarrow \neg B$, $B \Rightarrow A$, $\neg B \Rightarrow \neg A$, $A \,\&\, \neg B$, $B \,\&\, \neg A$, $A \vee \neg B$, $B \vee \neg A$ izdvojite:
– obrat suda $B \Rightarrow A$:____________________
– negaciju suda $A \Rightarrow B$:____________________

b) Zapišite riječima: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{Z})(y \leq x < y+1)$.

2. (3) Neka je $\mathcal{U}$ univerzalni skup.

a) Definirajte uniju dvaju skupova $A, B \subseteq \mathcal{U}$.

b) Dokažite formulu: $A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$.

3. Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S. Dokažite da za sve $x, y \in S$
(3) vrijedi $x \sim y \Rightarrow [x] = [y]$.

4. Kako se zove i kako se definira relacija na skupu $\mathbb{Z}$ za koju koristimo
(2) oznaku $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\ n)$? Je li ta relacija antisimetrična? Odgovor obrazložite.

5	6	7	8	9	10	11	12	Σ

JMBAG

Ime i prezime

Profesor

Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - prvi kolokvij
21. 11. 2008.

5. (4) Dan je sud: "Postoji racionalan broj q takav da je $q > 0$ ako je $-3q < 0$."

a) Provjerite istinitost danog suda. Svoj odgovor obrazložite.

b) Zapišite dani sud pomoću kvantifikatora.

c) Negirajte sud iz (b).

d) Napišite obrat po kontrapoziciji implikacije iz (b).

6. (3) Ako su A, B i C skupovi takvi da je $B \cap C = \emptyset$, mora li vrijediti $(A \cap C) \cup B = (A \cup B) \cap C$? Svoj odgovor obrazložite.

7. Neka je S skup te neka su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ particije skupa S takve da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.
(3) Mora li tada vrijediti da je $\mathcal{F} = \mathcal{G}$? Svoj odgovor obrazložite.

8. Na skupu $\{1,2\} \times \{1,2,3\}$ zadana je relacija ρ na sljedeći način:
(3)

$$(a,b)\rho(c,d) \Leftrightarrow ((a < c) \vee (a = c \wedge b \leq d)) \ .$$

Ispitajte koja svojstva ima relacija ρ. Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? A relacija ekvivalencije? Svoje odgovore obrazložite.

9. Napišite relaciju ekvivalencija na skupu $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ čije su
(2) klase $k_1 = \{1,2\}$, $k_2 = \{3\}$, $k_3 = \{4,7\}$, $k_4 = \{5,6\}$.

10. Matematičkom indukcijom dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi
(3) $2^n > n^2 - 2n + 2$.

11. Koristeći matematičku indukciju dokažite da je $7 \cdot 5^{2 \cdot 2008} + 12 \cdot 6^{2008}$
(4) djeljivo sa 19.

12. Izračunajte $M(3^{2468} - 3^{1234}, 3^{2470} - 3^{1234})$.
(3)

1	2	3	4	Σ

JMBAG

Ime i Prezime

Profesor

Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - prvi kolokvij

21. 11. 2008.

1. (2) a) Neka su P i Q sudovi. Među sudovima:
$\neg P \Rightarrow \neg Q$, $Q \Rightarrow P$, $\neg Q \Rightarrow \neg P$, $P \,\&\, \neg Q$, $Q \,\&\, \neg P$, $P \vee \neg Q$, $Q \vee \neg P$ izdvojite:
– obrat suda $P \Rightarrow Q$: ______________________
– negaciju suda $Q \Rightarrow P$: ______________________

b) Zapišite riječima: $(\forall r \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(-n < r < n)$.

2. (3) Neka je $\mathcal{U}$ univerzalni skup.

a) Definirajte komplement skupa $A \subseteq \mathcal{U}$.

b) Dokažite formulu: $A^c \cup B = (A \cup B^c)^c$.

3. Neka su $[0], [1], \ldots, [n-1]$ klase ostataka modulo n. Dokažite da su svi
(3) ti skupovi međusobno različiti.

4. Kako se zove i kako se definira relacija na skupu $\mathbb{N}$ za koju koristimo
(2) oznaku $a \mid b$?
Je li ta relacija antisimetrična? Odgovor obrazložite.

5	6	7	8	9	10	11	12	Σ

JMBAG

Ime i prezime

Profesor

Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - prvi kolokvij
21. 11. 2008.

5. (4) Dan je sud: "Za svaki realan broj x postoji imaginaran broj z takav da je $\mathrm{Re}(z) = x$ ako je $|z| = \sqrt{x^2+1}$."

a) Provjerite istinitost danog suda. Svoj odgovor obrazložite.

b) Zapišite dani sud pomoću kvantifikatora.

c) Negirajte sud iz (b).

d) Napišite obrat implikacije iz (b).

6. (3) Neka su A, B i C skupovi takvi da je $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ te $A \cup B = A \cup C$. Mora li tada vrijediti da je $B = C$? Svoj odgovor obrazložite.

7. (3) Ako su A i B podskupovi od $\mathbf{N}$ takvi da je $\{A, B\}$ particija od $\mathbf{N}$, mora li tada $\{\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)\}$ biti particija skupa $\mathcal{P}(\mathbf{N})$? Svoj odgovor obrazložite.

8. (3) Na skupu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ zadana je relacija ρ na sljedeći način:

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow |x - y| < 2 \ .$$

Ispitajte koja svojstva ima relacija ρ. Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? A relacija ekvivalencije? Svoje odgovore obrazložite.

9. (2) Napišite relaciju ekvivalencije na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ čije su klase $k_1 = \{1\}$, $k_2 = \{2, 5, 7\}$, $k_3 = \{3, 4\}$, $k_4 = \{6\}$.

10. (3) Matematičkom indukcijom dokažite da za sve prirodne brojeve $n \geq 3$ vrijedi $3^n > 2^n + 3n$.

11. (4) Koristeći matematičku indukciju dokažite da je $2^{2008+5} \cdot 3^{4 \cdot 2008} + 5^{3 \cdot 2008+1}$ djeljivo sa 37. Svoj odgovor obrazložite.

12. (3) Izračunajte $M(5^{1998} - 1, 5^{1998} + 5^{2000} - 2)$.