1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

JMBAG

Ime i prezime

Profesor

Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - prvi kolokvij

23. 11. 2007.

1. (3 boda) Koristeći tablicu istinitosti, dokažite $\neg(A\&B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$.

2. (3 boda) Neka su A i B proizvoljni skupovi. Dokažite da vrijedi $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

3. (4 boda) Neka su $a, b, c \in \mathbb{Z}$ proizvoljni. Dokažite da vrijedi $a|b,\ a|c \Rightarrow a|b+c$.

4. a) (1 bod) Provjerite istinitost tvrdnje: "Ako je $7 < 3$ onda je 1 paran broj." Odgovor obrazložite.
   b) (1 bod) Zapišite pomoću kvantifikatora: "Za svaki cijeli broj postoji prirodan broj koji je jednak njegovoj apsolutnoj vrijednosti."
   c) (1 bod) Negirajte sljedeću izjavu: "$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\ \sqrt{m} \geq n$."
   d) (2 boda) Napišite obrat i obrat po kontrapoziciji implikacije: "$(\forall x \in \mathbb{R}) : x \geq 5 \Rightarrow x^2 \geq 25$."

5. (3 boda) Provjerite odnos skupova: $(B \cup C) \cap (B \cup A)$ i $C \cap B$. Za sve što tvrdite iznesite dokaz i/ili kontraprimjer.

6. (3 boda) Neka su A, B i C podskupovi nekog univerzalnog skupa U. Vrijedi li sljedeća tvrdnja: "Ako je $A \subseteq B$ i $B \cap C \subseteq A$, onda je $C^C \cap A \subseteq B^C$"? Svoj odgovor potkrijepite dokazom ili kontraprimjerom.

7. (4 boda) Dokažite da je broj $12^{n+2} + 13^{2n+1}$ djeljiv sa 157 za svaki $n \geq 0$.

8. (3 boda) Na skupu $S = \{1, 2, 3, 4\}$ je dana relacija

$$\rho = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}.$$

Odredite koja od sljedećih svojstava ima relacija ρ: refleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost. Je li ρ relacija uređaja? Obrazložite odgovore.

9. (4 boda) Neka je $A = \{21, 36, 51, 52, 74, 82, 90\}$ i neka je

$$\rho = \{(x,y) \in A \times A \ : \ x + y \text{ je djeljiv sa } 7\}$$

Ispišite sve parove koji pripadaju relaciji ρ, te ispitajte i obrazložite njezina svojstva (je li refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna).

10. (3 boda) Napišite relaciju ekvivalencije na skupu $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ čije su klase $k_0 = \{0, 5\}$, $k_1 = \{1, 6\}$, $k_2 = \{2, 7\}$, $k_3 = \{3\}$, $k_4 = \{4\}$. Kako biste proširili ovu relaciju do relacije ekvivalencije na $\mathbb{N} \cup \{0\}$?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

JMBAG

Ime i prezime

Profesor

Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - prvi kolokvij
23. 11. 2007.

1. (3 boda) Koristeći tablicu istinitosti, dokažite $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A)\&(\neg B)$.
2. (3 boda) Neka su A i B proizvoljni skupovi. Dokažite da vrijedi $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. (4 boda) Dokažite da je relacija "biti djeljiv" tranzitivna na $\mathbb{Z}$.
4. a) (1 bod) Provjerite istinitost tvrdnje: "Ako je $7 > 3$ onda je 2 paran broj." Odgovor obrazložite.
   b) (1 bod) Zapišite pomoću kvantifikatora: "Postoji realan broj koji je manji od kvadrata svakog prirodnog broja."
   c) (1 bod) Negirajte sljedeću izjavu: "$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x + y \geq 10^5$."
   d) (2 boda) Napišite obrat i obrat po kontrapoziciji implikacije: "$(\forall n \in \mathbb{N}) : 5|n \Rightarrow 10|n^2 - n$."
5. (3 boda) Provjerite odnos skupova: $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ i $B \cap C$. Za sve što tvrdite iznesite dokaz i/ili kontraprimjer.
6. (3 boda) Vrijedi li sljedeća tvrdnja: "Ako su skupovi A i B disjunktni, onda je $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$"? Svoj odgovor potkrijepite dokazom ili kontraprimjerom.
7. (4 boda) Dokažite da je broj $13^{n+2} + 14^{2n+1}$ djeljiv sa 183 za svaki $n \geq 0$.
8. (3 boda) Na skupu $S = \{2, 3, 4, 5\}$ je dana relacija
$$\rho = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}.$$
Odredite koja od sljedećih svojstava ima relacija ρ: refleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost. Je li ρ relacija uređaja? Obrazložite odgovore.
9. (4 boda) Neka je $A = \{22, 37, 52, 53, 75, 83, 91\}$ i neka je
$$\rho = \{(x, y) \in A \times A\ :\ x + y \text{ je djeljiv sa } 7\}$$
Ispišite sve parove koji pripadaju relaciji ρ, te ispitajte i obrazložite njezina svojstva (je li refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna).
10. (3 boda) Neka je dan skup $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Definiramo relaciju ρ na $\mathcal{P}(S)$ ovako: $A\rho B$ ako A i B imaju isti broj elemenata. Provjerite je li relacija ρ relacija ekvivalencije, te joj—ukoliko je—odredite klase ekvivalencija.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

JMBAG

Ime i prezime

Profesor

Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - prvi kolokvij

23. 11. 2007.

1. (3 boda) Koristeći tablicu istinitosti, dokažite $A \Rightarrow B \equiv (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.
2. (3 boda) Neka je A proizvoljni skup. Dokažite da vrijedi $\overline{\overline{A}} = A$.
3. (4 boda) Dokažite da je relacija "biti djeljiv" antisimetrična na $\mathbb{N}$.
4. a) (1 bod) Provjerite istinitost tvrdnje: "Ako je $7 \geq 3$ onda je 3 paran broj." Odgovor obrazložite.
   b) (1 bod) Zapišite pomoću kvantifikatora: "Za svaka dva realna broja postoji prirodan broj koji je veći od sume njihovih kvadrata."
   c) (1 bod) Negirajte sljedeću izjavu: "$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\ x^2 \leq n$."
   d) (2 boda) Napišite obrat i obrat po kontrapoziciji implikacije: "$(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq 25 \Rightarrow |x| \geq 5$."
5. (3 boda) Provjerite odnos skupova: $(B \cup C) \cap (B \cup A)$ i $A \cap C$. Za sve što tvrdite iznesite dokaz i/ili kontraprimjer.
6. (3 boda) Neka su A, B i C podskupovi nekog univerzalnog skupa U. Vrijedi li sljedeća tvrdnja: "Ako je $C \subseteq A$ i $A \cap B \subseteq C$, onda je $B^C \cap C \subseteq A^C$"? Svoj odgovor potkrijepite dokazom ili kontraprimjerom.
7. (4 boda) Dokažite da je broj $14^{n+2} + 15^{2n+1}$ djeljiv sa 211 za svaki $n \geq 0$.
8. (3 boda) Na skupu $S = \{3, 4, 5, 6\}$ je dana relacija
$$\rho = \{(3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)\}.$$
   Odredite koja od sljedećih svojstava ima relacija ρ: refleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost. Je li ρ relacija uređaja? Obrazložite odgovore.
9. (4 boda) Neka je $A = \{23, 38, 53, 54, 76, 84, 92\}$ i neka je
$$\rho = \{(x, y) \in A \times A \ :\ x + y \text{ je djeljiv sa } 7\}$$
   Ispišite sve parove koji pripadaju relaciji ρ, te ispitajte i obrazložite njezina svojstva (je li refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna).
10. (3 boda) Neka je dan skup $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definiramo relaciju ρ na $\mathcal{P}(S)$ ovako: $A \rho B$ ako A^c i B^c imaju isti broj elemenata. Provjerite je li relacija ρ relacija ekvivalencije, te joj—ukoliko je—odredite klase ekvivalencija. Za $A \in \mathcal{P}(S)$ je skup $A^c = S \setminus A$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

JMBAG | Ime i prezime

Profesor | Asistent

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1 - prvi kolokvij
23. 11. 2007.

1. (3 boda) Koristeći tablicu istinitosti, pokažite da $A \Rightarrow B$ nije ekvivalentno s $B \Rightarrow A$.
2. (3 boda) Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Dokažite da vrijedi $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. (4 boda) Dokažite da za proizvoljne $a, b, c \in \mathbb{Z}$ vrijedi $a|b \Rightarrow a|bc$.
4. a) (1 bod) Provjerite istinitost tvrdnje: "Ako je $7 \leq 3$ onda je 4 paran broj." Odgovor obrazložite.
   b) (1 bod) Zapišite pomoću kvantifikatora: "Postoji realan broj koji je manji od recipročnih vrijednosti svih prirodnih brojeva.
   c) (1 bod) Negirajte sljedeću izjavu: "$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x^2 + y^2 \geq 0.$"
   d) (2 boda) Napišite obrat i obrat po kontrapoziciji implikacije: "$(\forall n \in \mathbb{N}) : n^2 - n \geq 6 \Rightarrow n \geq 3.$"
5. (3 boda) Provjerite odnos skupova: $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ i $A \cap B$. Za sve što tvrdite iznesite dokaz i/ili kontraprimjer.
6. (3 boda) Vrijedi li sljedeća tvrdnja: "Ako su skupovi A i B disjunktni, onda je $B \setminus (A \setminus C) = (B \setminus A) \setminus C$"? Svoj odgovor potkrijepite dokazom ili kontraprimjerom.
7. (4 boda) Dokažite da je broj $15^{n+2} + 16^{2n+1}$ djeljiv sa 241 za svaki $n \geq 0$.
8. (3 boda) Na skupu $S = \{4, 5, 6, 7\}$ je dana relacija
$$\rho = \{(4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (5, 7), (6, 7)\}.$$
Odredite koja od sljedećih svojstava ima relacija ρ: refleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost. Je li ρ relacija uređaja? Obrazložite odgovore.
9. (4 boda) Neka je $A = \{24, 39, 54, 55, 78, 86, 94\}$ i neka je
$$\rho = \{(x, y) \in A \times A\ :\ x + y \text{ je djeljiv sa } 7\}$$
Ispišite sve parove koji pripadaju relaciji ρ, te ispitajte i obrazložite njezina svojstva (je li refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna).
10. (3 boda) Napišite relaciju ekvivalencije na skupu $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ čije su klase $k_0 = \{0, 3, 6\}$, $k_1 = \{1, 4, 7\}$, $k_2 = \{2, 5\}$. Kako biste proširili ovu relaciju do relacije ekvivalencije na $\mathbb{N} \cup \{0\}$?