

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Predavanja i zadaci za vježbu

Željka Milin Šipuš i Mea Bombardelli

Verzija 2.5

3. 2. 2008.

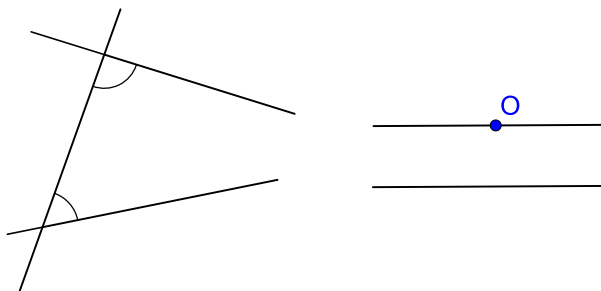
Uvod i povijesni osvrt

Analitička geometrija bavi se proučavanjem (klasične) euklidske geometrije ravnine i prostora koristeći algebarske metode. Njen tvorac, René Descartes (1596-1650, lat. Renatus Cartesius), u svom djelu¹ napisanom 1619., a objavljenom tek 1637. godine, nazvao ju je i **metodom koordinata**. Osnovna ideja analitičke geometrije je da se točke ravnine i prostora opisuju koordinatama, dakle, parovima ili trojkama realnih brojeva, a ostali objekti (pravci, ravnine, krivulje, plohe, itd.) jednadžbama. Prema tome, ispitivanje odnosa među objektima svodi se na rješavanje sustava jednadžbi.

Analitička geometrija je vrlo raširena metoda proučavanja euklidske geometrije i prisutna je u mnogim granama matematike. Povijesno, imala je velik utjecaj i na razvoj diferencijalnog računa.

Polazište za uvođenje analitičke geometrije su euklidska ravnina ili prostor koje ćemo označavati sa E^2 i E^3 i koji su aksiomatski zasnovani. Osnovne elemente, točku i pravac za E^2 , te još ravninu za E^3 , *ne definiramo*, nego aksiomima, tj. prihvaćenim istinama, opisujemo njihove osnovne međusobne odnose. Ostale odnose dokazujemo koristeći aksiome. Starogrčki matematičar Euklid (330 - 275 pr. Kr.) još je u 3. stoljeću pr. Kr. u svom djelu *Elementi* aksiomatski zasnovao ravninu koju po njemu i nazivamo *euklidskom ravninom*. Euklid je pokušao "definirati" i osnovne objekte u smislu da intuitivno objasni njihov smisao, pa je točku "definirao" kao *ono što nema dijelova*, krivulju kao *duljinu bez širine*, pravac kao *krivulju kojoj su sve točke jednako raspoređene*, a plovu kao *ono što nema samo duljinu, već ima i širinu*. Euklidovi osnovni aksiomi su:

1. Od svake točke do svake druge točke može se povući pravac.
2. Omeđen dio pravca može se neprekidno produžiti po pravcu.
3. Iz svakog središta sa svakim polumjerom može se opisati kružnica.
4. Svi su pravi kutovi jednaki.
5. Ako dva pravca presječemo trećim pravcem i ako on s njima zatvara s jedne svoje strane unutrašnje kutove čiji je zbroj manji od dva prava kuta, onda se ta dva pravca dovoljno produžena sijeku, i to upravo s te strane.



Peti navedeni aksiom ima i svoj poznatiji ekvivalentni iskaz:

- 5.' Neka je zadan pravac u ravnini i točka koja mu ne pripada. Tada postoji točno jedan pravac koji prolazi zadanom točkom i koji je paralelan sa zadanim pravcem.

¹ *Rasprava o metodi pravilnog upravljanja umom i traženje istine u znanostima*, s dodatkom *Geometrija*

Peti aksiom ima vrlo važno povijesno značenje – zbog svoje neobične duljine smatralo se da je možda već on posljedica ostalih aksioma. Taj je problem bio neriješen skoro 2000 godina, tek se u 19. stoljeću dokazalo da je peti aksiom zaista aksiom karakterističan za euklidsku geometriju, a njegovim negiranjem dobivamo nove geometrije, tzv. neeuklidske geometrije.

Danas postoje i preciznije aksiomatike, kao primjerice aksiomatika njemačkog matematičara Davida Hilberta (oko 1900. godine) i mnoge druge ekvivalentne aksiomatike (vidi knjige: B. Pavković, D. Veljan *Elementarna matematika 1, 2*).

Naše polazište je, dakle, aksiomatski zasnovana euklidska ravnina ili prostor, pri čemu koristimo bez dokaza neke činjenice elementarne geometrije izvedene iz aksioma. Tek ćemo povremeno naznačiti posljedice korištenja nekih (Euklidovih) aksioma. Osnovne definicije i tvrdnje euklidske geometrije obrađuju se u kolegiju **Elementarna geometrija**.

Recimo još par riječi o tvorcu metode koordinata – Renéu Descartesu. Osim što je bio vrstan i vrlo cijenjen matematičar, poznat je i po svom doprinosu filozofiji. Vrlo je čuvena njegova misao *"Mislím, dakle jesam"*. Predlagao je i *univerzalnu metodu rješavanja problema* koja se sastojala od sljedeća tri koraka:

1. Zadaću bilo koje vrste svesti na matematičku.
2. Matematičku zadaću svesti na algebarsku.
3. Algebarsku zadaću svesti na rješavanje jedinstvene jednadžbe.

No, i sam je uviđao njene granice. Prilagođujući tu ideju, uvođenje metode koordinata zamislio je na sljedeći način:

1. Geometrijsku zadaću formulirati algebarski.
2. Algebarsku zadaću riješiti.
3. Algebarsko rješenje interpretirati geometrijski.

Uz metode analitičke geometrije u užem smislu, koje uvodimo od drugog poglavlja, usko je vezan pojam vektora. Njega uvodimo u prvom poglavlju, u kojem definiramo i operacije s vektorima: zbrajanje, množenje skalarom, skalarno množenje, te vektorsko i mješovito množenje. U drugom poglavlju određujemo razne oblike jednadžbe pravca u ravnini, te jednadžbe pravca i ravnine u prostoru. U trećem poglavlju definiramo elipsu, hiperbolu i parabolu i općenito krivulje zadane algebarskom jednadžbom drugog stupnja. Koristeći geometrijske transformacije, svaku krivulju drugog reda prevodimo na kanonski oblik. Na kraju, ukratko razmatramo i plohe 2. reda.

Poglavlje 1

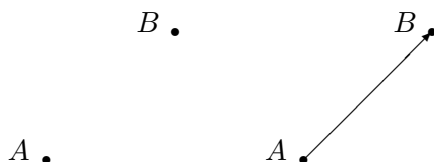
Vektori

1.1 Vektorski prostori V^1 , V^2 , V^3

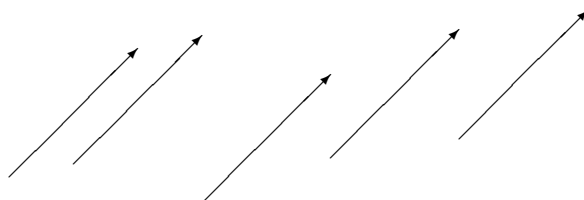
Vektor često zamišljamo kao dužinu sa strelicom:



Matematička definicija vektora je ipak nešto složenija, a ova intuitivna predodžba više odgovara pojmu usmjerene ili orijentirane dužine. No, i tu trebamo biti precizniji: **usmjerena** ili **orijentirana dužina** je uređen par točaka (A, B) , $A, B \in E^3$, dakle, element skupa $E^3 \times E^3$. Tu usmjerenu dužinu označavamo s \overline{AB} , točku A nazivamo početkom (početnom točkom), a točku B završetkom ili krajem (završnom ili krajnjom točkom) usmjerene dužine \overline{AB} . Usmjerenj dužini pridružujemo i dužinu \overline{AB} kojoj pri crtnji stavljamo i strelicu:



Iz pojma usmjerene dužine gradi se pojam vektora. Jednostavno rečeno, vektor je *skup* svih paralelnih usmjerenih dužina jednake duljine:

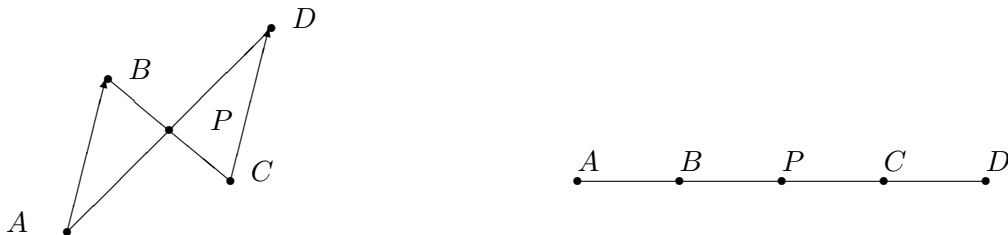


Da bismo precizno definirali pojam vektora, uvedimo najprije sljedeću relaciju na skupu svih usmjerenih dužina u $E^3 \times E^3$.

Definicija 1.1.1 Za usmjerene dužine \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{CD} kažemo da su **ekvivalentne** ako dužine \overline{AD} i \overline{BC} imaju zajedničko polovište. Pišemo $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Na sljedećoj su slici prikazane ekvivalentne usmjerene dužine \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{CD} . Moguće su situacije: točke A, B, C, D ne leže na istom pravcu ili točke A, B, C, D leže na istom pravcu.

U prvoj situaciji možemo primijetiti da je četverokut $ABDC$ paralelogram. Zaista, sjetimo se da je paralelogram četverokut kojemu oba para nasuprotnih stranica leže na paralelnim pravcima, a to je ako i samo ako se dijagonale tog četverokuta raspolavljaju.



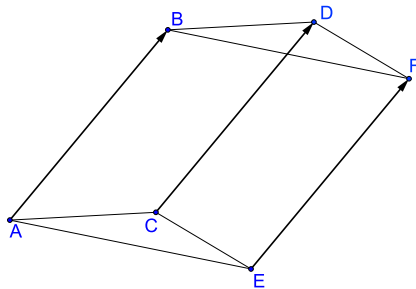
Prema tome, usmjerene dužine \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{CD} su ekvivalentne ako i samo ako je četverokut $ABDC$ paralelogram ili točke A, B, C, D leže na istom pravcu i pritom dužine \overline{AC} i \overline{BD} imaju zajedničko polovište. Odavde slijedi da je definicija relacije \sim dobra (valjana) i na pravcu E^1 , u ravni E^2 i u prostoru E^3 . Mi ćemo je razraditi samo za E^3 .

Propozicija 1.1.1 Relacija \sim je relacija ekvivalencije na skupu $E^3 \times E^3$.

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost relacije \sim su očite. Pokažimo tranzitivnost.

Neka je $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$.

Pretpostavimo da usmjerene dužine \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} i \overrightarrow{EF} leže na tri različita pravca u E^3 . Koristimo i sljedeću karakterizaciju paralelograma: četverokut $ABDC$ paralelogram, ako i samo ako je $|AB| = |CD|$ i pravci AB i CD su paralelni ($|AB|$ označava duljinu dužine \overline{AB} , a AB pravac određen točkama A, B). Kako iz pretpostavke slijedi da je četverokut $ABDC$ paralelogram, to je pravac AB paralelan pravcu CD i duljina dužine \overline{AB} je jednaka duljini dužine \overline{CD} . Analogno, iz pretpostavke slijedi da je četverokut $CDFE$ paralelogram, pa je $|CD| = |EF|$ i $CD \parallel EF$. No, kako su relacije paralelnosti i jednakosti duljina dužina tranzitivne, slijedi $|AB| = |EF|$ i $AB \parallel EF$, tj. četverokut $ABFE$ je paralelogram. Prema tome je $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.



Slično se pokazuje tranzitivnost i u ostalim slučajevima. □

Relacija ekvivalencije rastavlja skup na kojem je definirana na disjunktne podskupove koje nazivamo klasama ekvivalencije. Svaka klasa ekvivalencije sastoji se od elemenata skupa koji su međusobno ekvivalentni i samo od njih. Primijenimo li te činjenice na skup $E^3 \times E^3$, imamo sljedeću definiciju:

Definicija 1.1.2 *Vektor* je klasa ekvivalencije po relaciji \sim na skupu svih usmjerenih dužina $E^3 \times E^3$. Skup svih vektora označavamo sa V^3 .

Klasu ekvivalencije određenu usmjerenom dužinom \overrightarrow{AB} označavat ćemo sa $[\overrightarrow{AB}]$. Dakle, vrijedi

$$[\overrightarrow{AB}] = \{ \overrightarrow{PQ} \in E^3 \times E^3 \mid \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB} \}.$$

Vrijedi $\overrightarrow{AB} \in [\overrightarrow{AB}]$, pa kažemo da je usmjereni dužina \overrightarrow{AB} **predstavnik** ili **reprezentant** vektora $[\overrightarrow{AB}]$.

Vektore kraće označavamo i malim latinskom slovima sa strelicom $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Napomena. Promatrali smo prostor E^3 s točkovnom strukturom i u njemu definirali vektore. Da smo krenuli od E^1 , odnosno E^2 , i na njima podrazumijevali točkovnu strukturu, te da smo definirali usmjerene dužine i relaciju \sim na isti način kao u E^3 , definirali bismo vektore na pravcu, odnosno u ravnini. Odgovarajuće skupove vektora označavamo s V^1, V^2 .

Uvedimo sad neke istaknute vektore.

Promotrimo najprije klasu $[\overrightarrow{AA}]$. Koje usmjerene dužine pripadaju toj klasi?

Neka je $\overrightarrow{PQ} \in [\overrightarrow{AA}]$. Tada je $\overrightarrow{AA} \sim \overrightarrow{PQ}$, pa dužine \overrightarrow{AP} i \overrightarrow{AQ} imaju zajedničko polovište. To je moguće ako i samo ako je $P = Q$. Dakle,

$$[\overrightarrow{AA}] = \{ \overrightarrow{PP} \mid P \in E^3 \}.$$

Vektor $[\overrightarrow{AA}]$ nazivamo **nulvektorom** i označavamo $\vec{0}$.

Nadalje, za vektor $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$, definiramo vektor $-\vec{a}$ kao vektor s predstavnikom \overrightarrow{BA} . Vektor $-\vec{a}$ nazivamo **suprotnim vektorom** vektora \vec{a} . Očito vrijedi $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

Vektorima možemo birati predstavnike. Vrijedi sljedeća tvrdnja:

Propozicija 1.1.2 Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ i $C \in E^3$. Tada postoji jedinstvena točka $D \in E^3$ takva da je $\vec{a} = [\overrightarrow{CD}]$.

Dokaz. Ako je $\vec{a} = \vec{0}$, tada je $B = A$, pa je $D = C$.

Neka je $\vec{a} \neq \vec{0}$. Ako točke A, B, C leže na istom pravcu, onda je točka D ona (jedinstvena) točka tog pravca takva da dužine \overrightarrow{AC} i \overrightarrow{BD} imaju zajedničko polovište. Ako točka C ne leži na pravcu AB , tada (po 5. Euklidovom aksiomu) postoji jedinstveni pravac koji prolazi točkom C paralelno s pravcem AB i jedinstveni pravac koji prolazi točkom B paralelno s pravcem AC . Presjek tih pravaca je tražena točka D . Kako je zbog konstrukcije dobiveni četverokut $ABDC$ paralelogram, to je $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$. \square

U situaciji iz prethodne propozicije kažemo da smo vektor \vec{a} **nanijeli iz točke** C .

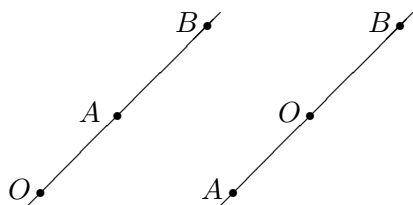
Za vektor definiramo i pojmove modula, smjera i orijentacije. Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$. **Modul** ili **duljina** vektora \vec{a} je duljina dužine \overrightarrow{AB} . Modul označavamo $|\vec{a}|$, dakle, $|\vec{a}| = |AB|$.

Očito je definicija dobra, tj. ne ovisi o izboru predstavnika za vektor \vec{a} . Naime, ako je \vec{CD} neki drugi predstavnik od \vec{a} , tada je četverokut $ABDC$ paralelogram, pa su dužine \overline{AB} i \overline{CD} jednakih duljina. Slično razmišljamo i ako točke A, B, C, D leže na jednom pravcu. Uočimo da je nulvektor jedini vektor modula 0.

Smjer vektora \vec{a} je smjer pravca AB . Pritom je smjer pravca definiran kao klasa ekvivalencije na skupu svih pravaca u E^3 s obzirom na relaciju ekvivalencije "biti paralelan". Dakle, smjer pravca je klasa (skup) svih međusobno paralelnih pravaca. Očito definicija smjera vektora ne ovisi o izboru predstavnika vektora. Za nulvektor smjer ne definiramo (i to je jedini takav vektor).

Kažemo da su vektori \vec{a} i \vec{b} **kolinearni** ako su istog smjera. Dogovorom usvajamo da je nulvektor kolinearan sa svakim vektorom.

Orijentacija vektora je "relativan" pojam, tj. definiramo je s obzirom na druge vektore (kolinearne s promatranim vektorom). Neka su \vec{a}, \vec{b} kolinearni vektori. Po propoziciji 1.1.2 možemo odabrati njihove predstavnike s početkom u istoj točki O , $\vec{a} = [\overline{OA}]$, $\vec{b} = [\overline{OB}]$. Kažemo da su vektori \vec{a}, \vec{b} **jednako orijentirani** ako točke A, B leže s iste strane točke O , a **suprotno orijentirani** ako leže s različitih strana.



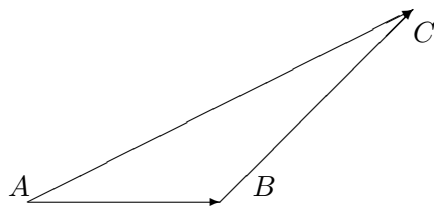
Očito vrijedi sljedeća tvrdnja:

Propozicija 1.1.3 Vektor je jednoznačno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom.

Sljedeći nam je cilj definirati neke operacije s vektorima – pritom definiramo novi vektor kojeg opisujemo na jedan od dva moguća načina, ili preko predstavnika (koristeći definiciju vektora), ili modulom, smjerom i orijentacijom (koristeći propoziciju 1.1.3).

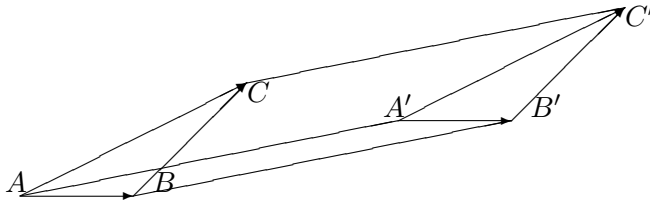
Definicija 1.1.3 Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$, $\vec{a} = [\overline{AB}]$, $\vec{b} = [\overline{BC}]$. **Zbroj vektora \vec{a} i \vec{b} je vektor $\vec{a} + \vec{b}$ određen predstavnikom \overline{AC} :**

$$\vec{a} + \vec{b} = [\overline{AC}].$$



Kažemo da smo vektore zbrojili **po pravilu trokuta**.

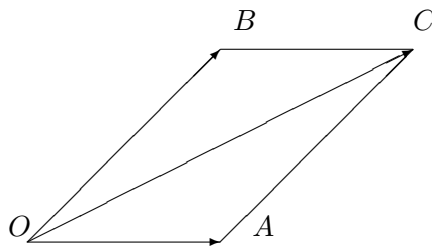
Pokažimo da definicija zbroja ne ovisi o izboru predstavnika. Neka su \vec{a} , \vec{b} dani i svojim predstavnicima $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$. Tada su četverokuti $ABB'A'$ i $BCC'B'$ paralelogrami



pa su dužine $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ paralelne i jednakih duljina, kao i dužine $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$. Dakle, i dužine $\overline{AA'}$ i $\overline{CC'}$ su paralelne i jednakih duljina. Stoga je četverokut $ACC'A'$ paralelogram. Odavde je $\overline{AC} \sim \overline{A'C'}$. Slično se tvrdnja pokazuje i u slučaju kad izabrane točke leže na pravcu.

Zbrajanje vektora može se definirati i na sljedeći način: neka je $O \in E^3$ po volji izabrana točka i neka su \vec{a} i \vec{b} dani svojim predstavnicima s početkom u točki O , $\vec{a} = [\overline{OA}]$, $\vec{b} = [\overline{OB}]$. Zbroj vektora \vec{a} i \vec{b} je vektor $\vec{c} = [\overline{OC}]$, pri čemu je C jedinstvena točka u E^3 takva da je četverokut $OACB$ paralelogram:

$$\vec{a} + \vec{b} = [\overline{OC}]$$



Ovakav način zbrajanja vektora nazivamo **zbrajanje vektora po pravilu paralelograma**.

Ni ova definicija zbrajanja vektora ne ovisi o izboru predstavnika za vektore \vec{a} , \vec{b} . Dokaz se provodi na analogan način kao za pravilo trokuta.

Nadalje, izborom drugog predstavnika za vektor \vec{b} , $\vec{b} = [\overline{AC}]$, lako se je uvjeriti da su definicije zbrajanja vektora po pravilu trokuta i paralelograma ekvivalentne.

Sljedeća operacija koju definiramo je množenje vektora skalarom:

Definicija 1.1.4 Množenje vektora skalarom je operacija $:\mathbb{R} \times V^3 \rightarrow V^3$ koja uređenom paru (α, \vec{a}) pridružuje vektor u oznaci $\alpha\vec{a}$ kojemu je

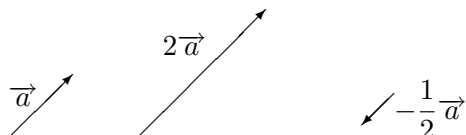
1. modul: $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$,
2. smjer: isti kao smjer od \vec{a} , ako su oba vektora \vec{a} i $\alpha\vec{a}$ različita od nulvektora,
3. orijentacija: jednaka kao orijentacija vektora \vec{a} ako je $\alpha > 0$ i suprotna od nje ako je $\alpha < 0$.

Primijetimo da vrijedi: $\alpha \vec{a} = \vec{0}$ ako i samo ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$. Zaista, ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$, iz definicije odmah slijedi

$$|\alpha \vec{a}| = |\alpha| |\vec{a}| = 0. \quad (1.1)$$

Obratno, ako vrijedi (1.1), tada je jedan ili drugi faktor tog izraza jednak 0, tj. $|\alpha| = 0$ ili $|\vec{a}| = 0$. Iz prve relacije slijedi $\alpha = 0$, a iz druge $\vec{a} = \vec{0}$.

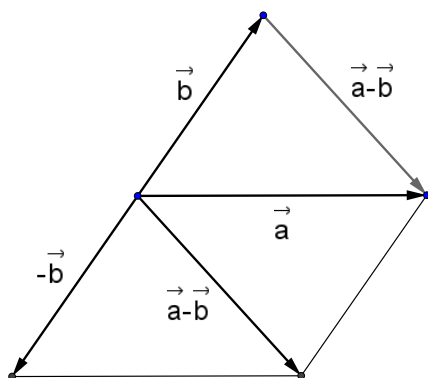
U ovom kontekstu, realne brojeve nazivamo **skalarima**.



Propozicija 1.1.4 Za svaki vektor $\vec{a} \in V^3$ vrijedi $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Dokaz. Kako je vektor jednoznačno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom, usporedimo te veličine za vektore $(-1)\vec{a}$ i $-\vec{a}$: modul vektora $(-1)\vec{a}$ je $|-1| |\vec{a}| = |\vec{a}|$, smjer vektora $(-1)\vec{a}$ jednak je smjeru od \vec{a} , a orijentacija je suprotna, jer je $-1 < 0$. Isto vrijedi i za vektor $-\vec{a}$ suprotan vektoru \vec{a} . Prema tome, navedeni vektori su jednaki. \square

Napomena. Razliku vektora $\vec{a} - \vec{b}$ definiramo kao $\vec{a} + (-\vec{b})$.



Napomena. Uočimo da su vektori \vec{a} i $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ kolinearni, što slijedi iz definicije množenja vektora skalarom. Pokazat ćemo i obrat: ako su vektori $\vec{a} \neq \vec{0}$ i \vec{b} kolinearni, tada postoji jedinstveni skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ (vidi propoziciju 1.2.1).

Teorem 1.1.5 Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ po volji izabrani vektori iz V^3 , α, β realni brojevi, tada vrijedi

1. $\vec{a} + \vec{b} \in V^3$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, asocijativnost

3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, $\vec{0}$ je neutralni element za zbrajanje
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$, $-\vec{a}$ je suprotni element od \vec{a} za zbrajanje
5. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, komutativnost
6. $\alpha \vec{a} \in V^3$
7. $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}$, kvaziasocijativnost
8. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$, distributivnost u odnosu na zbrajanje vektora
9. $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$, distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara
10. $1 \vec{a} = \vec{a}$.

Uz navedena svojstva zbrajanja i množenja skalarom na skupu V^3 , kažemo da je V^3 jedan **vektorski prostor nad** \mathbb{R} (realan vektorski prostor). Općenito, skup na kojemu su definirane operacije zbrajanja elemenata i množenja elemenata skalarima iz \mathbb{R} koje zadovoljavaju svojstva teorema 1.1.5 nazivamo vektorski prostor nad \mathbb{R} . Takve apstraktne strukture proučavat će se u kolegiju **Linearna algebra**.

Dokaz. Tvrdnje 1. i 6. su posljedice definicije.

2. Neka je $\vec{a} = [\vec{AB}]$, $\vec{b} = [\vec{BC}]$, $\vec{c} = [\vec{CD}]$. Tada po pravilu trokuta imamo

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = ([\vec{AB}] + [\vec{BC}]) + [\vec{CD}] = [\vec{AC}] + [\vec{CD}] = [\vec{AD}],$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = [\vec{AB}] + ([\vec{BC}] + [\vec{CD}]) = [\vec{AB}] + [\vec{BD}] = [\vec{AD}].$$

3. Neka je $\vec{a} = [\vec{AB}]$, $\vec{0} = [\vec{AA}]$. Tada je $\vec{0} + \vec{a} = [\vec{AA}] + [\vec{AB}] = [\vec{AB}] = \vec{a}$.

Slično, za drugi dio tvrdnje uzimamo $\vec{0} = [\vec{BB}]$, pa je

$$\vec{a} + \vec{0} = [\vec{AB}] + [\vec{BB}] = [\vec{AB}] = \vec{a}.$$

4. Neka je $\vec{a} = [\vec{AB}]$, $-\vec{a} = [\vec{BA}]$. Tada je

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = [\vec{AB}] + [\vec{BA}] = [\vec{AA}] = \vec{0},$$

$$(-\vec{a}) + \vec{a} = [\vec{BA}] + [\vec{AB}] = [\vec{BB}] = \vec{0}.$$

5. Neka je $\vec{a} = [\vec{AB}]$, $\vec{b} = [\vec{BC}]$. Tada je $\vec{a} + \vec{b} = [\vec{AC}]$.

S druge strane, neka je $D \in E^3$ točka takva da je $\vec{AD} \sim \vec{BC}$. Tada je i $\vec{AB} \sim \vec{DC}$, pa je

$$\vec{b} + \vec{a} = [\vec{BC}] + [\vec{AB}] = [\vec{AD}] + [\vec{DC}] = [\vec{AC}].$$

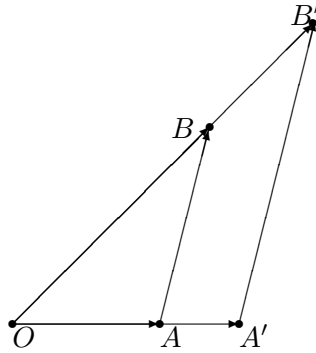
7. Ako je α ili β jednako 0 ili $\vec{a} = \vec{0}$, tvrdnja je očita. Stoga, neka su α i β različiti od 0, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tvrdnju ćemo pokazati tako da ispitamo modul, smjer i orijentaciju vektora s lijeve i desne strane jednakosti:

(a) Modul: $|\alpha(\beta \vec{a})| = |\alpha||\beta \vec{a}| = |\alpha|(|\beta||\vec{a}|) = (|\alpha||\beta|)|\vec{a}| = (|\alpha\beta|)|\vec{a}|;$

(b) Smjer: po definiciji, smjer oba vektora jednak je smjeru vektora \vec{a} ;

(c) Orijetacija: Postoje četiri mogućnosti

- i. Ako je $\alpha > 0, \beta > 0$, tada je $\beta\vec{a}$ orijentiran kao \vec{a} , pa je $\alpha(\beta\vec{a})$ orijentiran kao \vec{a} . S druge strane je $\alpha\beta > 0$, pa je vektor $(\alpha\beta)\vec{a}$ orijentiran kao \vec{a} .
 - ii. Ako je $\alpha > 0, \beta < 0$, tada su vektori $\alpha(\beta\vec{a})$ i $(\alpha\beta)\vec{a}$ orijentirani suprotno od \vec{a} .
 - iii. Ako je $\alpha < 0, \beta > 0$, tada su vektori $\alpha(\beta\vec{a})$ i $(\alpha\beta)\vec{a}$ orijentirani suprotno od \vec{a} .
 - iv. Ako je $\alpha < 0, \beta < 0$, tada su vektori $\alpha(\beta\vec{a})$ i $(\alpha\beta)\vec{a}$ orijentirani jednako kao \vec{a} .
8. Ako je $\alpha = 0$, tvrdnja je očita. Neka je stoga $\alpha \neq 0$. Pretpostavimo najprije da \vec{a} i \vec{b} nemaju isti smjer. Neka je $\vec{a} = [\vec{OA}]$, $\vec{b} = [\vec{AB}]$. Tada je $\vec{a} + \vec{b} = [\vec{OB}]$. Neka je nadalje $\alpha\vec{a} = [\vec{OA}']$. Kako su vektori \vec{a} i $\alpha\vec{a}$ istog smjera, to su točke O, A, A' na istom pravcu. Odaberimo točku B' na pravcu OB tako da su trokuti $\triangle OAB$ i $\triangle OA'B'$ slični.



Iz sličnosti slijedi da je $AB \parallel A'B'$ i $|A'B'| = |\alpha||AB|$, te zaključujemo $[\vec{A'B'}] = \alpha[\vec{AB}] = \alpha\vec{b}$. S druge strane također je $|OB'| = |\alpha||OB|$ i točke O, B, B' leže na istom pravcu, pa je $[\vec{OB'}] = \alpha[\vec{OB}]$. Prema tome, dobili smo

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha[\vec{OB}],$$

$$\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} = [\vec{OA'}] + [\vec{A'B'}] = [\vec{OB'}] = \alpha[\vec{OB}].$$

9. U dokazu ove tvrdnje, opet razmatramo različite mogućnosti za predznake od α, β . Primjerice, pokažimo tvrdnju u slučaju $\alpha > 0, \beta < 0, |\alpha| > |\beta|$, te je $\alpha + \beta > 0$. Neka je $\alpha\vec{a} = [\vec{AB}]$, $\beta\vec{a} = [\vec{BC}]$. Kako su ti vektori kolinearni, točke A, B, C leže na istom pravcu. Nadalje, jer je $\alpha > 0, \beta < 0$, ti su vektori suprotnih orijentacija. Kako je $|\alpha| > |\beta|$, to je

$$|AB| = |\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}| > |\beta||\vec{a}| = |\beta\vec{a}| = |BC|,$$

pa točka C leži između točaka A i B .

Stoga je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a} = [\vec{AC}]$ i vrijedi da se sljedeće veličine podudaraju:

- (a) moduli vektora: $|\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}| = |AC| = |\alpha||\vec{a}| - |\beta||\vec{a}| = \alpha|\vec{a}| + \beta|\vec{a}| = (\alpha + \beta)|\vec{a}| = |\alpha + \beta||\vec{a}| = |(\alpha + \beta)\vec{a}|$,
- (b) smjerovi vektora: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ i $(\alpha + \beta)\vec{a}$,
- (c) orijentacije vektora: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ i $(\alpha + \beta)\vec{a}$, jer su jednako orijentirani kao \vec{a} .

10. Vektori $1\vec{a}$ i \vec{a} očito imaju isti modul, smjer i orijentaciju.

□

Napomena. Pojam vektora može se uvesti i drugačije – kao *uputa za gibanje*, primjerice ”Kreni 1 km prema sjeveru”. Takva uputa je smislena bez obzira na kojem mjestu (u kojoj točki) se nalazimo. Uputu matematički izražavamo kao funkciju, tj. pravilo kojim utvrđujemo koja je točka pridružena zadanoj točki.

Napomena. Osvrnimo se još jednom na dosad uvedene pojmove. Vektor smo definirali polazeći od nedefiniranih pojmova (točka, pravac, ravnina) i aksiomatski uvedene euklidske geometrije. Možemo krenuti i obratno: polazeći od aksiomatski uvedenog pojma vektora kao elementa apstraktnog vektorskog prostora i zadanog skupa točaka, možemo definirati elemente euklidske geometrije (pravac, ravninu). Takav pristup definira tzv. *afini prostor*. Više o tome na kolegiju **Euklidski prostori**.

Napomena. U srednjoj školi vektor se ne uvodi kao klasa ekvivalencije na skupu svih orijentiranih dužina. Vektor se definira kao jedna orijentirana dužina, a zatim se definira kad su vektori jednaki. Ne ističe se uvijek ni orijentacija vektora. Vektor je karakteriziran duljinom i smjerom, a pod smjerom se podrazumijeva i pravac određen vektorom kao i orijentacija vektora.

Zadaci

1. Koliko različitih (a) orijentiranih dužina, (b) vektora određuju (međusobo različiti) vrhovi kvadrata $ABCD$?

$$\left[\text{a) } 12, \text{ b) } 8 \right]$$

2. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut i O njegovo središte. Koliko različitih vektora određuju stranice šesterokuta? Svakom od tih vektora odredite predstavnika s početnom točkom O .

$$\left[6 \text{ vektora; } \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}, \right. \\ \left. \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DE} \right]$$

3. Na crtežu paralelograma ilustrirajte jednakost

$$\text{(a) } \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\text{(b) } \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b}$$

4. U trokutu ABC , točka K je polovište stranice \overline{BC} . Izrazite vektor \overrightarrow{AK} pomoću vektora $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$.

$$\left[\overrightarrow{AK} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right]$$

5. Neka je ABC trokut, A_1 , B_1 i C_1 polovišta stranica \overline{BC} , \overline{CA} i \overline{AB} redom, a T njegovo težište.

$$\text{(a) Izrazite vektore } \overrightarrow{TA} \text{ i } \overrightarrow{BC} \text{ pomoću } \overrightarrow{TB_1} \text{ i } \overrightarrow{TC_1}.$$

$$\text{(b) Izrazite vektore } \overrightarrow{AC} \text{ i } \overrightarrow{A_1T} \text{ pomoću } \overrightarrow{TA} \text{ i } \overrightarrow{TB}.$$

$$\left[\text{a) } \overrightarrow{TA} = 2\overrightarrow{TB_1} + 2\overrightarrow{TC_1}, \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{TB_1} - 2\overrightarrow{TC_1}; \right. \\ \left. \text{b) } \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{TA} - \overrightarrow{TB}, \overrightarrow{A_1T} = \frac{1}{2}\overrightarrow{TA}. \right]$$

6. Neka je $ABCD A' B' C' D'$ kocka, neka je O njeno središte, a P polovište brida $\overline{BB'}$. Izrazite vektor \overrightarrow{OP} pomoću vektora \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} i $\overrightarrow{AA'}$.

$$\left[\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right]$$

7. Neka je $ABCD A' B' C' D'$ kvadar. Pokažite da je suma vektora $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{B'D}$, $\overrightarrow{CA'}$ i $\overrightarrow{D'B}$ nulvektor.
8. Neka su P, Q, R redom polovišta bridova \overline{AB} , \overline{BC} i \overline{CA} tetraedra $OABC$. Dokažite da je $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$.
9. Dana je četverostrana piramida čija je baza paralelogram $ABCD$, a vrh točka V . Ako je S sjecište dijagonala paralelograma, pokažite da je $\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC} + \overrightarrow{VD} = 4\overrightarrow{VS}$.
10. Sportski zrakoplov leti svojom vlastitom brzinom od 150 km/h od sjevera prema jugu. Tada počne puhati vjetar sjeverozapadnog smjera brzinom 30 km/h. Nacrtajte vektor brzine zrakoplova (u odnosu na Zemlju) i izračunajte njegov modul.

1.2 Baza vektorskog prostora V^3 . Koordinatizacija

Već smo definirali kolinearne vektore kao vektore istog smjera. Uočili smo i da su vektori \vec{a} i $\alpha\vec{a}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ kolinearni. Vrijedi i ovakav obrat:

Propozicija 1.2.1 *Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ kolinearni vektori, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tada postoji jedinstven skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.*

Dokaz. Ako je $\vec{b} = \vec{0}$, stavimo $\lambda = 0$. Očito je $\lambda = 0$ jedini takav skalar.

Ako $\vec{b} \neq \vec{0}$, uočimo skalar $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \neq 0$ i usporedimo vektore \vec{b} i $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$. Oni imaju jednak modul

$$\left| \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = |\vec{b}|,$$

i jednak smjer, jer je vektor $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$ po definiciji množenja vektora skalarom kolinearan s \vec{a} .

Njihove orijentacije ne moraju biti jednake, vektor $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$ ima istu orijentaciju kao \vec{a} , dok vektor \vec{b} ne mora imati. No, izborom predznaka skalara $\lambda = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, postizemo da su vektori \vec{b} i $\lambda\vec{a}$ i jednako orijentirani. Iz svega navedenog zaključujemo da se oni podudaraju

$$\vec{b} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

Pokažimo još da je skalar λ iz tvrdnje jednoznačno određen. Pretpostavimo da postoje dva takva skalara, $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\vec{b} = \lambda'\vec{a}$. Tada vrijedi $\lambda\vec{a} = \lambda'\vec{a}$, odnosno $(\lambda - \lambda')\vec{a} = \vec{0}$, iz čega slijedi, zbog $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\lambda - \lambda' = 0$. \square

Sad smo kolinearnost vektora (geometrijski pojam) uspjeli realizirati algebarski. Malu smetnju u prethodnoj propoziciji čini nesimetričnost pretpostavke $\vec{a} \neq \vec{0}$. No, to možemo riješiti na sljedeći način. Uvjet iz prethodne propozicije možemo zapisati i kao

$$\lambda \vec{a} - \vec{b} = \vec{0}. \quad (1.2)$$

Ako vektorima \vec{a} , \vec{b} zamijenimo uloge, tada imamo

$$-\vec{a} + \lambda \vec{b} = \vec{0}. \quad (1.3)$$

Ovo vodi na promatranje općenitije jednadžbe za zadane vektore \vec{a} , \vec{b}

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}. \quad (1.4)$$

Tražimo skalare α , β za koje je ta jednadžba ispunjena. Jedna mogućnost kada je ta jednadžba svakako ispunjena je $\alpha = \beta = 0$. Takav izbor skalara nazivamo trivijalnim. Iz jednakosti (1.2), (1.3) slijedi da je u slučaju kad su vektori \vec{a} , \vec{b} kolinearni jednakost ispunjena i za $\alpha = \lambda$, $\beta = -1$ za (1.2), odnosno $\alpha = -1$, $\beta = \lambda$ za (1.3). Dakle, u slučaju kad su vektori \vec{a} , \vec{b} kolinearni, jednakost (1.4) je ispunjena i za netrivialni izbor skalara.

Obratno, ako je primjerice $\alpha \neq 0$, tada je moguće pisati

$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{b},$$

iz čega slijedi da su vektori \vec{a} , \vec{b} kolinearni. Analogno vrijedi u situaciji ako je $\beta \neq 0$. Time smo dokazali sljedeću propoziciju:

Propozicija 1.2.2 *Vektori \vec{a} , \vec{b} su kolinearni ako i samo ako postoji netrivialan izbor skalara $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$.*

Definicija 1.2.1 *Izraz oblika $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ zove se **linearna kombinacija** vektora \vec{a} , \vec{b} s koeficijentima α, β . Analogno i za k vektora, izraz oblika $\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k$ zove se **linearna kombinacija** vektora $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ s koeficijentima $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.*

Definicija 1.2.2 *Za vektore \vec{a} , \vec{b} kažemo da su **nekolinearni** ako nisu kolinearni.*

Iz prethodnih propozicija slijedi:

Propozicija 1.2.3 *Vektori \vec{a} , \vec{b} su nekolinearni ako i samo ako je jednakost $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$ ispunjena samo za trivijalan izbor skalara $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Drugačije rečeno:

Propozicija 1.2.4 *Vektori \vec{a} , \vec{b} su nekolinearni ako i samo ako iz jednakosti $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$ slijedi $\alpha = \beta = 0$.*

Ili:

Propozicija 1.2.5 *Vektori \vec{a} , \vec{b} su nekolinearni ako i samo ako jednadžba $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$ ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = 0$.*

Definicija 1.2.3 Kažemo da je vektor $\vec{a} = [\overline{AB}]$ **paralelan** s ravninom $\pi \subset E^3$, $\vec{a} \parallel \pi$, ako je pravac AB paralelan sa π (pravac je paralelan s ravninom ako je paralelan s nekim pravcem u ravnini). Za vektore koji su paralelni s istom ravninom, kažemo da su **komplanarni**.

Definicija paralelnosti vektora očito ne ovisi o izboru predstavnika.

Propozicija 1.2.6 Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i neka je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Tada su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni.

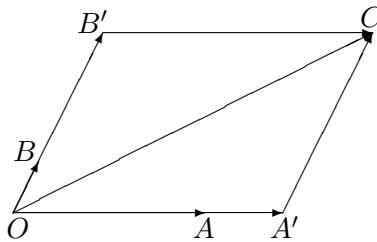
Dokaz. Po definiciji zbrajanja vektora (pravilom trokuta ili paralelograma) slijedi da je zbroj vektora paralelan s ravninom određenom zadanim vektorima. \square

Zanimljiv je obrat prethodne propozicije:

Propozicija 1.2.7 Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ nekolinearni vektori, te neka je $\vec{c} \in V^3$ s njima komplanaran vektor. Tada postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Dokaz. Neka je $O \in E^3$ bilo koja točka, $\vec{a} = [\overline{OA}]$, $\vec{b} = [\overline{OB}]$, $\vec{c} = [\overline{OC}]$. Kako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni, točke O, A, B, C leže u istoj ravnini, a jer \vec{a}, \vec{b} nisu kolinearni, točke O, A, B ne leže na istom pravcu.



Projicirajmo paralelno točku C na pravac OA i na pravac OB . Dobivamo točke A' na pravcu OA i B' na pravcu OB , takve da je $OA'CB'$ paralelogram. Iz definicije zbrajanja vektora po pravilu paralelograma slijedi

$$[\overline{OC}] = [\overline{OA'}] + [\overline{OB'}].$$

Vektor $[\overline{OA'}]$ je kolinearan s vektorom $[\overline{OA}]$, pa primjenom propozicije 1.2.1 zaključujemo da postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $[\overline{OA'}] = \alpha[\overline{OA}]$. Analogno postoji $\beta \in \mathbb{R}$ takav da je $[\overline{OB'}] = \beta[\overline{OB}]$. Time smo dobili

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Dokažimo još jedinstvenost prikaza.

Neka je također $\vec{c} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}$. Tada slijedi $(\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b} = \vec{0}$. Kako su \vec{a}, \vec{b} nekolinearni vektori, to je moguće jedino ako je $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ (propozicija 1.2.4). \square

Osvrnimo se na trenutak na V^2 . Uočimo da u V^2 uvijek možemo naći dva nekolinearna vektora (posljedica aksioma, u ravnini postoje tri nekolinearne točke). Prethodna propozicija, adaptirana za V^2 glasi:

Propozicija 1.2.8 Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$ nekolinearni vektori, te neka je $\vec{c} \in V^2$ po volji odabran vektor. Tada postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

Uočimo dva momenta: **postojanje** (egzistencija) rastava i **jedinstvenost** rastava vektora \vec{c} . Ako bismo odabrali tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^2$ i vektor \vec{d} kojeg želimo napisati kao njihovu linearnu kombinaciju, tada bi prikaz postojao, ali ne bi bio jedinstven (ispitajte na primjeru). Slično, samo s jednim vektorom ne bismo mogli prikazati sve druge vektore iz V^2 , prikaz ne bi postojao. Dakle, skup od dva nekolinearna vektora je najmanji mogući koji zadovoljava oba svojstva. U tom smislu definiramo:

Definicija 1.2.4 Baza vektorskog prostora V^2 je skup $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ od dva nekolinearna vektora.

Uočimo da postoje mnoge različite baze, ali svima je zajedničko da sadrže točno dva nekolinearna vektora. Kažemo da je V^2 dvodimenzionalan vektorski prostor. Pišemo $\dim V^2 = 2$.

U V^3 dva vektora nisu dovoljna za prikaz po volji odabranog vektora. Uočimo da u V^3 uvijek možemo naći tri nekomplanarna vektora.

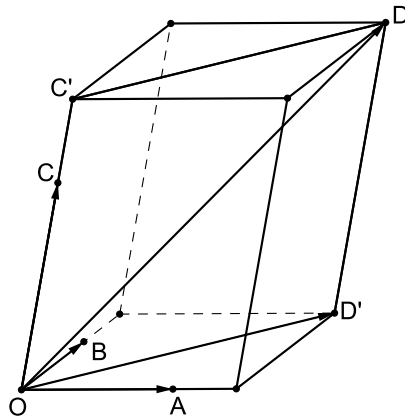
Propozicija 1.2.9 Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ tri nekomplanarna vektora. Ako je $\vec{d} \in V^3$ bilo koji vektor, onda postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

Dokaz. Neka je $O \in E^3$ bilo koja točka, $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$, $\vec{c} = [\overrightarrow{OC}]$, $\vec{d} = [\overrightarrow{OD}]$.

Kako $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nisu komplanarni, točke O, A, B, C ne leže u istoj ravnini. Uočimo i da nikoja dva među vektorima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nisu kolinearna.

Projicirajmo točku D paralelno s pravcem OC na ravninu OAB i označimo projiciranu točku s D' . Projicirajmo još točku D paralelno s ravninom OAB na pravac OC i označimo projiciranu točku sa C' .



Očito je

$$[\overrightarrow{OD}] = [\overrightarrow{OD'}] + [\overrightarrow{OC'}].$$

Vektori \vec{a} , \vec{b} , $[\overrightarrow{OD}']$ su komplanarni, te po propoziciji 1.2.7 postoje skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$[\overrightarrow{OD}'] = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

Nadalje, vektor $[\overrightarrow{OC}']$ je kolinearan s vektorom $[\overrightarrow{OC}]$, pa po propoziciji 1.2.1 postoji skalar $\gamma \in \mathbb{R}$ takav da je

$$[\overrightarrow{OC}'] = \gamma \vec{c}.$$

Prethodna tri zaključka, daju tvrdnju.

Dokažimo još jedinstvenost prikaza. Ako vrijedi i $\vec{d} = \alpha' \vec{a} + \beta' \vec{b} + \gamma' \vec{c}$ i kad bi bilo $\gamma \neq \gamma'$, slijedilo bi

$$\vec{c} = \frac{1}{\gamma' - \gamma} \left((\alpha - \alpha') \vec{a} + (\beta - \beta') \vec{b} \right),$$

što bi značilo da su \vec{a} , \vec{b} , $\vec{c} \in V^3$ komplanarni, suprotno pretpostavci. Analogno se isključuju mogućnosti $\alpha \neq \alpha'$, $\beta \neq \beta'$. \square

Sada definiramo:

Definicija 1.2.5 *Bilo koji skup $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ od tri nekomplanarna vektora nazivamo **bazom** od V^3 . Kažemo da je V^3 trodimenzionalan vektorski prostor.*

Pogledajmo još jednom propoziciju 1.2.7. Jednakost iz te propozicije možemo zapisati i na sljedeći način

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} - 1 \vec{c} = \vec{0}.$$

Dakle, u ovom je slučaju jednadžba

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}$$

ispunjena na netrivialan način. Sličnim razmatranjem kao i u slučaju dva nekolinearna vektora, pokazat ćemo:

Propozicija 1.2.10 *Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ su nekomplanarni ako i samo ako jednakost*

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0} \tag{1.5}$$

povlači $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni. Dakle, oni čine bazu za V^3 . Tada se svaki vektor, pa i $\vec{0}$, može na jedinstveni način prikazati kao njihova linearna kombinacija. Kako je za $\vec{0}$ svakako jedan prikaz

$$0 \vec{a} + 0 \vec{b} + 0 \vec{c} = \vec{0},$$

jedinstvenost prikaza povlači da je to upravo traženi prikaz, dakle, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Obratno, neka je ispunjen uvjet propozicije, iz jednadžbe (1.5) slijedi $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Uočimo najprije da je svaki od vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ različit od nulvektora. Naime, kad bi neki bio nulvektor, npr. $\vec{a} = \vec{0}$, tada bismo mogli uzeti bilo koji skalar različit od 0 i pritom bi jednadžba (1.5) i dalje bila ispunjena, ali uvjet da iz nje slijedi $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ne bi bio ispunjen, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Slično, nikoja dva vektora nisu kolinearna. Naime, kad bi \vec{a} , \vec{b} bili kolinearni, tada bi postojao $\lambda \neq 0$, takav da je $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, pa bi uz $\gamma = 0$ mogli naći netrivialne skalare α, β tako da je jednadžba (1.5) zadovoljena, ali uvjet iz propozicije opet ne.

Pretpostavimo još na kraju da je $\vec{c} \neq \vec{0}$ komplanaran s \vec{a} , \vec{b} . Tada bi postojali skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ koji nisu istovremeno 0, te bismo mogli pisati

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + (-1) \vec{c} = \vec{0},$$

što je opet kontradikcija s pretpostavkom. □

Napomena. U kolegiju Linearna algebra definirat će se: Skup vektora $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$ je **linearno nezavisan** ako $\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}$ povlači $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. U suprotnom se kaže da je skup **linearno zavisian** (dakle, vrijedi prva jednadžba i postoje netrivialni skalari za koje je ispunjena). Specijalizacijom te definicije za $k = 2$ dobivamo da je skup vektora u V^2 linearno nezavisan ako i samo ako su vektori nekolinearni, a za $k = 3$ skup vektora u V^3 je linearno nezavisan ako i samo ako su vektori nekomplanarni. U V^2 skup od bilo koja tri vektora je linearno zavisian, a u V^3 skup od bilo koja četiri vektora je linearno zavisian.

Neka je u V^3 zadana baza $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ i neka je $\vec{a} \in V^3$ neki vektor. Tada po propoziciji 1.2.8 postoje jedinstveni skalari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{a}_i.$$

Sljedeće preslikavanje nazivamo **koordinatizacija** prostora V^3

$$k : V^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad k(\vec{a}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

gdje je $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ skup svih uređenih trojki realnih brojeva.

Očito vrijedi:

Propozicija 1.2.11 *Preslikavanje k je bijekcija.*

Ovim je postupkom vektor predstavljen (na jednoznačan način) kao uređena trojka realnih brojeva. Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nazivamo **koordinatama** vektora \vec{a} u odnosu na zadanu bazu, a uređenu trojku $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ **koordinatnim prikazom** vektora \vec{a} . Uočimo da koordinate odnosno koordinatni prikaz vektora ovisi o zadanoj bazi! Pišemo $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ kad znamo s obzirom na koju bazu smo koordinatizirali V^3 .

Slično bismo koordinatizirali V^1 i V^2 . Za V^2 definiramo

$$k : V^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad k(\vec{a}) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

gdje je $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2$ za bazu $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, a \mathbb{R}^2 je skup svih uređenih parova realnih brojeva $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Za V^1 definiramo

$$k : V^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad k(\vec{a}) = \alpha_1,$$

gdje je $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1$, a $\{\vec{a}_1 \neq \vec{0}\}$ baza od V^1 .

Promotrimo kako se zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom realiziraju u njihovim koordinatnim prikazima. Neka je u V^3 zadana baza $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ i neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 + \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \beta_3 \vec{a}_3 \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \vec{a}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{a}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{a}_3,\end{aligned}$$

te je koordinatni prikaz vektora $\vec{a} + \vec{b}$ jednak

$$(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3).$$

Slično $\lambda \vec{a} = \lambda \alpha_1 \vec{a}_1 + \lambda \alpha_2 \vec{a}_2 + \lambda \alpha_3 \vec{a}_3$, te je koordinatni prikaz vektora $\lambda \vec{a}$ jednak

$$(\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3).$$

Specijalno $-\vec{a} = (-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3)$.

Kada su vektori kolinearni? Po propoziciji 1.2.1 za kolinearne vektore $\vec{a} \neq \vec{0}$, \vec{b} postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ iz čega slijedi da za koordinate vektora dobivamo

$$\beta_i = \lambda \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dakle, vektori su kolinearni ako za njihove koordinate vrijedi $\beta_1 : \alpha_1 = \beta_2 : \alpha_2 = \beta_3 : \alpha_3$ ili drugačije zapisano $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3$.

Napomena. Ako u \mathbb{R}^3 definiramo zbrajanje uređenih trojki i množenje uređenih trojki skalarom formulama

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$$

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3),$$

tada \mathbb{R}^3 ispunjava uvjete teorema 1.1.5, te postaje vektorski prostor nad \mathbb{R} . Slično vrijedi za \mathbb{R}^2 i \mathbb{R} .

Napomena. Koordinate vektora vrlo često pišemo i u stupce

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Zapis na desnoj strani jednakosti predstavlja jednostupčanu matricu s tri retka. Skup svih takvih matrica označava se s $M_{31}(\mathbb{R})$. Koordinatizaciju vektora tada definiramo kao preslikavanje $k : V^3 \rightarrow M_{31}(\mathbb{R})$. Više o tome na **Linearnoj algebri**.

Zadaci

1. Neka su \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} radijus-vektori točaka A , B , C . Odredite radijus-vektor točke D tako da $ABCD$ bude paralelogram. Odredite radijus-vektor sjecišta dijagonala tog paralelograma.

$$\left[\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \vec{s} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{c} \right]$$

2. Dane su četiri točke A, B, C, D . Neka su P i Q polovišta dužina \overline{AB} i \overline{CD} redom. Dokažite da je $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{PQ}$.
 3. Dokažite da je četverokut paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.
 4. Pomoću vektora dokažite tvrdnju: polovišta stranica bilo kojeg četverokuta tvore paralelogram.
 5. Neka je ABC trokut i T njegovo težište. Neka su A_1, B_1, C_1 redom točke simetrične vrhovima A, B, C u odnosu na težište, tj. takve da dužine AA_1, BB_1 i CC_1 imaju zajedničko polovište T . Dokažite da je težište trokuta $A_1B_1C_1$ točka T .
 6. Dokažite da trokutu $\triangle ABC$ i $\triangle PQR$ imaju zajedničko težište ako i samo ako je $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \vec{0}$. (Uputa: prikažite vektor određen njihovim težištima pomoću vektora $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BQ}$ i \overrightarrow{CR} .)
 7. Tetraedar ima tri para nasuprotnih bridova. Dokažite da dužine koje spajaju polovišta nasuprotnih bridova tetraedra prolaze istom točkom.
 8. Dijagonale četverokuta $ABCD$ se sijeku u točki S . Dokažite: ako je $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$, onda je $ABCD$ paralelogram.
 9. Neka je $ABCV$ pravilna uspravna trostrana piramida s vrhom V . Neka su A_1, B_1 i C_1 točke redom na bridovima $\overline{AV}, \overline{BV}$ i \overline{CV} , takve da je $|VA_1| : |A_1A| = 2 : 1$, $|VB_1| : |B_1B| = 2 : 1$ i $|VC_1| : |C_1C| = 2 : 1$.
 - (a) Dokažite da je $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$.
 - (b) Ako je S središte trokuta ABC , da li su vektori $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{CA_1}$ i \overrightarrow{VS} linearno zavisni, linearno nezavisni, ili je to ovisno o obliku piramide?
- [b) 4 vektora u V^3 su uvijek linearno zavisna; vrijedi $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1} = -\overrightarrow{VS}$]
10. Dokažite sljedeće tvrdnje:
 - (a) Ako je među vektorima barem jedan nulvektor, oni su linearno zavisni.
 - (b) Bilo koja dva kolinearna vektora su linearno zavisna.
 - (c) Svaki vektor prostora V^2 može se na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija vektora baze tog prostora.
 - (d) Svaka tri vektora prostora V^2 su linearno zavisna.
 - (e) Svaki vektor prostora V^3 može se na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija vektora baze tog prostora.
 - (f) Svaka četiri vektora prostora V^3 su linearno zavisna.
 - (g) Svaki podskup linearno nezavisnog skupa vektora je linearno nezavisan.
 11. Što je baza vektorskog prostora V^1 ? Kolika je njegova dimenzija?
 12. Neka je $OABCDE$ pravilan šesterokut. Odredite koordinate vektora $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$ u bazi $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$.

$$\left[\overrightarrow{AB} = (-1, 1), \overrightarrow{BC} = (-2, 1), \overrightarrow{OC} = (-2, 2), \overrightarrow{OD} = (-3, 2), \overrightarrow{OE} = (-2, 1) \right]$$

13. Ako je $\vec{a} = (3, -4, 1)$, $\vec{b} = (0, 2, -3)$ i $\vec{c} = (1, -2, 3)$ izračunajte $3\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$.

$$\left[(7, -4, 9) \right]$$

14. Prikažite, ako je moguće, vektor $(3, 4, 5)$ kao linearnu kombinaciju vektora $(1, 1, 1)$ i $(1, 2, 3)$.

$$\left[2 \cdot (1, 1, 1) + (1, 2, 3) \right]$$

15. Da li je $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ baza od V^3 ?

$$\left[\text{Ne, jer vektori nisu linearno nezavisni; } (1, 1, 1) = (1, 1, 0) + (0, 0, 1) \right]$$

16. Čine li vektori

(a) $\vec{a} = (3, -4, 1)$, $\vec{b} = (0, 2, -3)$ i $\vec{c} = (1, -2, 3)$

(b) $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 0, -2)$ i $\vec{c} = (5, -4, 3)$

bazu prostora V^3 ?

$$\left[\text{a) Da; b) Da.} \right]$$

17. Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ baza u V^3 . Da li su sljedeći vektori linearno nezavisni?

(a) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{j}$, $\vec{c} = 2.3\vec{j} - 1.5\vec{k}$, $\vec{d} = \pi\vec{i} - 2.32\vec{k}$

(b) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

(c) $\vec{a} = \vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j}$

(d) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$

(e) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$$\left[\text{a) Ne; b) Ne; c) Da; d) Ne; e) Da} \right]$$

18. Prikažite, ako je moguće, vektor \vec{x} kao linearnu kombinaciju vektora \vec{a} i \vec{b} , odnosno \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} .

(a) $\vec{x} = (2, -3)$, $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1, -1)$

(b) $\vec{x} = (-2, 10)$, $\vec{a} = (5, 1)$, $\vec{b} = (2, 3)$

(c) $\vec{x} = (1, -2)$, $\vec{a} = (-2, 4)$, $\vec{b} = (2, 3)$

(d) $\vec{x} = (2, 1, 3)$, $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, 3, 4)$

(e) $\vec{x} = (2, -3, 4)$, $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$, $\vec{c} = (1, 0, 0)$

(f) $\vec{x} = (1, 2, -5)$, $\vec{a} = (1, -1, -1)$, $\vec{b} = (2, 1, 4)$, $\vec{c} = (1, 1, 3)$

(g) $\vec{x} = (0, 1, -2)$, $\vec{a} = (1, -1, -1)$, $\vec{b} = (2, 1, 4)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$

(h) $\vec{x} = (0, 1, -2)$, $\vec{a} = (1, -1, -1)$, $\vec{b} = (2, 4, 4)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$

$$\left[\text{a) } \vec{x} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{7}{3}\vec{b}, \text{ b) } \vec{x} = -2\vec{a} + 4\vec{b}, \text{ c) } \vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{a}, \text{ d) nije moguće,} \right.$$

$$\left. \text{e) } \vec{x} = 4\vec{a} - 7\vec{b} + 5\vec{c}, \text{ f) nije moguće, g) } \vec{x} = -\vec{b} + 2\vec{c}, \text{ h) nije moguće.} \right]$$

19. Odredite $t \in \mathbb{R}$ tako da vektor \vec{w} bude linearna kombinacija vektora \vec{u} i \vec{v} , ako je:

(a) $\vec{u} = (t - 1, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, -2, t)$, $\vec{w} = (-4, -4, 3)$;

(b) $\vec{u} = (t - 2, 1, -1)$, $\vec{v} = (1, t, 2)$, $\vec{w} = (-1, 1, 1)$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) Za } t = 3 \text{ vrijedi } \vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v}, \text{ a za } t = -\frac{1}{2} \text{ je } \vec{w} = 4\vec{u} + 2\vec{v}; \\ \text{b) Za } t = 0 \text{ vrijedi } \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}, \text{ a za } t = 5 \text{ je } \vec{w} = -\frac{3}{7}\vec{u} + \frac{2}{7}\vec{v}. \end{array} \right]$$

20. U ovisnosti o realnom parametru m ispitaajte linearnu zavisnost i nezavisnost vektora $(1, 0, 1)$, $(m, m, 0)$ i $(m - 1, 1, -1)$.

$$\left[\text{Za } m = 0 \text{ i } m = 1 \text{ vektori su linearno zavisni, inače su lin. nezavisni.} \right]$$

21. Dan je trapez $ABCD$ s osnovicama \overline{AB} i \overline{CD} . Dokažite da su vektori $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ i \overrightarrow{AB} kolinearni.

22. Dokažite da sve tri težišnice trokuta prolaze istom točkom. U kojem omjeru težište dijeli težišnice?

23. Dan je trokut ABC . Neka je M točka na stranici \overline{BC} , takva da je $|BM| : |MC| = 3 : 1$ i neka je N točka na dužini \overline{AM} takva da je $|AN| : |NM| = 2 : 3$. Neka je P točka u kojoj pravac BN siječe stranicu \overline{AC} . Odredite $|AP| : |PC|$.

$$\left[|AP| : |PC| = 1 : 2 \right]$$

24. Neka je ABC trokut. Točke M i N su zadane sa $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$, te T kao sjecište pravaca BN i AC . Odredite u kojem omjeru točka T dijeli dužinu \overline{AC} .

$$\left[|AT| : |TC| = 3 : 1 \right]$$

25. U paralelogramu $ABCD$ točka P je polovište stranice \overline{CD} , a točka R sjecište \overline{AP} i dijagonale \overline{BD} . U kojim omjerima točka R dijeli dužine \overline{AP} i \overline{BD} ?

$$\left[|AR| : |RP| = 2 : 1, |BR| : |RD| = 2 : 1 \right]$$

26. Zadan je trokut ABC i točke M i N na stranicama AB i BC redom takve da je $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$. Neka je T sjecište pravaca AN i CM . Odredite omjer u kojem točka T dijeli dužinu \overline{CM} .

$$\left[|CT| : |TM| = 3 : 2 \right]$$

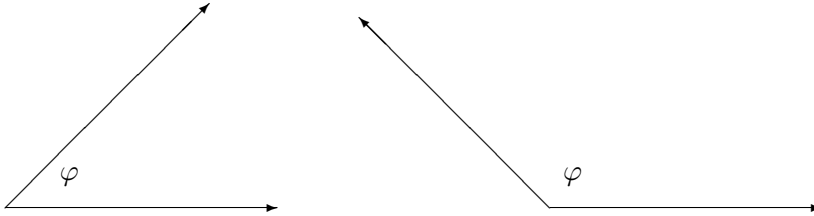
27. Zadan je paralelogram $ABCD$ i točka T na stranici \overline{AB} tako da je $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$. Neka je S presjek dužina \overline{AC} i \overline{TD} . U kojem omjeru točka S dijeli dužinu \overline{AC} ?

$$\left[|AS| : |SC| = 1 : n \right]$$

28. Neka je T po volji odabrana točka unutar trokuta ABC . Dokažite da postoje skalari t_1, t_2, t_3 takvi da vrijedi $0 < t_i < 1$, $i = 1, 2, 3$, $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ i $\overrightarrow{OT} = t_1\overrightarrow{OA} + t_2\overrightarrow{OB} + t_3\overrightarrow{OC}$.

1.3 Skalarni produkt. Ortonormirana baza

Da bismo definirali skalarni produkt dvaju vektora, prvo trebamo uvesti pojam kuta. Pod kutom dvaju ne-nulvektora podrazumijevamo mjeru (veličinu) manjeg od dva kuta polupravaca koji su određeni tim vektorima. Prema tome, kut dvaju vektora je element skupa $[0, \pi]$.



Ako je jedan od vektora \vec{a} , \vec{b} nulvektor, tada kut između njih ne definiramo.

Očito je kut dvaju vektora dobro definiran pojam, tj. ne ovisi o izboru predstavnika vektora (kutovi s paralelnim kracima!).

Nadalje vrijedi i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{a})$.

Ako je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, tada kažemo da su vektori \vec{a} , \vec{b} okomiti, pišemo $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Uočimo da su vektori \vec{a} , \vec{b} kolinearni ako i samo ako je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ ili $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$. U prvom su slučaju vektori jednako, a u drugom suprotno orijentirani.

Definicija 1.3.1 *Skalarno množenje vektora je operacija $\cdot : V^3 \times V^3 \rightarrow \mathbb{R}$ koja vektorima \vec{a} , \vec{b} različim od nulvektora pridružuje skalar*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Ako je neki od vektora \vec{a} , \vec{b} nulvektor, tada definiramo $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Vrijednost $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$ nazivamo **skalarnim umnoškom** ili **skalarnim produktom** vektora \vec{a} i \vec{b} .

Pomoću skalarnog produkta možemo karakterizirati okomitost vektora:

Propozicija 1.3.1 *Neka su $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0} \in V^3$. Vektori \vec{a} , \vec{b} su okomiti ako i samo ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.*

Dokaz. Kako su $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, očito je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

ako i samo ako je $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, što znači $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. □

Pomnožimo li skalarno vektor \vec{a} sa samim sobom, dobivamo **skalarni kvadrat** vektora \vec{a} , pišemo $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$.

Skalarno množenje ima sljedeća svojstva:

Teorem 1.3.2 Za sve $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

1. $\vec{a}^2 \geq 0$,
2. $\vec{a}^2 = 0$ ako i samo ako je $\vec{a} = \vec{0}$,
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, komutativnost
4. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$, kvaziasocijativnost
5. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, distributivnost prema zbrajanju.

Prva dva svojstva skalarnog produkta nazivaju se *pozitivna definitnost*.

Dokaz.

1. $\vec{a}^2 = |\vec{a}||\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \geq 0$.
2. $\vec{a}^2 = 0$ ako i samo ako je $|\vec{a}| = 0$, dakle, ako i samo ako je $\vec{a} = \vec{0}$.
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}||\vec{a}| \cos \angle(\vec{b}, \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
4. Ako je $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, tvrdnja je očita.
Uzmimo zato $\lambda \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Ako je $\lambda > 0$, tada je $|\lambda \vec{a}| = \lambda |\vec{a}|$ i $\angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, pa je

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} &= |\lambda \vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) \\ &= \lambda |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}). \end{aligned}$$

Ako je $\lambda < 0$, tada je $|\lambda \vec{a}| = -\lambda |\vec{a}|$ i $\angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})$, pa je

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} &= |\lambda \vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) \\ &= -\lambda |\vec{a}||\vec{b}| (-\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}). \end{aligned}$$

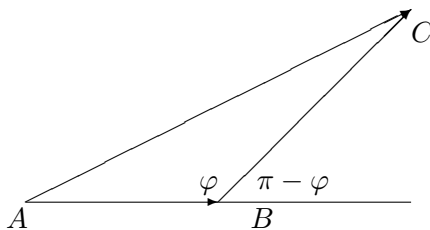
□

Za dokaz tvrdnje 5. treba nam sljedeća lema:

Lema 1.3.3 Za sve $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

- (a) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$,
- (b) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

Dokaz. (a) Uzmimo da \vec{a} i \vec{b} nisu kolinearni. Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$, tada je $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{AC}]$.



Primjenom kosinusovog poučka na trokut $\triangle ABC$ dobivamo

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b})^2 &= \vec{c}^2 = |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi - \varphi) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}.\end{aligned}$$

Ako su \vec{a} i \vec{b} kolinearni vektori iste orijentacije, $\vec{a} = [\overline{AB}]$, $\vec{b} = [\overline{BC}]$, $\vec{a} + \vec{b} = [\overline{AC}]$, tada je

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b})^2 &= \vec{c}^2 = |\vec{c}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 0 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}.\end{aligned}$$

Slično se pokazuje ako su \vec{a} i \vec{b} kolinearni vektori suprotne orijentacije.

(b) Tvrdnja se dokazuje analogno. □

Dokaz. Nastavak dokaza teorema 1.3.2, tvrdnja 5:

$$\begin{aligned}4(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= 4\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (2\vec{c} + (\vec{a} + \vec{b}))^2 - 4\vec{c}^2 - (\vec{a} + \vec{b})^2 \\ &= (2\vec{c} + (\vec{a} + \vec{b}))^2 - 4\vec{c}^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 \\ &= ((\vec{a} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{c}))^2 + ((\vec{a} + \vec{c}) - (\vec{b} + \vec{c}))^2 - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 - 4\vec{c}^2 \\ &= 2(\vec{a} + \vec{c})^2 + 2(\vec{b} + \vec{c})^2 - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 - 4\vec{c}^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{c} + 4\vec{b} \cdot \vec{c}.\end{aligned}$$

□

Iz tvrdnji prethodnog teorema odmah slijedi i:

Korolar 1.3.4 Za sve $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

- 4.' $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$,
- 5.' $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Dokaz. Iz teorema 1.3.2 slijedi

$$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{a} = \lambda(\vec{b} \cdot \vec{a}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Analogno se dokazuje tvrdnja 5'. □

Ako u nekom vektorskom prostoru nad \mathbb{R} definiramo množenje vektora s vrijednostima u \mathbb{R} koje zadovoljava svojstva 1. do 5. teorema 1.3.2, tada se taj vektorski prostor naziva **unitarni prostor**. Prema tome, V^3 je jedan unitarni prostor.

Definicija 1.3.2 Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ baza vektorskog prostora V^3 sa svojstvom da su vektori baze jedinični i međusobno okomiti (ortogonalni) tj. neka vrijedi

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0.$$

Takvu bazu nazivamo **ortonormiranom**.

Navedimo još jednom: vektor \vec{a} za koji je $|\vec{a}| = 1$ nazivamo *jediničnim* ili *normiranim* vektorom.

Koordinate vektora u odnosu na ortonormiranu bazu nazivamo *ortogonalnim* ili *pravokutnim* koordinatama.

Izvedimo sada formulu za skalarni produkt vektora koji su zadani svojim koordinatnim prikazima u ortonormiranoj bazi.

Propozicija 1.3.5 Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza za V^3 , a koordinatni prikazi vektora \vec{a} , \vec{b} su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Tada je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i\beta_i.$$

Dokaz. Iz tablice množenja

\cdot	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	1	0	0
\vec{j}	0	1	0
\vec{k}	0	0	1

i svojstava skalarnog množenja slijedi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k}) \cdot (\beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

□

Sljedeći korolari vrijede za vektore $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ zadane pravokutnim koordinatama.

Korolar 1.3.6 Vektori \vec{a} i \vec{b} su okomiti ako i samo ako je

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$

Korolar 1.3.7 Vrijedi: $|\vec{a}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$.

Korolar 1.3.8 $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}$.

Posebno, pogledajmo kosinuse kutova što ga neki vektor \vec{a} zatvara s vektorima ortonormirane baze $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Prema prethodnom korolaru, vrijedi:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{\alpha_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos \angle(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{\alpha_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos \angle(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{\alpha_3}{|\vec{a}|}. \quad (1.6)$$

Te vrijednosti nazivamo *kosinusi smjera* vektora \vec{a} .

Za kosinuse smjera vrijedi:

Korolar 1.3.9 Neka je $\vec{a} \in V^3$. Tada je

$$\cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{i}) + \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{j}) + \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{k}) = 1.$$

Dokaz. Kvadriranjem i zbrajanjem formula (1.6). □

Zadatak. Dokažite *nejednakost Schwarz-Cauchy-Bunjakowskog*: Za $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ vrijedi

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}.$$

Rješenje. Uvedimo vektore $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ kojima su prikazi u nekoj ortonormiranoj bazi dani s

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, tvrdnja očito vrijedi. Za $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ imamo

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

jer je $|\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})| \leq 1$.

Uočimo da u prethodnoj tvrdnji jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori kolinearni.

Zadaci

1. Kako definirati skalarni produkt u V^2 i V^1 ? Kako tada glasi zapis preko koordinata vektora?
2. Čine li vektori $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1)$ ortonormiranu bazu od V^3 ?
3. Neka je $\vec{a} = (1, -3, 3), \vec{b} = (-2, 0, 1)$. Izračunaj:

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$,

(b) $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.

$$\left[\text{a) } 1, \text{ b) } -1 \right]$$

4. Neka su \vec{a} i \vec{b} vektori za koje je $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Izračunajte skalarni produkt vektora $\vec{a} + 3\vec{b}$ i $2\vec{a} - \vec{b}$.

$$\left[-\frac{35}{2} \right]$$

5. Vektori \vec{a}, \vec{b} i \vec{c} su jedinični, a kutevi među njima su $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}, \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{5\pi}{6}, \angle(\vec{c}, \vec{a}) = \frac{\pi}{6}$. Izračunajte duljine dijagonala paralelograma određenog vektorima $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ i $\vec{n} = -3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

$$\left[5, \sqrt{9 + 4\sqrt{3}} \right]$$

6. Navedite barem jedan vektor okomit na vektor $(-5, 3, 0)$.

$$\left[(3, 5, 0), (0, 0, 1), (-6, -10, 7) \right]$$

7. Odredite $a \in \mathbb{R}$ tako da vektori $\vec{x} = (a, 0, 1 - a)$ i $\vec{y} = (a - 1, 2a, 2)$ budu međusobno okomiti.

$$\left[a = 1, a = 2 \right]$$

8. Neka je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ortonormirana baza. Dani su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da vektori $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ i \vec{c} budu okomiti.

$$\left[\lambda = -\frac{7}{5} \right]$$

9. Odredite vrijednost parametra $t \in \mathbb{R}$ tako da vektori $(-1, 0, 3)$ i $(1, 2, t)$ zatvaraju isti kut kao i vektori $(2, 1, 0)$ i $(t, 0, 0)$.

$$\left[t = 3 \pm 4\sqrt{3} \right]$$

10. Neka je $\vec{a} = (-1, 1, \alpha)$ i $\vec{b} = (0, \beta, 2)$. Odredite α i β tako da bude $\vec{a} \cdot \vec{b} = -7$ i $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2}$.

$$\left[\alpha = -3, \beta = -1 \text{ ili } \alpha = -\frac{13}{5}, \beta = -\frac{9}{5} \right]$$

11. Poznato je $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 23$ i $|\vec{a} + \vec{b}| = 30$. Odredite $|\vec{a} - \vec{b}|$.

$$\left[4\sqrt{31} \right]$$

12. Ako je $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, i ako su poznati moduli tih vektora, odredite $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

$$\left[-\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) \right]$$

13. Dokažite da za bilo koje vektore \vec{a} , \vec{b} vrijedi $|\vec{a} - \vec{b}| \geq ||\vec{a}| - |\vec{b}||$. Kada vrijedi jednakost?

$$\left[\text{Jednakost vrijedi za kolinearne vektore iste orijentacije} \right]$$

14. Odredite kut između vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ ako je

(a) $\vec{a} \perp (2\vec{a} + \vec{b})$ i $(2\vec{a} - \vec{b}) \perp (3\vec{a} + \vec{b})$.

(b) $(2\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + \vec{b})$ i $(\vec{a} - 2\vec{b}) \perp (2\vec{a} + \vec{b})$;

$$\left[\text{a) } \varphi = \frac{3\pi}{4}, \text{ b) } \cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{10}} \right]$$

15. Ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, $|\vec{b}| = 2$ i \vec{x} vektor kolinearan s $\vec{a} + \vec{b}$ takav da je $\vec{x} \cdot \vec{b} = 18$, čemu je jednak \vec{x} ?

$$\left[\vec{x} = 2\vec{a} + 2\vec{b} \right]$$

16. Dana je kocka $ABCD A' B' C' D'$ duljine brida 4. Neka je točka M središte osnovice $A' B' C' D'$, a N središte strane $B C C' B'$. Odrediti module vektora \overrightarrow{AM} i \overrightarrow{AN} i kut među njima.

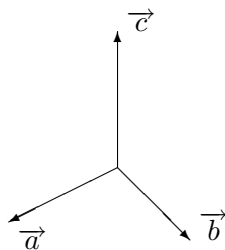
$$\left[|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AN}| = 2\sqrt{6}, \cos \varphi = \frac{5}{6} \right]$$

17. Romb je četverokut (paralelogram) kojem su sve stranice jednakih duljina. Dokažite da su dijagonale romba međusobno okomite.
18. Ako su težišnice $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ trokuta ABC međusobno okomite, dokažite da tada vrijedi $|BC|^2 + |AC|^2 = 5|AB|^2$.
19. Ako su u trostranoj piramidi dva para nasuprotnih bridova okomita, onda je okomit i treći par. Dokažite.
20. Dane su točke $A = (-3, 5, 6)$, $B = (1, -5, 7)$, $C = (8, -3, -1)$ i $D = (4, 7, -2)$. Dokažite da je četverokut $ABCD$ kvadrat.
21. Dani su vrhovi trokuta: $A = (3, 6)$, $B = (-1, 3)$ i $C = (2, -1)$. Izračunajte duljine stranica i duljinu visine trokuta iz točke C .

$$\left[|AB| = 5, |BC| = 5, |AC| = 5\sqrt{2}, v_c = 5 \right]$$

1.4 Vektorski produkt

Vektorski produkt vektora definiramo samo u vektorskom prostoru V^3 . Operacijom vektorskog množenja dva vektora opet dobivamo vektor kojeg opisujemo pomoću njegovog *modula*, *smjera* i *orijentacije*. Da bismo definirali orijentaciju vektorskog produkta dvaju vektora, uvedimo pojam **desno orijentirane** (desne, pozitivno orijentirane) **baze** prostora V^3 . Za bazu $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ od V^3 kažemo da je desno orijentirana ili desna ako promatrajući s vrha vektora \vec{c} uočavamo obilazak od vektora \vec{a} do vektora \vec{b} kraćim putem kao obilazak u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu. Za baze za koje je taj obilazak u smjeru kazaljke na satu, kažemo da su **lijevo orijentirane** (lijeve, negativno orijentirane). Tipičan primjer desne baze prikazan je na slici



Je li baza desna ili lijeva možemo odrediti i pravilom desne ruke odnosno desnog vijka. Kod **pravila desne ruke** ispruženi palac pokazuje prvi vektor, ispruženi kažiprst pokazuje drugi vektor, a savinuti srednji prst treći vektor. Kod **pravila desnog vijka** zaokruženim prstima od kažiprsta do malog prsta pokazujemo obilazak od prvog do drugog vektora, a treći vektor je određen ispruženim palcom.

Vektorsko množenje definiramo na sljedeći način:

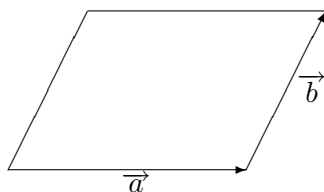
Definicija 1.4.1 *Vektorsko množenje* je operacija $\times : V^3 \times V^3 \rightarrow V^3$ koja paru vektora (\vec{a}, \vec{b}) pridružuje vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ definiran na sljedeći način:

1. ako su vektori \vec{a}, \vec{b} kolinearni, tada je $\vec{c} = \vec{0}$;
2. ako su vektori \vec{a}, \vec{b} nekolinearni, tada je
 - (a) modul $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$,
 - (b) smjer od \vec{c} je smjer okomit na smjer od \vec{a} i na smjer od \vec{b} ,
 - (c) orijentacija od \vec{c} je takva da je uređena trojka $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ desna baza od V^3 .

Sliku $\vec{a} \times \vec{b}$ vektora \vec{a}, \vec{b} nazivamo **vektorskim umnoškom** ili **vektorskim produktom** vektora \vec{a}, \vec{b} .

Zadatak. Zašto vektori $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ čine bazu?

Modul vektorskog produkta nekolinearnih vektora ima i *geometrijsku interpretaciju*: skalar $|\vec{a} \times \vec{b}|$ jednak je površini paralelograma određenog vektorima \vec{a}, \vec{b} .



Zaista, $P = |\vec{a}|v = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Propozicija 1.4.1 *Vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ako i samo ako su vektori \vec{a}, \vec{b} kolinearni.*

Dokaz. Ako su vektori \vec{a}, \vec{b} kolinearni, tada je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ po definiciji. Obratno, neka je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Pretpostavimo da \vec{a}, \vec{b} nisu kolinearni. Tada bi bilo

$$|\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0,$$

odakle je $|\vec{a}| = 0$ ili $|\vec{b}| = 0$ ili $\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Iz prve jednakosti slijedi $\vec{a} = \vec{0}$, iz druge $\vec{b} = \vec{0}$, a iz treće $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in \{0, \pi\}$. Svaka od tih mogućnosti suprotna je pretpostavci (da su vektori \vec{a}, \vec{b} kolinearni). \square

Korolar 1.4.2 *Za svaki $\vec{a} \in V^3$ vrijedi $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.*

Vektorsko množenje ima ova svojstva:

Teorem 1.4.3 *Za svaki $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3, \lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, *antikomutativnost*
2. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, *kvaziasocijativnost*
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, *distributivnost prema zbrajanju.*

Dokaz.

1. Dokazujemo jednakost dvaju vektora. U tu svrhu trebamo pokazati da ti vektori imaju jednake module, smjer i orijentaciju. To se direktno provjerava primjenom definicije.
2. Provjerimo također modul, smjer i orijentaciju vektora na lijevoj i desnoj strani jednakosti. Za $\lambda = 0$ ti su vektori očito jednaki. Neka je sad $\lambda \neq 0$. Tada za modul vektora $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ vrijedi

$$|(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda \vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = |\lambda| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}).$$

Ako je $\lambda > 0$, tada su vektori \vec{a} i $\lambda \vec{a}$ jednako orijentirani, pa je $\angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Ako je $\lambda < 0$, tada je $\angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})$, no $\sin \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$. U oba slučaja je

$$|(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda| (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})) = |\lambda| |\vec{a} \times \vec{b}| = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})|,$$

čime je pokazano da su moduli vektora s lijeve i desne strane jednakosti jednaki.

Nadalje, smjer vektora $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ jednak je smjeru vektora $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, naime oba vektora imaju smjer kao vektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Orijetacije tih vektora su također jednake: za $\lambda > 0$ vektori su jednako orijentirani kao vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, dok su za $\lambda < 0$ oba vektora suprotno orijentirana od vektora $\vec{a} \times \vec{b}$.

3. Vidi knjigu: Horvatić *Linearna algebra*.

□

Za vektorsko množenje također vrijedi:

Korolar 1.4.4 Za sve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi:

- 2' $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ kvaziasocijativnost
- 3' $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ distributivnost prema zbrajanju.

Dokaz.

- 2' Koristeći antikomutativnost vektorskog množenja zaključujemo

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = -(\lambda \vec{b}) \times \vec{a} = -\lambda(\vec{b} \times \vec{a}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

- 3' Analogno, koristeći antikomutativnost vektorskog množenja.

□

Vektorsko množenje nije asocijativno, tj. općenito vektori $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ i $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ nisu jednaki. Pokažimo to primjerom: neka su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ komplanarni (označimo s π ravninu s kojom su paralelni) i neka \vec{a}, \vec{c} nisu kolinearni. Tada su vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{b} \times \vec{c}$ okomiti na π , te su vektori $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ i $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ paralelni s π . No vektor $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ okomit je na \vec{c} , dok je vektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ okomit na \vec{a} .

Nadalje, vektorsko množenje ne posjeduje neutralni element tj. vektor $\vec{e} \in V^3$ za koji bi vrijedilo

$$\vec{a} \times \vec{e} = \vec{e} \times \vec{a} = \vec{a}, \quad \vec{a} \in V^3.$$

Naime, zbog antikomutativnosti ne može biti $\vec{a} \times \vec{e} = \vec{e} \times \vec{a}$, niti $\vec{a} \times \vec{e} = \vec{a}$ ne može vrijediti za svaki $\vec{a} \in V^3$ jer je $\vec{a} \times \vec{e} \perp \vec{a}$.

Propozicija 1.4.5 Za $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ vrijedi

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$,
2. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.

Dokaz. Vidi knjigu: Horvatić *Linearna algebra*. □

Korolar 1.4.6 (Jacobijev identitet) Za $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ vrijedi

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Dokaz. Iz propozicije 1.4.5 slijedi

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}, \\(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b}, \\(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} &= (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.\end{aligned}$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo tvrdnju. □

Uočimo da prethodni identitet pokazuje da su vektori $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}$, $(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b}$ komplanarni.

Vektorski prostor V^3 uz operaciju vektorskog množenja koja zadovoljava svojstva 1, 2, 3, 2', 3', i Jacobijev identitet postaje primjer strukture koja se naziva **Liejeva algebra** nad \mathbb{R} .

Zadatak. Pokažite **Lagrangeov identitet**

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})^2 &= |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (|\vec{a}||\vec{b}|\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}))^2 = \\&= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{b})) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.\end{aligned}$$

Cilj nam je sada naći formulu za vektorski produkt vektora koji su zadani svojim koordinatama u nekoj (desnoj) ortonormiranoj bazi. U tu svrhu, uvedimo pojam **determinante** drugog i trećeg reda.

Determinanta drugog reda je funkcija koja brojevima $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pridružuje realan broj zapisan na sljedeći način

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Determinanta trećeg reda je funkcija koja brojevima $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ pridružuje realan broj zapisan na sljedeći način

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 - \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 - \alpha_1 \beta_3 \gamma_2.$$

Izlučivanjem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ iz prethodnog izraza, determinantu trećeg reda možemo zapisati i drugačije

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

što nazivamo *razvojem determinante po prvom retku*.

Formalno, u retku determinante pisat ćemo i vektore. Primjerice,

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

Lakim računom mogu se dokazati sljedeća svojstva determinante drugog i trećeg reda:

1. Ako je jedan redak (stupac) determinante jednak 0, tada je determinanta jednaka 0.
2. Zamjenom dva retka (stupca) determinanta mijenja predznak.
3. Ako su reci (stupci) determinante proporcionalni, tada je determinanta jednaka 0.

Propozicija 1.4.7 *Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ desna ortonormirana baza vektorskog prostora V^3 i neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ koordinatni prikazi vektora \vec{a} , \vec{b} u toj bazi. Tada vrijedi*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \quad (1.7)$$

Dokaz. Tablica vektorskog množenja za elemente baze izgleda ovako

\times	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	$\vec{0}$	\vec{k}	$-\vec{j}$
\vec{j}	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	\vec{i}
\vec{k}	\vec{j}	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Koristeći tablicu i svojstva vektorskog množenja sada imamo

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}) \times (\beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}) = \\ &(\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2, \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3, \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1), \end{aligned}$$

što možemo napisati u obliku determinante (1.7). □

Zadaci

1. Izračunajte determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

[18, 0, -16, -12]

2. Za koje vrijednosti parametra a je sljedeća determinanta jednaka nuli?

$$\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ a & 3 & -a \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

[$a = 1, a = 6$]

3. Uvjerite se u ispravnost sljedećih pravila za determinante reda 3:

- (a) Ako determinanta ima dva jednaka retka, ona je jednaka nuli.
- (b) Ako je jedan redak jednak zbroju druga dva, determinanta je jednaka nuli.
- (c) Ako zamijenimo dva retka, determinanta mijenja predznak.
- (d) Ako sve elemente u nekom retku pomnožimo nekim brojem, i vrijednost determinante će biti pomnožena istim brojem.
- (e) Ako prvi redak zamijenimo sumom prvog i drugog retka, determinanta se ne mijenja.
- (f) Ako prvom retku pribrojimo drugi redak pomnožen nekim faktorom, determinanta se neće promijeniti.
- (g) Ako prvom retku pribrojimo linearnu kombinaciju ostalih redaka, determinanta se neće promijeniti.
- (h) Ako zamijenimo retke i stupce, determinanta se ne mijenja.
- (i) Ako bilo kojem retku (stupcu) pribrojimo linearnu kombinaciju ostalih redaka (stupca), determinanta se neće promijeniti.

4. Izračunajte vektorski produkt vektora

- (a) $(5, 2, -3), (-2, 1, 4)$.
- (b) $(4, -2, 1), (-3, 5, 2)$.

[a) $(11, -14, 9)$; b) $(-9, -11, 14)$]

5. Neka je $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ i $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Izračunajte $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

[12]

6. Neka je $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 9$ i $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3$. Odredite $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

[$\pm 6\sqrt{2}$]

7. Neka je $|\vec{a}| = 10$ i $|\vec{b}| = 5$.

- (a) Ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$, koliko je $|\vec{a} \times \vec{b}|$?
(b) Ako je $|\vec{a} \times \vec{b}| = 100$, koliko je $\vec{a} \cdot \vec{b}$?

$$\left[\text{a) } 40, \text{ b) } \pm 25\sqrt{3} \right]$$

8. Neka je $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$ i $\vec{c} = (1, -1, 0)$. Odredite vektor \vec{x} tako da bude $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$ i $\vec{x} \times \vec{b} = \vec{c}$.

$$\left[\vec{x} = (1, 1, 1) \right]$$

9. Neka su \vec{m} i \vec{n} jedinični vektori koji zatvaraju kut $\frac{\pi}{4}$. Odredite površinu paralelograma s dijagonalama $\vec{e} = 2\vec{m} - \vec{n}$ i $\vec{f} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$.

$$\left[\frac{3\sqrt{2}}{2} \right]$$

10. Dani su vektori $\vec{a} = (2, 0, -1)$ i $\vec{b} = (1, -1, 3)$. Odredite $m, n \in \mathbb{R}$ tako da vektor $m\vec{a} + n\vec{b}$ bude okomit na ravninu određenu vektorima $\vec{x} = (1, 2, 3)$ i $\vec{y} = (1, 1, 1)$.

$$\left[\text{jedini takav vektor } m\vec{a} + n\vec{b} \text{ je nulvektor, dakle } m = n = 0 \right]$$

11. Dani su vektori $\vec{a} = (0, 2\lambda, \lambda)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$ i $\vec{c} = (-1, -2, -1)$.

- (a) Odredite vektor \vec{d} tako da vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ i $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$.
(b) Pokažite da su vektori $\vec{a} - \vec{d}$ i $\vec{b} - \vec{c}$ kolinearni.
(c) Pokažite da su vektori $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ i \vec{d} komplanarni.
(d) Odredite λ tako da vrijedi $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \lambda$.

$$\left[\text{a) } \vec{d} = (-3\lambda, -2\lambda, -\lambda); \text{ b) } \vec{a} - \vec{d} = \lambda(\vec{b} - \vec{c}); \text{ c) } \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{c}; \text{ d) } \lambda = 7 \right]$$

12. Kako glasi odgovarajuća tablica množenja, a kako formula za vektorski produkt iz propozicije 1.4.7, ako je polazna baza $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ lijeva?

1.5 Mješoviti produkt

Definicija 1.5.1 Operaciju $m : V^3 \times V^3 \times V^3 \rightarrow \mathbb{R}$ koja trojci vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ pridružuje skalar $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ nazivamo **mješovitim množenjem**.

Rezultat $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \in \mathbb{R}$ nazivamo **mješovitim umnoškom** ili **mješovitim produktom**.

Koristimo i oznaku $m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Propozicija 1.5.1 Mješoviti produkt triju vektora jednak je 0 ako i samo ako su vektori komplanarni.

Dokaz. Neka su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni.

Ako su $\vec{a} \times \vec{b}$ ili \vec{c} jednaki $\vec{0}$, tada je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Uzmimo zato da su oni različiti od nulvektora. Kako je $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, to vektori \vec{a}, \vec{b} nisu kolinearni, nego su paralelni s nekom ravninom, nazovimo je π . Vektor \vec{c} je po pretpostavci također paralelan s tom ravninom. No, po definiciji vektorskog produkta, vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je okomit na π , pa je $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$. Dakle, $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Obratno, ako je mješoviti produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jednak 0, to znači da je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ili $\vec{c} = \vec{0}$ ili $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$.

U prva dva slučaja vektori \vec{a} i \vec{b} su kolinearni, a u trećem slučaju vektor \vec{c} je paralelan s ravninom određenom sa \vec{a}, \vec{b} . Dakle, u svim slučajevima vektori \vec{a}, \vec{b} i \vec{c} su komplanarni.

□

I za mješoviti produkt možemo izvesti formulu u slučaju kada su vektori dani svojim koordinatnim prikazima u desnoj ortonormiranoj bazi. Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ desna ortonormirana baza i neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ koordinatni prikazi vektora s obzirom na tu bazu. Iz propozicija 1.3.5 i 1.4.7 slijedi

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ &= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \cdot (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \\ &= \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2. \end{aligned}$$

Dokazali smo:

Propozicija 1.5.2 Mješoviti produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jednak je

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Korolar 1.5.3 Tri vektora su komplanarna ako i samo ako za njihove koordinatne prikaze u desnoj ortonormiranoj bazi vrijedi

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Iz propozicije 1.5.2 i svojstva determinante da zamjenom redaka mijenja predznak, zaključujemo

Propozicija 1.5.4 Za $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ vrijedi

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) \\ &= -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}). \end{aligned}$$

Dokažimo i svojstvo mješovitog produkta da operacije mogu zamijeniti uloge:

Korolar 1.5.5 Za $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ vrijedi

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Dokaz.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

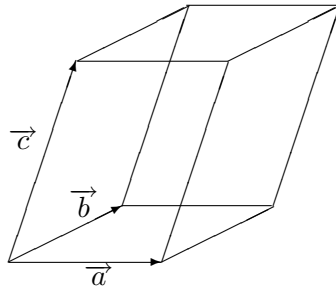
□

Sljedeća svojstva mješovitog produkta posljedica su definicije:

Propozicija 1.5.6 Za $\vec{a}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, vrijedi

1. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$,
2. $(\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Neka su sada $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ tri nekomplanarna vektora. Oni u prostoru određuju jedan **paralelepiped**. Kažemo da je paralelepiped razapet vektorima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



Mješoviti produkt ima sljedeću *geometrijsku interpretaciju*:

Propozicija 1.5.7 Volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jednak je apsolutnoj vrijednosti mješovitog produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Dokaz. Visina h paralelepipeda jednaka je duljini ortogonalne projekcije vektora \vec{c} na vektor $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$h = |\vec{c}| \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}).$$

Osnovka paralelepipeda je paralelogram određen vektorima \vec{a}, \vec{b} , te je njegova površina jednaka $|\vec{a} \times \vec{b}|$. Prema tome, volumen paralelepipeda jednak je

$$\begin{aligned} V = Bh &= |\vec{a} \times \vec{b}| h = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) \\ &= |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|. \end{aligned}$$

□

Zadaci

1. Jesu li baze $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, i $(\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k})$, jednako orijentirane?

[Da]

2. Izraz $\left[(2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} - \vec{a}) \right] \cdot (\vec{a} + \vec{c})$ pojednostavnite, a zatim izračunajte njegovu vrijednost ako je $\vec{a} = (-4, 2, 7)$, $\vec{b} = (3, -2, 0)$, $\vec{c} = (0, -4, 1)$. [492]

3. Provjerite da je $((\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})) \cdot (4\vec{a} + \vec{b} + 5\vec{c}) = 0$.

4. Dokažite da su vektori $\beta\vec{a} - \alpha\vec{b}$, $\gamma\vec{b} - \beta\vec{c}$ i $\alpha\vec{c} - \gamma\vec{a}$ uvijek komplanarni.

5. Nađite vektor \vec{x} u ovisnosti od vektora \vec{a} i \vec{b} ako je: $\vec{a} \perp \vec{x}$, $\vec{b} \perp \vec{x}$ i $|\vec{x}|=3$.

$$\left[\vec{x} = \pm 3 \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \right]$$

6. Dani su vektori $\vec{a} = (1, -1, 3)$, $\vec{b} = (2, 0, -1)$ i $\vec{c} = (-4, 2, 1)$.

(a) Odredite volumen paralelepipeda određenog vektorima \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} . Da li su ti vektori linearno zavisni? Obrazložite.

(b) Odredite $t \in \mathbb{R}$ tako da vektor $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} + t\vec{c}$ leži u ravnini određenoj vektorima \vec{a} i \vec{b} . Za dobiveni t prikažite \vec{v} kao linearnu kombinaciju vektora \vec{a} i \vec{b} .

$$\left[\text{a) } V = 12, \text{ linearno su nezavisni; b) } t = -\frac{9}{2}, 2\vec{a} + \frac{17}{2}\vec{b} \right]$$

7. Paralelepiped je određen vektorima $\vec{a} = (2t, 1, 1-t)$, $\vec{b} = (-1, 3, 0)$ i $\vec{c} = (5, -1, 8)$.

(a) Odredite $t \in \mathbb{R}$ tako da vektor \vec{a} tvori jednake kuteve s vektorima \vec{b} i \vec{c} .

(b) Za dobiveni t , odredite kut koji vektor \vec{c} zatvara s ravinom određenoj vektorima \vec{a} i \vec{b} .

(c) Za isti t , odredite volumen paralelepipeda i njegovu visinu nad osnovicom određenom vektorima \vec{a} i \vec{b} .

$$\left[\text{a) } t = \frac{1}{4}; \text{ b) } \varphi \approx 70^\circ 15'; \text{ c) } V = \frac{19}{2}, v = \sqrt{\frac{38}{5}} \right]$$

8. Dokažite da je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{d})$.

9. Dani su vektori $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$ i $\vec{c} = (2, 1, -1)$. Odredite ortogonalnu projekciju vektora \vec{b} na vektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

$$\left[\vec{x} = \frac{19}{66}(\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}) \right]$$

10. Kod trostrane prizme $ABCA'B'C'$ vektori $\vec{AB} = (0, 1, -1)$ i $\vec{AC} = (2, -1, 4)$ određuju njenu bazu, a vektor $\vec{AA'}$ = $(-3, 2, 2)$ bočnu stranicu. Nađite:

(a) volumen prizme,

(b) površinu osnovice ABC ,

(c) visinu prizme.

$$\left[\text{a) } \frac{17}{2}, \text{ b) } \frac{\sqrt{17}}{2}, \text{ c) } \sqrt{17} \right]$$

Poglavlje 2

Pravci i ravnine u koordinatnom sustavu

2.1 Koordinatni sustav u E^1 , E^2 , E^3

U vektorskim prostorima V^1 , V^2 , V^3 izborom baze bili smo u mogućnosti definirati koordinate proizvoljnog vektora (koordinatizacija). Sada nam je cilj odrediti *koordinate proizvoljne točke* na pravcu E^1 , u ravnini E^2 ili u prostoru E^3 .

U tu svrhu zadajmo najprije točku O u E^1 , E^2 ili E^3 . Svakoj točki T pravca E^1 , ravnine E^2 ili prostora E^3 možemo pridružiti jedinstvenu usmjerenu (orijentiranu) dužinu \overrightarrow{OT} s početkom u O , a krajem u T , koju nazivamo **radijvektorom točke T** . I obratno, točka T je jednoznačno određena zadavanjem radijvektora s obzirom na neku točku O . Time je zadano bijektivno preslikavanje između točaka iz E^1 , E^2 ili E^3 i pripadnog skupa radijvektora kojeg označavamo s $V^1(O)$, $V^2(O)$ ili $V^3(O)$ redom.

Nadalje, skupove $V^1(O)$, $V^2(O)$, $V^3(O)$ možemo organizirati u vektorske prostore, uz definirane operacije zbrajanja radijvektora (pravilom paralelograma) i množenjem radijvektora skalarom (kao i za vektore). Osim toga, u njima možemo definirati i skalarno množenje (kao za vektore). U vektorskom prostoru $V^3(O)$ možemo definirati također vektorsko i mješovito množenje vektora.

Neka su sad u vektorskim prostorima $V^1(O)$, $V^2(O)$, $V^3(O)$ izabrane baze. **Koordinate točke T** definiramo kao koordinate radijvektora \overrightarrow{OT} s obzirom na odabrane baze.

Za $T \in E^1$ i odabranu bazu \overrightarrow{OI} prostora $V^1(O)$, pripadni radijvektor \overrightarrow{OT} možemo rastaviti na jedinstven način

$$\overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{OI}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kažemo da je x koordinata točke T , pišemo $T = (x)$ ili $T(x)$.

Ako je $\{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\}$ baza za $V^2(O)$ primjerice, tada postoji jedinstveni rastav

$$\overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Uređen par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ su koordinate točke T , pišemo $T = (x, y)$ ili $T(x, y)$. Ako je izabrana baza ortonormirana, koordinate točke T zovemo **ortogonalnim** ili **pravokutnima**. Skup $\{O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\}$ nazivamo **pravokutnim** ili **Kartezijevim koordinatnim sustavom** u E^2 . Točku O nazivamo **ishodištem**, a pravce određene točkama OI , OJ **koordinatnim pravcima**. Pravac OI je os apscisa ili x -os, a pravac OJ os ordinata ili y -os.

Ako je točka $T \in E^3$, tada su njene koordinate dane kao uređena trojka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s obzirom na bazu $\{\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK}\}$ vektorskog prostora $V^3(O)$. Pišemo $T = (x, y, z)$ ili $T(x, y, z)$. U tom slučaju još definiramo koordinatnu os OK kao os aplikatu ili z -os i **koordinatne ravnine** xy , xz , yz određene odgovarajućim pravcima.

2.2 Pravac u E^2

U ovom ćemo poglavlju izvesti jednadžbe pravca u ravnini E^2 .

Propozicija 2.2.1 *Neka su $A, B \in E^2$, $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ točke dane svojim koordinatama (s obzirom na neku bazu koja ne mora biti ortonormirana). Tada vektor $[\vec{AB}]$ ima koordinate*

$$[\vec{AB}] = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

Dokaz. Za vektore u V^2 vrijedi

$$[\vec{OA}] + [\vec{AB}] = [\vec{OB}],$$

pa je $[\vec{AB}] = [\vec{OB}] - [\vec{OA}]$. Nadalje, neka je $\{\vec{OI}, \vec{OJ}\}$ baza za $V^2(O)$, te neka je

$$\vec{OA} = a_1\vec{OI} + a_2\vec{OJ}, \quad \vec{OB} = b_1\vec{OI} + b_2\vec{OJ}.$$

Oduzimanjem navedenih vektora, slijedi tvrdnja. □

Odredimo sada jednadžbu pravca u pravokutnom koordinatnom sustavu $\{O; \vec{OI}, \vec{OJ}\}$ u ravnini E^2 .

Neka su zadani točka $T_0 \in E^2$ i vektor $\vec{s} \in V^2$, $\vec{s} \neq \vec{0}$. Tada postoji jedinstveni pravac p kroz točku T_0 paralelan vektoru \vec{s} (Euklidov 5. aksiom). Kažemo da je vektor \vec{s} **vektor smjera** pravca p .

Neka su koordinate točke T_0 , vektora \vec{s} i po volji odabrane točke T pravca p redom $T_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{s} = a\vec{i} + b\vec{j}$, $T = (x, y)$. Kako je vektor $[\vec{OT}]$ kolinearano s vektorom \vec{s} , to postoji (jedinstveni) skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$[\vec{T_0T}] = \lambda \vec{s},$$

odakle je $[\vec{OT}] - [\vec{OT_0}] = \lambda \vec{s}$, tj.

$$[\vec{OT}] = [\vec{OT_0}] + \lambda \vec{s}.$$

Često pišemo

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda \vec{s}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

pri čemu je $\vec{r} = [\vec{OT}]$, $\vec{r_0} = [\vec{OT_0}]$.

Uočite da je za svaku izabranu točku T pravca p skalar λ jedinstveno određen, te da je za razne točke skalar λ različit, tj. pridruživanje točaka T pravca p i brojeva $\lambda \in \mathbb{R}$ je bijekcija. Jednadžbu (2.1) nazivamo **parametarskim vektorskim oblikom jednadžbe pravca** p .

Raspisujući jednadžbu (2.1) po koordinatama, dobivamo

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a \\ y &= y_0 + \lambda b, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

što nazivamo *parametarskim koordinatnim oblikom jednadžbe pravca p*.

Ako je $a \neq 0$, tada iz prve jednadžbe od (2.2) slijedi $\lambda = \frac{1}{a}(x - x_0)$, što uvršteno u drugu jednadžbu daje

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0). \quad (2.3)$$

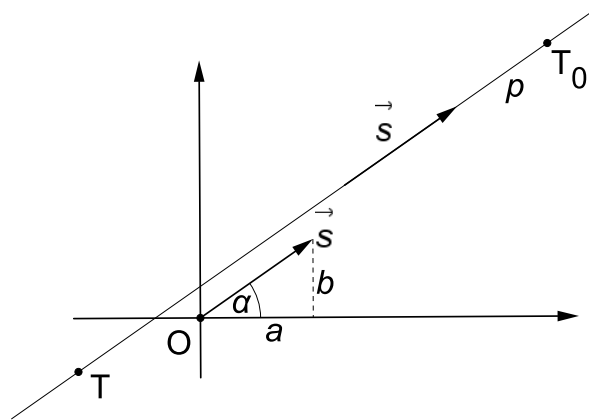
Prethodnu jednadžbu možemo pisati i u obliku

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad (2.4)$$

što nazivamo *kanonskim oblikom jednadžbe pravca p*.

Koeficijent $\frac{b}{a}$ iz jednadžbe (2.3) ima i geometrijsko značenje – jednak je tangensu kuta što ga pravac p određuje s pozitivnim dijelom x -osi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$



Broj $\frac{b}{a}$ naziva se *koeficijent smjera* pravca p i označava s k . Jednadžba (2.3) prelazi u *jednadžbu pravaca zadanog koeficijentom smjera k i točkom* (x_0, y_0)

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (2.5)$$

Ako je $a = 0$, tada je $\alpha = \frac{\pi}{2}$, a broj k nije definiran.

Takav je pravac paralelan s y -osi, a njegova jednadžba glasi $x = x_0$.

Ako je $b = 0$, tada je $\alpha = 0$, $k = 0$.

Takav je pravac paralelan s x -osi, a njegova jednadžba glasi $y = y_0$.

Pravac možemo zadati i dvjema točkama $T_1 = (x_1, y_1)$, $T_2 = (x_2, y_2)$. Ako za vektor smjera uzmemo vektor

$$[\overrightarrow{T_1T_2}] = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

dobivamo sljedeće jednadžbe pravca:

parametarski vektorski oblik

$$[\overrightarrow{OT}] = [\overrightarrow{OT_1}] + \lambda([\overrightarrow{OT_2}] - [\overrightarrow{OT_1}]), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

odnosno

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

te **parametarski koordinatni oblik**

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ako je $x_1 \neq x_2$, tada je $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, te je

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

jednadžba pravca određenog točkama T_1, T_2 .

Posebno, ako pravac presjeca x odnosno y -os u točkama $M = (m, 0)$ i $N = (0, n)$, tada dobivamo **segmentni oblik** jednadžbe pravca (takav pravac ne prolazi ishodištem)

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Brojevi m, n nazivaju se odsječci (odresci, segmenti) na osima x i y .

Ako pravac presjeca y -os u točki $L = (0, l)$ i ima koeficijent smjera k , tada (2.5) prelazi u

$$y = kx + l$$

što se naziva **eksplicitnim oblikom** jednadžbe pravca. Broj l zove se odsječak (odrezak) na osi y .

Pravcu umjesto vektora smjera možemo zadati i **vektor normale** $\vec{n} = (A, B)$ koji je okomit na vektor smjera.

Neka je $T_0 = (x_0, y_0)$ zadana točka pravca, a $T = (x, y)$ po volji odabrana točka pravca. Tada je vektor $[\overrightarrow{T_0T}] = (x - x_0, y - y_0)$ okomit na \vec{n} , te je njihov skalarni produkt jednak 0.

Prema tome,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Iz prethodnog možemo uočiti da se jednadžba pravca u E^2 može napisati u obliku

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.6)$$

gdje je $C = -(Ax_0 + By_0)$. Jednadžbu (2.6) nazivamo **implicitnim oblikom** jednadžbe pravca.

Zadaci

1. Navedite tri različite točke koje leže na pravcu

- (a) s eksplicitnom jednadžbom $y = 3x - 2$
- (b) s implicitnom jednadžbom $2x - 5y - 7 = 0$
- (c) s parametarskom jednadžbom $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 2 \end{cases}$
- (d) s kanonskom jednadžbom $\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 1}{0}$.

$$\left[\text{Npr: a) } (0, -2), (1, 1), (2, 4); \text{ b) } (1, -1), (0, -\frac{7}{5}), (\frac{7}{2}, 0); \right. \\ \left. \text{c) } (-1, 2), (2, 3), (5, 4); \text{ d) } (3, -1), (0, -1), (1, -1) \right]$$

2. Napišite u eksplicitnom, implicitnom, kanonskom i parametarskom obliku jednadžbu pravca kroz točke

- (a) $A(1, -2)$ i $B(-4, -3)$
- (b) $A(0, 0)$ i $B(-1, 3)$
- (c) $A(1, -1)$ i $B(-2, -1)$
- (d) $A(3, -2)$ i $B(3, 5)$

$$\left[\text{a) } y = \frac{1}{5}x - \frac{11}{5}, -x + 5y + 11 = 0, \frac{x-1}{-5} = \frac{y+2}{-1}, x = 1 - 5t, y = -2 - t; \right. \\ \text{b) } y = -3x, 3x + y = 0, \frac{x}{-1} = \frac{y}{3}, x = -t, y = 3t; \\ \text{c) } y = -1, y + 1 = 0, \frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{0}, x = t, y = -1; \\ \left. \text{d) ne postoji, } x - 3 = 0, \frac{x-3}{0} = \frac{y+2}{-7}, x = 3, y = t \right]$$

3. Napišite u eksplicitnom obliku jednadžbu pravca

- (a) $x + 7y + 8 = 0$
- (b) $\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases}$
- (c) $\frac{x + 5}{2} = \frac{y - 2}{3}$

$$\left[\text{a) } y = -\frac{1}{7}x - \frac{8}{7}; \text{ b) } y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}, \text{ c) } y = \frac{3}{2}x + \frac{19}{2} \right]$$

4. Pokažite da svi pravci $(a + 2)x - (a + 1)y - 2a - 3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$ prolaze istom točkom. Kojom?

$$\left[(1, -1) \right]$$

5. Objekt A kreće iz točke $(1, 0)$ i giba se po polupravcu $x = 1 + 2t$, $y = t$, $t > 0$, a objekt B istovremeno kreće iz točke $(2, 4)$ i giba se po polupravcu $x = 2 + t$, $y = 4 - t$, $t > 0$ (parametar t shvaćamo kao vrijeme). Hoće li se A i B sresti?

$$\left[\text{Neće.} \right]$$

6. Odredite presjek pravaca p_1 i p_2 zadanih parametarskim jednadžbama:

$$p_1 \quad \dots \quad \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \end{cases} \quad p_2 \quad \dots \quad \begin{cases} x = 4 + s \\ y = 5 - 2s \end{cases}$$

$$\left[(5, 3) \right]$$

7. Kako se zadaje polupravac u koordinatnom sustavu? A dužina?

8. Skicirajte u ravnini skup točkaka (x, y) koje zadovoljavaju sustav nejednadžbi

$$\begin{cases} x - 2y + 2 > 0 \\ 2x + y - 6 < 0 \end{cases}$$

9. Odredite položaj dužine \overline{AB} u odnosu na pravac $2x - y + 5 = 0$, ako je

(a) $A = (2, 3), B = (0, -1)$;

(b) $A = (1, 1), B = (-3, 0)$;

(c) $A = (0, 5), B = (2, 0)$.

$$\left[\text{a) dužina ne siječe pravac, b) dužina siječe pravac, c) točka } A \text{ leži na pravcu} \right]$$

2.3 Udaljenost dviju točkaka, udaljenost točke od pravca i kut dvaju pravaca u E^2

Propozicija 2.3.1 *Neka su $A, B \in E^2$, $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ točke dane svojim pravokutnim koordinatama. Tada je udaljenost od A do B dana sa*

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Dokaz. Kako je $d(A, B) = |AB| = |[\overrightarrow{AB}]|$, tvrdnja slijedi iz propozicije 2.2.1. □

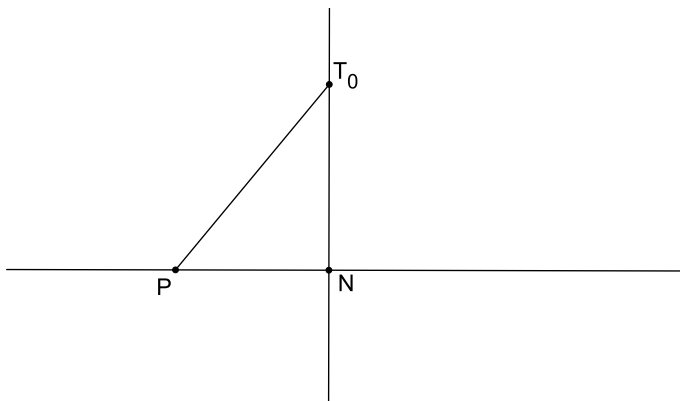
Općenito, ako su \mathcal{A}, \mathcal{B} skupovi točkaka na pravcu, u ravnini ili u prostoru, tada se udaljenost između tih skupova definira kao

$$\inf \{d(A, B) : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

Naš je cilj odrediti formulu za udaljenost $d(T_0, p)$ točke T_0 od pravca p . Sljedeća propozicija nam kaže da je tu udaljenost moguće odrediti kao udaljenost dviju točkaka, točke T_0 i točke N koja je nožište normale iz T_0 na p . Normala je pravac okomit na pravac p .

Propozicija 2.3.2 *Neka je T_0 točka, a p pravac u E^2 . Neka je N nožište normale kroz T_0 na pravac p i neka je P po volji odabrana točka pravca p . Tada vrijedi*

$$d(T_0, N) \leq d(T_0, P), \quad P \in p.$$



Dokaz. U pravokutnom trokutu T_0NP , T_0N je kateta, a T_0P hipotenuza, pa slijedi tvrdnja. \square

Točku N nazivamo i ortogonalnom projekcijom točke T_0 na pravac p .

Izvedimo sada formulu za $d(T_0, p)$. Neka je $T_0 = (x_0, y_0)$, a pravac p dan jednadžbom $Ax + By + C = 0$. Tada je $\vec{n} = (A, B)$ vektor normale pravca p . Vrijedi

$$\begin{aligned} d(T_0, p) &= d(T_0, N) = |T_0N| = |[\vec{T_0N}] \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}| = \frac{|([\vec{ON}] - [\vec{OT_0}]) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|[\vec{ON}] \cdot \vec{n} - [\vec{OT_0}] \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Koristili smo da za točku N na pravcu p vrijedi $[\vec{ON}] \cdot \vec{n} = -C$, te

$$[\vec{OT_0}] \cdot \vec{n} = (x_0, y_0) \cdot (A, B) = Ax_0 + By_0.$$

Dakle, dokazali smo

Propozicija 2.3.3 *Udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0)$ od pravca $p \dots Ax + By + C = 0$ iznosi*

$$d(T_0, N) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.7)$$

Određimo nadalje kut što ga zatvaraju dva pravca koji su zadani jednadžbama $y = k_i x + l_i$, $i = 1, 2$. Pod kutom dvaju pravaca podrazumijevamo mjeru (veličinu) manjeg od dvaju kutova što ga pravci zatvaraju. Dakle, kut dvaju pravaca poprima vrijednosti u $[0, \frac{\pi}{2}]$. Poznato je da su koeficijenti smjera pravaca tangensi kuteva φ_1, φ_2 što ga pravci zatvaraju s pozitivnim dijelom x -osi

$$k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1, \quad k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Nadalje, kut između pravaca $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ jednak je apsolutnoj vrijednosti razlike kuteva $\varphi_1 - \varphi_2$ ili suplementu tog kuta. Kako je tangens kuta iz $[0, \frac{\pi}{2}]$ nenegativan broj, to primjenom adicijskih formula za tangens dobivamo sljedeću formulu

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \quad (2.8)$$

Pravci su paralelni (usporedni) ako i samo ako je kut između njih jednak 0, te je

$$k_1 = k_2.$$

Pravci su okomiti ako i samo ako je kut između njih jednak $\frac{\pi}{2}$, a to je ako i samo ako je

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

(tangens nije definiran, nazivnik izraza (2.8) je 0).

Uočimo da smo do istog zaključka mogli doći i ako kut određujemo kao kut vektora smjera \vec{s}_1 , \vec{s}_2 pravaca p_1 , p_2 . Kut dvaju pravaca jednak je kutu što ga zatvaraju njihovi vektori smjera ili suplementu tog kuta, pa je

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|}. \quad (2.9)$$

Ako pravac p_i , $i = 1, 2$, zapišemo parametarskim koordinatnim jednadžbama

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= k_i t + l_i \end{aligned}$$

tada možemo očitati vektore smjera $\vec{s}_1 = (1, k_1)$, $\vec{s}_2 = (1, k_2)$. Sada je

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 &= 1 + k_1 k_2, \quad |\vec{s}_1| = \sqrt{1 + k_1^2}, \quad |\vec{s}_2| = \sqrt{1 + k_2^2}, \\ \cos \varphi &= \frac{|1 + k_1 k_2|}{\sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{1 + k_2^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{\sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{1 + k_2^2}}, \end{aligned}$$

odakle također slijedi formula (2.8).

Zadaci

1. Odredite vrijednost parametra a tako da pravac $(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$

- (a) bude paralelan s osi x ,
- (b) bude paralelan s osi y ,
- (c) sadrži ishodište.

$$\left[\text{a) } -2; \text{ b) } 3, -3; \text{ c) } 1, \frac{5}{3} \right]$$

2. Vrhovi trokuta su $A = (1, 4)$, $B = (1, 1)$, $C = (3, 6)$. Odredite jednadžbe njegovih stranica i njegovih visina, te odredite njegov ortocentar.

$$\left[(-4, 6) \right]$$

3. Odredite vrhove trokuta ABC ako mu je ortocentar točka $H = (-1, 3)$, stranica \overline{AB} leži na pravcu $5x - 3y + 1 = 0$, a stranica \overline{BC} na pravcu $-x + 2y + 4 = 0$.

$$\left[A(4, 0), B(-2, -3), C\left(\frac{2}{11}, \frac{7}{11}\right) \right]$$

4. Odredite udaljenost pravca od ishodišta i kut koji pravac zatvara s osi x , ako je jednadžba pravca

(a) $x + 2 = 0$

(b) $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$

(c) $3x + y = 10$

$$\left[\text{a) } d = 2, \varphi = 90^\circ; \text{ b) } d = 1, \varphi = 150^\circ; \text{ c) } d = \sqrt{10}, \varphi \approx 108,4^\circ \right]$$

5. Odredite jednadžbu pravca koji sadrži sjecište pravaca $3x + y - 5 = 0$ i $x - 2y + 10 = 0$, a od točke $C = (-1, -2)$ je udaljen za $d = 5$.

$$\left[3x - 4y - 20 = 0, 4x + 3y - 15 = 0 \right]$$

6. Napišite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $(-1, 3)$, a s osi x zatvara kut od 45° .

$$\left[y = x + 4, y = -x + 2 \right]$$

7. Napišite jednadžbu simetrale kuta kojeg određuju pravci $x + 2y - 5 = 0$ i $3x - 6y + 2 = 0$, a u kojem leži ishodište.

$$\left[x = \frac{17}{12} \right]$$

8. Dvije stranice pravokutnika leže na pravcima $4x - 6y + 13 = 0$ i $3x + 2y - 13 = 0$, a jedan od vrhova je točka $(2, -3)$. Odredite preostale vrhove.

$$\left[\left(2, \frac{7}{2}\right), \left(-1, \frac{3}{2}\right), (5, -1) \right]$$

9. Provjerite da su točke $A = (-4, -3)$, $B = (-5, 0)$, $C = (5, 6)$ i $D = (1, 0)$ vrhovi trapeza, te odredite njegovu visinu.

$$\left[AD \parallel BC, v = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \right]$$

2.4 Ravnina u E^3

Kao i u E^2 , možemo dokazati sljedeću propoziciju:

Propozicija 2.4.1 *Neka su $A, B \in E^3$, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ točke dane svojim koordinatama (s obzirom na neku bazu koja ne mora biti ortonormirana). Tada vektor $[\overrightarrow{AB}]$ ima koordinate*

$$[\overrightarrow{AB}] = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Cilj nam je odrediti jednadžbe pravaca i ravnina u prostoru E^3 .

Odredimo najprije razne oblike jednadžbe ravnine u E^3 . Kao posljedica aksioma euklidske geometrije u prostoru, postoji jedinstvena ravnina u E^3 koja prolazi točkom T_0 i paralelna je s dva nekolinearna vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$. Kažemo da je ravnina određena ili razapeta vektorima \vec{a}, \vec{b} i točkom T_0 .

Neka je T_0 zadana točka, a T po volji odabrana točka ravnine π . Tada su vektori $[\overrightarrow{T_0T}], \vec{a}, \vec{b}$ komplanarni, pa po propoziciji 1.2.7 postoje skalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$[\overrightarrow{T_0T}] = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}.$$

Ako uvedemo oznake $\vec{r} = [\overrightarrow{OT}], \vec{r}_0 = [\overrightarrow{OT_0}]$, prethodni izraz možemo napisati i kao

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

što predstavlja **parametarski vektorski oblik jednadžbe ravnine** π .

Uočimo da su za svaku točku ravnine skalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ jedinstveno određeni.

Ako su točke T, T_0 i vektori \vec{a}, \vec{b} dani pravokutnim koordinatama $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $T = (x, y, z)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, ista jednadžba zapisana koordinatno glasi

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z &= z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

To je **parametarski koordinatni oblik jednadžbe ravnine**.

Nadalje, činjenicu da su vektori $[\overrightarrow{T_0T}], \vec{a}, \vec{b}$ komplanarni, možemo karakterizirati i preko njihovog mješovitog produkta (mješoviti produkt $([\overrightarrow{T_0T}], \vec{a}, \vec{b})$ mora biti jednak 0). Dakle,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

je također **jednadžba ravnine određene točkom T_0 i dvama nekolinearnim vektorima \vec{a}, \vec{b}** .

Ravnina može biti zadana i trima točkama $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, koje ne leže na istom pravcu. Ako definiramo $\vec{a} = [\overrightarrow{T_1T_2}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{T_1T_3}]$ i uvrstimo u prethodnu jednadžbu, dobivamo

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.13)$$

Posebno, ako izaberemo točke ravnine u kojima ona presjeca koordinatne osi $T_1 = (m, 0, 0)$, $T_2 = (0, n, 0)$, $T_3 = (0, 0, p)$ (za ravninu koja ne prolazi ishodištem), razvojem prethodne determinante dobivamo **segmentni oblik** jednadžbe ravnine

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1.$$

Nadalje, ravninu možemo zadati i vektorom normale $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ i jednom njenom točkom $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Tada je točka $T = (x, y, z)$ točka ravnine ako i samo ako su vektori $[\overrightarrow{T_0T}]$ i \vec{n} okomiti. Kako su ne-nulvektori okomiti ako i samo ako je njihov skalarni produkt jednak 0, dobivamo jednadžbu

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2.14)$$

Prethodnu jednadžbu možemo napisati i u obliku

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2.15)$$

gdje je $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Jednadžbu (2.15) nazivamo *općim* ili *implicitnim oblikom* jednadžbe ravnine.

Jednadžbu (2.14) možemo zapisati i kao

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0, \quad (2.16)$$

gdje je \vec{r} radijvektor točke T , a \vec{r}_0 radijvektor točke T_0 .

2.5 Udaljenost dviju točaka, udaljenost točke od ravnine i kut dviju ravnina u E^3

Slično kao u prostoru E^2 , pokazuje se da vrijedi

Propozicija 2.5.1 *Neka su $A, B \in E^3$, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ točke dane svojim pravokutnim koordinatama. Tada je udaljenost od A do B jednaka*

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Odredimo udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od ravnine π .

Propozicija 2.5.2 *Neka je T_0 točka, a π ravnina u E^3 . Neka je N nožište normale (pravca okomitog na π) kroz T_0 na ravninu π i neka je P po volji odabrana točka ravnine π . Tada vrijedi*

$$d(T_0, N) \leq d(T_0, P), \quad P \in \pi.$$

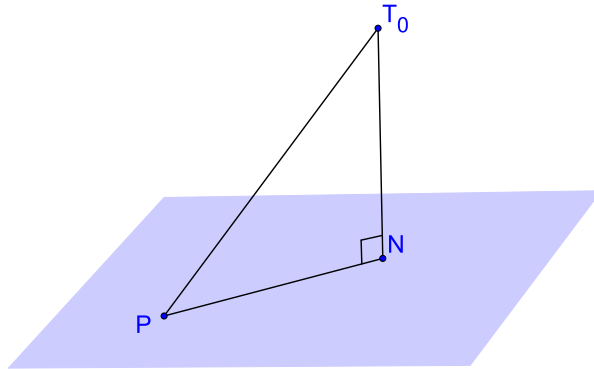
Dokaz. U pravokutnom trokutu T_0NP , T_0N je kateta, a T_0P hipotenuza, pa slijedi tvrdnja. \square

Točka N naziva se i *ortogonalna projekcija* točke T_0 na ravninu π .

Izvedimo sada formulu za $d(T_0, \pi)$. Neka je $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, a ravnina π je dana jednadžbom $Ax + By + Cz + D = 0$. Vektor $\vec{n} = (A, B, C)$ je vektor normale ravnine π . Tada je

$$\begin{aligned} d(T_0, \pi) &= d(T_0, N) = |T_0N| = |[\overrightarrow{T_0N}] \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}| = \frac{|([\overrightarrow{ON}] - [\overrightarrow{OT_0}]) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|[\overrightarrow{ON}] \cdot \vec{n} - [\overrightarrow{OT_0}] \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili da točka N ravnine π zadovoljava $[\overrightarrow{ON}] \cdot \vec{n} = -D$.



Dokazali smo

Propozicija 2.5.3 *Udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od ravnine $\pi \dots Ax + By + Cz + D = 0$ je*

$$d(T_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.17)$$

Ako je $T_1(x_1, y_1, z_1)$ točka ravnine, a $\vec{n} = (A, B, C)$ vektor normale ravnine, tada koristeći (2.16), jednakost iz prethodne propozicije možemo zapisati ovako:

$$d = \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}. \quad (2.18)$$

Odredimo još mjeru kuta između dviju ravnina. Neka se ravnine sijeku po pravcu p . Kut dviju ravnina je kut između pravaca koji su presječnice zadanih ravnina i bilo koje ravnine okomite na pravac p .

Neka su ravnine π_i dane jednačbama $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2$, pri čemu su $\vec{n}_i = (A_i, B_i, C_i)$ njihove normale. Kut dvaju ravnina jednak je kutu njihovih vektora normala ili suplementu tog kuta. Mjera kuta dviju ravnina je uvijek iz intervala $[0, \frac{\pi}{2}]$, te zaključujemo

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}.$$

Ravnine su očito paralelne ako i samo ako su im vektori normala kolinearni

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2,$$

a okomite su ako i samo ako su im vektori normala okomiti

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

2.6 Pramac u E^3

Neka je p pravac u E^3 zadan točkom T_0 i ne-nulvektorom \vec{s} (*vektor smjera*).

Neka je T po volji odabrana točka pravca p . Parametarske jednadžbe pravca u E^3 izvodimo analogno kao takve jednadžbe u E^2 .

Vektor $[\overrightarrow{T_0T}]$ je kolinearano s vektorom \vec{s} , pa postoji skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$[\overrightarrow{T_0T}] = \lambda \vec{s}.$$

Ako označimo $\vec{r} = [\overrightarrow{OT}]$, $\vec{r}_0 = [\overrightarrow{OT_0}]$, tada iz prethodne jednakosti slijedi

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{s}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Prethodna jednadžba naziva se **parametarskim vektorskim oblikom jednadžbe pravca** $p \subset E^3$ koji je određen točkom T_0 i vektorom \vec{s} .

Neka su sad točka T_0 i vektor \vec{s} zadani svojim pravokutnim koordinatama, $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Iz (2.19) dobivamo **parametarski koordinatni oblik jednadžbe pravca**

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda\alpha \\ y &= y_0 + \lambda\beta \\ z &= z_0 + \lambda\gamma, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Eliminacijom parametra λ dobivamo **kanonski oblik jednadžbe pravca**

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \quad (= \lambda).$$

Ako pravac zadamo dvjema točkama $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $T_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tada njegove parametarske jednadžbe glase

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_0 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z &= z_0 + \lambda(z_2 - z_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Kanonski oblik jednadžbe sada glasi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (= \lambda).$$

I na kraju, pravac možemo zadati i kao presječnicu dviju neparalelnih ravnina π_1, π_2 . Neka su ravnine dane svojim implicitnim jednadžbama

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

pri čemu vrijedi $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$. Pravac je zadan sustavom jednadžbi (2.22).

Zadatak. Odredimo jednadžbe koordinatne osi x .

Rješenje. Os x zadana je točkom $(0, 0, 0)$ i vektorom smjera $\vec{i} = (1, 0, 0)$. Njene koordinatne parametarske jednadžbe glase $x = t$, $t \in \mathbb{R}$, $y = 0$, $z = 0$. Kanonski oblik jednadžbe glasi

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0},$$

a sustav $y = 0$, $z = 0$ predstavlja x -os kao presjek dviju ravnina, konkretno koordinatne xz -ravnine i koordinatne xy -ravnine.

Zadatak. Pravac p zadan je kao presječnica ravnina

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = -2. \end{cases}$$

Odredite parametarski koordinatni oblik jednadžbe pravca p .

Rješenje. Stavimo $x = t$.

Zbrajanjem jednadžbi kojima je pravac zadan dobivamo $2x - y = -1$, odakle slijedi $y = 2t + 1$. Sada, primjerice iz prve jednadžbe, slijedi $z = 1 - x - y = -3t$.

Dakle, parametarski koordinatni oblik jednadžbe pravca p glasi

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = -3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2.7 Udaljenost točke od pravca, udaljenost dvaju pravaca. Kut dvaju pravaca, kut pravca i ravnine u E^3

Kao i u E^2 možemo pokazati sljedeće:

Propozicija 2.7.1 *Udaljenost točke T_0 od pravca p u E^3 jednaka je udaljenosti točke T_0 od nožišta normale kroz T_0 na pravac p .*

Izvedimo sad formulu za udaljenost točke T_0 (s radijvektorom \vec{r}_0) od pravca p u E^3 .

Neka je pravac p dan vektorskom jednadžbom

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{s}, \quad (2.23)$$

gdje je \vec{r} radijvektor po volji odabrane točke T na pravcu p , a \vec{r}_1 radijvektor točke T_1 pravca p . Neka je T_2 točka pravca p za koju vrijedi $[\vec{T}_1\vec{T}_2] = \vec{s}$.

Površinu trokuta $\triangle T_0T_1T_2$ računamo na dva načina. Vrijedi

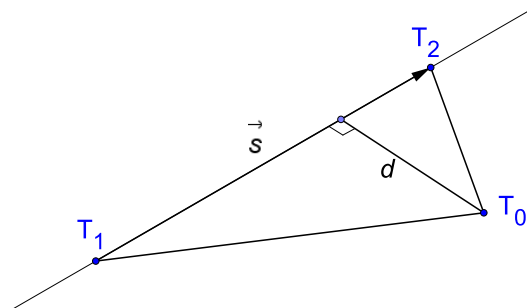
$$P = \frac{\text{baza} \cdot \text{visina}}{2} = \frac{1}{2} |\vec{s}| d, \quad (2.24)$$

odnosno

$$P = \frac{1}{2} |[\vec{T}_0\vec{T}_1] \times [\vec{T}_1\vec{T}_2]| = \frac{1}{2} |(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{s}|. \quad (2.25)$$

Iz (2.24), (2.25) slijedi

$$d = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$



Dokazali smo:

Propozicija 2.7.2 *Udaljenost točke T_0 (s radijvektorom \vec{r}_0) od pravca p danog jednadžbom (2.23) u E^3 iznosi*

$$d = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

Idući nam je cilj odrediti udaljenost dvaju pravaca. U tu svrhu konstruirajmo zajedničku normalu dvaju pravaca. **Zajednička normala** dvaju pravaca je pravac koji *siječe* oba pravca i na njih je okomit.

Za pravce kažemo da su **mimosmjerni** (mimoilazni) ako se ne sijeku i nisu paralelni. Za takve pravce, dakle, ne postoji ravnina u koja ih oba sadrži.

Neka su p_1, p_2 , dva mimosmjerna pravca zadana jednadžbama

$$\vec{r} = \vec{r}_i + \lambda \vec{s}_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.26)$$

Pokazat ćemo da dva mimosmjerna pravca imaju jedinstveno određenu zajedničku normalu. Vektor smjera \vec{n} zajedničke normale n je vektor okomit i na \vec{s}_1 i na \vec{s}_2 , pa je primjerice dan kao

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2. \quad (2.27)$$

Nadalje, kako se pravci p_1 i n sijeku, to oni određuju ravninu, nazovimo je π_1 . Ta ravnina prolazi točkom T_1 i razapeta je vektorima \vec{s}_1 i \vec{n} . Stoga je njena jednadžba dana mješovitim produktom (vidi (2.12))

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{n}) = 0. \quad (2.28)$$

Analogno, točkom T_2 i vektorima \vec{s}_2 i \vec{n} razapeta je ravnina, nazovimo je π_2 , kojoj je jednadžba

$$(\vec{r} - \vec{r}_2, \vec{s}_2, \vec{n}) = 0. \quad (2.29)$$

Zajednička normala mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 određena je kao presječnica ravnina π_1 i π_2 , dakle sustavom jednadžbi (2.28), (2.29).

Zadatak. Odredite zajedničku normalu pravaca

$$p_1 \dots \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad p_2 \dots \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}.$$

Jesu li zadani pravci mimosmjerni?

Rješenje. Pravci su mimosmjerni, jer se ne sijeku (provjerite) i nisu paralelni (njihovi vektori smjera $\vec{s}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{s}_2 = (0, 0, 1)$ nisu kolinearni). Vektor smjera zajedničke normale je $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (1, -1, 0)$. Prema tome, zajednička normala n dobiva se kao presjek ravnina

$$\pi_1 \dots x + y - 2z = 0, \quad \pi_2 \dots x + y - 1 = 0.$$

Odavde slijedi da je parametarski oblik jednadžbe normale n je, primjerice

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Određimo sada udaljenost mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 . Pokažimo najprije da udaljenost opet možemo računati kao udaljenost između određenih točaka.

Propozicija 2.7.3 *Neka su p_1, p_2 mimosmjerni pravci i neka je n njihova zajednička normala. Neka su N_1, N_2 zajedničke normale n s pravcima p_1, p_2 . Tada je udaljenost mimosmjernih pravaca p_1, p_2 dana je sa*

$$d(p_1, p_2) = d(N_1, N_2).$$

Dokaz. Treba pokazati da je udaljenost točaka N_1, N_2 najmanja moguća od svih udaljenosti točaka $P_1 \in p_1$ i $P_2 \in p_2$. Zaista

$$[\overrightarrow{P_1 P_2}] = [\overrightarrow{P_1 N_1}] + [\overrightarrow{N_1 N_2}] + [\overrightarrow{N_2 P_2}] = \lambda_1 \vec{s}_1 + [\overrightarrow{N_1 N_2}] + \lambda_2 \vec{s}_2.$$

Prema tome je

$$|[\overrightarrow{P_1 P_2}]|^2 = |[\overrightarrow{N_1 N_2}]|^2 + (\lambda_1 \vec{s}_1 + \lambda_2 \vec{s}_2)^2 + 2\lambda_1 \vec{s}_1 \cdot [\overrightarrow{N_1 N_2}] + 2\lambda_2 \vec{s}_2 \cdot [\overrightarrow{N_1 N_2}].$$

Kako je $\vec{s}_1 \cdot [\overrightarrow{N_1 N_2}] = \vec{s}_2 \cdot [\overrightarrow{N_1 N_2}] = 0$, to je

$$d(P_1, P_2)^2 = |[\overrightarrow{P_1 P_2}]|^2 = d(N_1, N_2)^2 + (\lambda_1 \vec{s}_1 + \lambda_2 \vec{s}_2)^2 \geq d(N_1, N_2)^2.$$

□

Izvedimo sada formulu za udaljenost mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 . Iako smo dokazali da je ta udaljenost dana kao udaljenost točaka N_1, N_2 , nećemo je odrediti na taj način, jer je zahtjeva složen račun. Izračunat ćemo je drugačije.

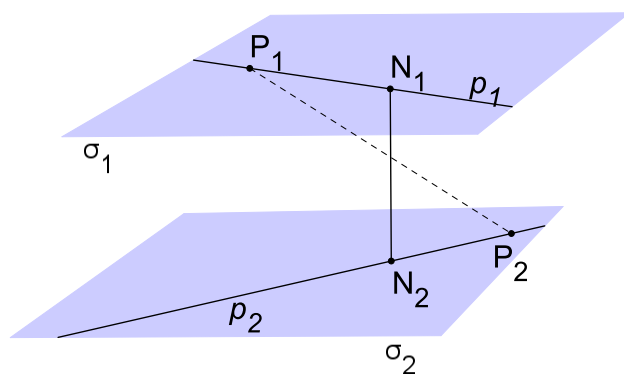
Uočimo da postoje paralelne ravnine σ_1, σ_2 koje sadrže pravce p_1, p_2 (vektor normale tih ravnina je upravo \vec{n}). Očito je udaljenost točaka N_1 i N_2 jednaka udaljenosti ravnina σ_1, σ_2 .

Udaljenost ravnina σ_1, σ_2 možemo izračunati kao, primjerice, udaljenost točke T_2 od ravnine σ_1 . Zapišimo jednadžbu ravnine σ_1 kao $(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n} = 0$ (vidi (2.16)). Koristeći formulu (2.18) za udaljenost točke od ravnine, dobivamo

$$d(T_2, \sigma_1) = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|},$$

te koristeći (2.27) dobivamo

$$d(p_1, p_2) = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}.$$



Dokazali smo

Propozicija 2.7.4 *Udaljenost mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 zadanih jednadžbama (2.26) jednaka je*

$$d(p_1, p_2) = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}. \quad (2.30)$$

Zadatak. Odredite udaljenost mimosmjernih pravaca

$$p_1 \dots \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad p_2 \dots \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}.$$

Rješenje. Kako je $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$, $\vec{s}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{r}_2 = (1, 0, 0)$, $\vec{s}_2 = (0, 0, 1)$, $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (1, -1, 0)$, uvrštavanjem u formulu (2.30) dobivamo $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Analizirajmo kada je

$$d(p_1, p_2) = 0.$$

Znači li to nužno da se pravci sijeku?

Analizirajmo najprije kada je brojnik izraza (2.30) jednak 0, tj. ustanovimo kada vrijedi

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0.$$

Taj mješoviti produkt jednak je 0 ako i samo ako su vektori $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, \vec{s}_1 , \vec{s}_2 komplanarni. To je moguće ako i samo ako pravci p_1 , p_2 leže u istoj ravnini, što pak znači da se oni sijeku ili su paralelni.

U slučaju da su pravci p_1 i p_2 paralelni, njihovi vektori smjera \vec{s}_1 i \vec{s}_2 su kolinearni, pa je $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0}$, što znači da je i nazivnik izraza (2.30) jednak nuli. U tom slučaju udaljenost pravaca p_1 i p_2 računamo na drugačiji način (kako?).

Zaključujemo da je uvjet $d(p_1, p_2) = 0$ nužan i dovoljan da se pravci p_1 , p_2 sijeku, a uvjet $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$ je nužan i dovoljan da pravci p_1 , p_2 leže u istoj ravnini.

Na kraju, odredimo još kut dvaju pravaca i kut pravca i ravnine u E^3 .

Ako se pravci sijeku, tada smo već naznačili što podrazumijevamo pod pojmom kuta. Ako su p_1, p_2 mimosmjerni, tada je kut između njih definiran kao kut između pravaca p_1, p'_2 , gdje je pravac p'_2 pravac paralelan pravcu p_2 , a prolazi nekom točkom T_1 pravca p_1 .

Kut dvaju pravaca određuje se pomoću vektora smjera pravaca, vidi formulu (2.9).

Uočimo da se pravci ne moraju sijeći (primjerice, okomiti pravci su upravo oni kojima su vektori smjera okomiti, pravci mogu biti i mimoilazni).

Nadalje, kut između pravca i ravnine definiran je kao kut između pravca i njegove ortogonalne projekcije na ravninu, dakle, kao kut dvaju pravaca.

Ako označimo kut između pravca i ravnine sa ψ , tada je očito $\phi = \frac{\pi}{2} - \psi$, gdje je ϕ kut između vektora smjera pravca i normale ravnine.

Sada je

$$\cos \phi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|},$$

pri čemu je

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) = \sin \psi.$$

Iz prethodnog slijedi da je kut ψ između pravca i ravnine dan s

$$\sin \psi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|}.$$

Zadaci

1. Kako zadajemo poluravninu u koordinatnom sustavu?
2. Zadana je ravnina π

$$\begin{aligned}x &= 2\lambda + \mu \\y &= 1 - \lambda + 2\mu \\z &= -1 + \lambda - \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Napišite neku točku ravnine π .

Siječe li pravac p

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2t \\y &= -2 - 2t \\z &= 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

ravninu π ?

3. Odredite a i b , tako da pravac $\frac{x-a}{3} = \frac{y+4}{b} = \frac{z}{2}$ prolazi točkom $(-4, -2, -4)$.

$$\left[a = 2, b = -1 \right]$$

4. Odredite a i b , tako da točka $(-3, 2, 4)$ leži na pravcu $\frac{x-1}{2} = \frac{y-a}{2} = \frac{z+2}{b}$.

$$\left[a = 6, b = -3 \right]$$

5. Dan je pravac

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

Napišite tri različite točke tog pravca.

$$\left[\text{npr. } (3, 4, -1), (1, 5, -3), (-1, 6, -5) \right]$$

6. Dana je ravnina

$$\begin{cases} x = -2 + 2\lambda + 3\mu \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - 2\lambda + 4\mu \end{cases}$$

Napišite kanonsku jednadžbu jednog pravca koji leži u toj ravnini.

$$\left[\text{npr. } \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-2} \right]$$

7. Odredite sjecište pravca $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{-2}$ s koordinatnom ravninom yz .

$$\left[\left(0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right]$$

8. Odredite jednadžbu ravnine koja

- (a) sadrži točku $(2, -4, 3)$ i os z .
- (b) sadrži os y i paralelna je s vektorom $\vec{s} = (1, -2, 3)$.
- (c) prolazi točkom $(1, 1, -2)$ i okomita je na ravnine $x-2y+z-4=0$ i $x+2y-2z-4=0$.
- (d) sadrži točke $(-1, -2, 0)$ i $(1, 1, 2)$ i okomita je na ravninu $x+2y+2z-4=0$.
- (e) prolazi točkom $(3, 2, 4)$, a na koordinatnim osima odsjeca odsječke jednakih duljina. Koliko ima takvih ravnina?

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } 2x + y = 0; \text{ b) } 3x - z = 0; \\ \text{c) } 2x + 3y + 4z + 3 = 0; \text{ d) } 2x - 2y + z - 2 = 0; \\ \text{e) } x + y + z = 9, x + y - z = 1, \dots \text{ ima ih } 8 \end{array} \right]$$

9. Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži točke $(-1, -1, -1)$ i $(2, 2, 2)$, a paralelna je s pravcem $\frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{1}$.

$$\left[x - 2y + z = 0 \right]$$

10. Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ i točku $(3, 3, 3)$.

$$\left[x - 2y + z = 0 \right]$$

11. Odredite parametar $k \in \mathbb{R}$ tako da se pravci p_1 i p_2 sijeku:

$$p_1 \quad \dots \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2} \qquad p_2 \quad \dots \quad \frac{x-k}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$$

$$\left[k = -5, \text{ sjecište je } (11, 11, -5) \right]$$

12. Pokažite da pravci $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ i $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$ leže u istoj ravni. Odredite jednadžbu te ravnine.

$$\left[\text{Sjecište pravaca je } (1, -2, 5), \text{ a jednadžba ravnine } -2x + 16y + 13z + 99 = 0. \right]$$

13. Neka je π_1 ravnina koja prolazi točkama $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ i $(0, 1, 0)$, a π_2 ravnina koja prolazi točkama $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 0)$ i $(-1, 2, 5)$. Napišite u kanonskom obliku jednadžbu pravca $\pi_1 \cap \pi_2$.

$$\left[\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0} \right]$$

14. Neka je π_1 ravnina koja prolazi točkama $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 0)$ i $(2, 0, 1)$, te neka je π_2 ravnina koja sadrži pravac

$$p \quad \dots \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

i točku $(0, 0, 0)$. Napišite u kanonskom obliku jednadžbu pravca $\pi_1 \cap \pi_2$.

$$\left[\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1} \right]$$

15. Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$$

i paralelna je s pravcem

$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$\left[2x - 5y - 4z = 14 \right]$$

16. Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{2}$$

i paralelna je s pravcem

$$\begin{cases} x + 3z - 5 = 0 \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

$$\left[5x - 7y + 8z + 9 = 0 \right]$$

17. Dane su točke $A = (0, 1, 2)$ i $B = (-2, 1, 1)$, te pravac

$$p \quad \dots \quad \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

(a) Odredite jednadžbu ravnine π koja sadrži točku A i pravac p .

(b) Odredite jednadžbu pravca q koji je okomit na ravninu π i prolazi točkom B .

$$\left[\text{a) } x - 2y + z = 0; \text{ b) } \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1} \right]$$

18. Dane su točke $A = (0, 0, 0)$ i $B = (1, 1, 0)$, te pravci

$$p \dots \begin{cases} x + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

i $q \dots \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$.

Odredite:

- (a) jednadžbu ravine π koja prolazi točkama A, B i paralelna je s pravcem p ,
- (b) točku $S = \pi \cap q$,
- (c) jednadžbu pravca koji prolazi točkom S i okomit je na ravninu π .

$$\left[\text{a) } x - y + z = 0; \text{ b) } (2, 1, -1); \text{ c) } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1} \right]$$

19. Odredite jednadžbu pravca koji leži u y - z ravnini, prolazi ishodištem i okomit je na pravac određen presjekom ravnina $2x - y = 2, y + 2z = -2$.

$$\left[\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} \right]$$

20. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $(1, 1, 1)$, siječe pravac $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ i okomit je na pravac $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{4}$.

$$\left[\frac{x-1}{9} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-5} \right]$$

21. Odredite udaljenost

- (a) točke $M = (4, 3, 0)$ od ravnine određene točkama $T_1 = (1, 3, 0), T_2 = (4, -1, 2)$ i $T_3 = (3, 0, 1)$.
- (b) ravnina $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ i $4x + 3y - 5z + 12 = 0$.
- (c) pravca $x = y - 1 = z + 1$ od ravnine $2x + y - 3z + 4 = 0$.

$$\left[\text{a) } \sqrt{6}; \text{ b) } 2\sqrt{2}; \text{ c) } \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \right]$$

22. Dani su pravci

$$p_1 \dots \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x - 2y - 3z + 12 = 0 \end{cases}$$

i

$$p_2 \dots \frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Odredite njihovu međusobnu udaljenost. Napišite jednadžbu jednog pravca koji je okomit na p_1 i p_2 , i siječe oba pravca.

$$\left[d = \sqrt{5}, \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-2} \right]$$

23. Odredite udaljenost i zajedničku normalu pravaca

$$\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1} \quad \text{i} \quad \frac{x-6}{1} = \frac{y-12}{2} = \frac{z-8}{-1}.$$

$$\left[\frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{4}, \quad d = 3\sqrt{21} \right]$$

24. Odredite ortogonalnu projekciju

- (a) točke $(3, 1, -1)$ na ravninu $x + 2y + 3z - 30 = 0$.
 (b) pravca $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ na ravninu $x - y + 3z + 8 = 0$.
 (c) točke $(4, 13, 10)$ na pravac $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

$$\left[\text{a) } (5, 5, 5); \text{ c) } (5, 10, 13) \right]$$

25. Dane su ravnine $\pi_1 \dots x - y + 2z = 9$ i $\pi_2 \dots y - z + 3 = 0$, te pravac $p \dots \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{0}$.

Neka je pravac q presjek ravnina π_1 i π_2 , te neka pravac p siječe ravnine π_1 i π_2 redom u točkama T_1 i T_2 . Odredite projekcije točaka T_1 i T_2 na pravac q .

$$\left[(4, -1, 2), (2, 1, 4) \right]$$

26. Odredite kut

- (a) između pravaca $x = 2t, y = 3t, z = t$ i $x = 3t, y = -t, z = 2t$.
 (b) između pravaca

$$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

- (c) između pravca $x = 5 + t, y = -3 + t, z = 4 - 2t$ i ravnine $4x - 2y - 2z + 7 = 0$.
 (d) između ravnina $x + y + z = 3$ i $z = 0$.

$$\left[\text{a) } \arccos \frac{5}{14}; \text{ b) } \arccos \frac{11}{26}; \text{ c) } 60^\circ; \text{ d) } \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

27. Odredite kut između pravaca:

$$\text{(a) } \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{(b) } \begin{cases} x - z + 5 = 0 \\ -x + 2y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + 5z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\text{a) } \arccos\left(-\frac{1}{3}\right); \text{ b) } \arccos \frac{1}{2\sqrt{3}} \right]$$

28. Pravac $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$ siječe koordinatne ravnine $x-y$, $y-z$ i $z-x$ u točkama T_1 , T_2 i T_3 . Odredite površinu trokuta $T_1T_2T_3$ i volumen paralelepipeda određenog vektorima $\overrightarrow{OT_1}$, $\overrightarrow{OT_2}$ i $\overrightarrow{OT_3}$.

$$\left[P = 9\sqrt{5}, V = 0 \right]$$

29. Zadane su točke $A(-1, 6, 3)$ i $B(2, 0, -4)$. Odredite točku C na pravcu $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$, takvu da težište trokuta ABC leži u ravnini $x + y + z = 1$.

$$\left[C(-5, 3, -1) \right]$$

30. Dane su točke $A = (1, 2, 3)$ i $B = (-1, 1, 2)$ i pravac p

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Odredite:

- jednadžbu pravca q koji prolazi točkom B , a paralelan je s p
- jednadžbu ravnine π kroz točku A , a okomita je na q
- presjek ravnine π i pravca p
- udaljenost točke A od pravca p

$$\left[\text{a) } \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}; \text{ b) } -x + y + 2z - 7 = 0; \right. \\ \left. \text{c) } \left(-\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right); \text{ d) } \frac{3}{2}\sqrt{35} \right]$$

31. Zadane su točka $T(1, 0, 3)$ i ravnina $\pi \dots x + 2z = 17$. Napišite:

- jednadžbu ravnine paralelne ravnini π koja prolazi kroz točku T .
- kanonsku i parametarsku jednadžbu pravca okomitog na ravninu π koji prolazi kroz točku T , te jednadžbu tog pravca kao presjek dvije ravnine.
- koordinate ortogonalne projekcije točke T na ravninu π .

$$\left[\text{a) } x + 2y - 7 = 0; \text{ b) } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-3}{2}; \text{ c) } (3, 0, 7) \right]$$

32. Dani su točka $A = (1, 1, 1)$ i pravac

$$\pi \dots \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z}{4}.$$

Odredite

- jednadžbu pravca kroz A paralelnog s π ;
- vektor normale ravnine u kojoj leže točka A i pravac π ;
- projekciju točke A na pravac π .

$$\left[\text{a) } \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-1}{4}; \text{ b) } (-1, 2, 3); \text{ c) } A' = \left(\frac{38}{15}, \frac{5}{3}, \frac{16}{15}\right) \right]$$

33. Dana je točka $A = (1, 0, 0)$ i pravci

$$p \quad \dots \quad \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{i } q \quad \dots \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{2}.$$

- (a) Odredite jednadžbu ravnine Π koja sadrži točku A i okomita je na pravac p .
 (b) Odredite projekciju pravca q na ravninu Π .

$$\left[\text{a) } y - z = 0; \text{ b) } \frac{x}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1} \right]$$

34. Dane su točke $T_1 = (0, 0, 0)$, $T_2 = (0, 4, 1)$ i $T_3 = (1, 3, 0)$. Neka je p_1 pravac kroz točku $A = (1, 2, 3)$ paralelan s T_1T_2 , te neka je p_2 pravac kroz točku $B = (-3, -2, -1)$, paralelan s T_1T_3 . Napišite jednadžbe pravaca p_1 i p_2 , te odredite njihovu međusobnu udaljenost.

$$\left[\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}, \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{0}, d = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{13}} \right]$$

35. Vrhovi trokuta su $A = (4, 1, -2)$, $B = (2, 0, 0)$ i $C = (-2, 3, -5)$. Odredite duljinu visine iz vrha B na stranicu \overline{AC} , i jednadžbu pravca na kojem ona leži.

$$\left[v_B = \frac{5\sqrt{17}}{7}, \frac{x-2}{74} = \frac{y}{57} = \frac{z}{-110} \right]$$

36. Neka je p pravac zadan jednadžbom $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ i neka je $A = (1, 1, 1)$. Odredite jednadžbu ravnine π koja sadrži pravac p i točku A , te jednadžbu pravca q koji prolazi ishodištem, leži u ravnini π i s pravcem p zatvara kut $\frac{\pi}{4}$.

$$\left[x - z = 0, \frac{x}{1} = \frac{y}{\pm\sqrt{2}} = \frac{z}{1} \right]$$

37. Neka je p pravac koji sadrži ishodište i točku $(-4, -6, 5)$, te neka je p' njegova ortogonalna projekcija na ravninu $3x + 2y - 2z = 0$. Odredite kut između pravca p' i pravca q zadanog sa $\frac{x-2}{1} = \frac{y+6}{0} = \frac{z-3}{0}$. Odredite i jednadžbe simetrala kuteva koje određuju pravci p' i q .

$$\left[\arccos \frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{x-6}{5} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-3}{1}, \frac{x-6}{-1} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-3}{1} \right]$$

Poglavlje 3

Krivulje i plohe u koordinatnom sustavu

3.1 Kružnica u E^2

Definicija 3.1.1 *Kružnica je skup točaka u ravnini E^2 jednako udaljenih od čvrste točke u ravnini.*

Tu čvrstu točku nazivamo **središtem** kružnice, a udaljenost od središta do bilo koje točke kružnice **polumjerom** ili **radijusom**.

Izvedimo jednadžbu kružnice u Kartezijevom sustavu.

Neka je $S = (p, q)$ središte kružnice, r njen polumjer, a $T = (x, y)$ po volji odabrana točka kružnice. Tada je točka T točka kružnice ako i samo ako je $d^2(S, T) = r^2$, pa jednadžba kružnice glasi

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Nadalje, ispitajmo moguće položaje pravca i kružnice.

Neka su zadani pravac $y = kx + l$ i kružnica $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$. Određivanje zajedničkih točaka pravca i kružnice svodi se na određivanje rješenja sustava

$$\begin{cases} y = kx + l \\ (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2. \end{cases}$$

Uvrštavanjem jednadžbe pravca u jednadžbu kružnice, dobivamo sljedeću kvadratnu jednadžbu za koordinatu x točke presjeka

$$(1 + k^2)x^2 + 2x(k(l - q) - p) + (l - q)^2 + p^2 - r^2 = 0. \quad (3.1)$$

Kako prethodna jednadžba može imati dva, jedno ili niti jedno (realno) rješenje, to se pravac i kružnica sijeku u dvije točke (pravac je **sekanta** kružnice), u jednoj točki (pravac je **tangenta** kružnice) ili se ne sijeku (pravac je **pasanta** kružnice).

Pravac je tangenta kružnice ukoliko je diskriminanta jednadžbe (3.1) jednaka 0. Tada je

$$((l - q)k - p)^2 - (1 + k^2)((l - q)^2 + p^2 - r^2) = 0,$$

odakle slijedi **uvjet dodira (tangencijalnosti)** pravca i kružnice

$$r^2(1 + k^2) = (q - kp - l)^2. \quad (3.2)$$

Uočimo da se prethodni uvjet može izvesti i na sljedeći način. Pravac p je tangenta kružnice ako i samo ako je njegova udaljenost do središta kružnice jednaka polumjeru kružnice. Dakle, pravac p je tangenta ako i samo ako je

$$r = \frac{|q - kp - l|}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Kvadriranjem prethodnog izraza dobivamo uvjet (3.2).

Zadaci

1. Odredite jednadžbu kružnice koja

- (a) ima središte u točki $A(1, 5)$ i dodiruje pravac $3x - 2y - 6 = 0$.
- (b) dodiruje x -os u točki $A = (6, 0)$ i sadrži točku $B = (9, 9)$.
- (c) dodiruje pravac $x - 7y + 10 = 0$ u točki s ordinatom 2, a središte joj se nalazi na pravcu $2x + y = 0$.
- (d) ima polumjer 5 i dodiruje pravac $2x - y + 4 = 0$ u točki s apscisom -1 .
- (e) dodiruje pravce $x = 8$ i $3x + 4y = 46$, te prolazi točkom $(-1, 0)$.
- (f) dodiruje pravce $x + y - 2 = 0$, $x - y + 4 = 0$ i $x - 7y = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } (x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 13; \text{ b) } (x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 25; \text{ c) } (x - 6)^2 + (y + 12)^2 = 200; \\ \text{d) } (x + 1 - 2\sqrt{5})^2 + (y - 2 + \sqrt{5})^2 = 25, (x + 1 + 2\sqrt{5})^2 + (y - 2 - \sqrt{5})^2 = 25; \\ \text{e) } (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 5^2, (x + 81)^2 + (y + 39)^2 = 73^2; \\ \text{f) Postoje četiri takve kružnice. Upisana kružnica ima jednadžbu} \\ (x + 1)^2 + (y - \frac{7}{6})^2 = \frac{121}{72}. \end{array} \right]$$

2. Odredite realne brojeve a, b tako da $2x^2 + ay^2 + bx - 5y + 3 = 0$ bude jednadžba kružnice koja prolazi točkom $(2, 3)$.

$$\left[a = 2, b = -7 \right]$$

3. Napišite jednadžbu tangente na kružnicu $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$ u njenoj točki s apscisom 0, različitoj od ishodišta.

$$\left[y = -2x + 16 \right]$$

4. Odredite površinu trokuta kojeg određuju tangente na kružnicu $x^2 + y^2 = 50$ u točkama $(5, 5), (-1, 7), (-7, 1)$.

$$\left[\frac{75}{2} \right]$$

5. Napišite jednadžbe tangenata povučениh iz točke $(8, 8)$ na kružnicu $x^2 + y^2 = 32$, te odredite kut među njima.

$$\left[y = (2 \pm \sqrt{3})(x - 8) + 8, \varphi = 60^\circ \right]$$

6. Iz točke $(-9, 3)$ povučene su tangente na kružnicu $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 78 = 0$. Izračunajte udaljenost središta kružnice od tetive koja spaja dirališta tih tangenata.

$$\left[7 \right]$$

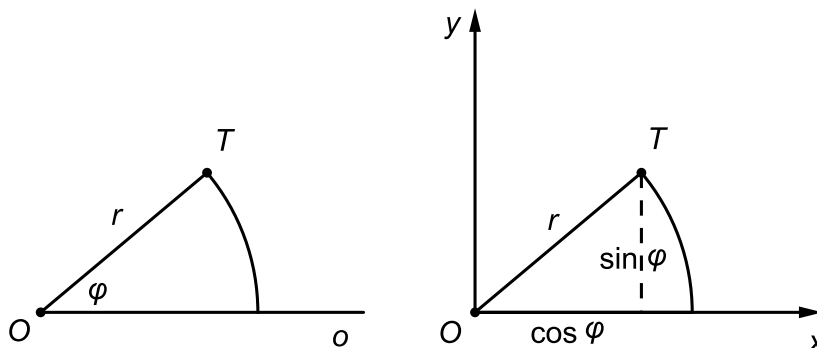
7. Dana je kružnica $x^2 + y^2 = 1$ i točke $A = (1, 0)$ i $B = (0, -1)$ na njoj. Provjerite da za bilo koju točku T na toj kružnici kut $\angle ATB$ iznosi $\frac{\pi}{4}$ ili $\frac{3\pi}{4}$. (To je posljedica teorema o obodnom i središnjem kutu.)

3.2 Polarni koordinatni sustav u E^2

U ravnini E^2 možemo uvesti koordinatni sustav i na sljedeći način.

Neka je O čvrsta točka i polupravac o čvrsti polupravac s početkom u točki O .

Tada je točka $T \in E^2$, $T \neq O$, jednoznačno je određena svojom udaljenošću $r = d(O, T)$ od točke O i kutom φ što ga polupravac OT zatvara s polupravcem o , $\varphi \in [0, 2\pi)$.



Uvedeni koordinatni sustav nazivamo **polarnim sustavom**, a uređeni par (r, φ) **polarnim koordinatama** točke T . Točka O zove se **pol**, a polupravac O **polarna os**.

Odredimo vezu među pravokutnim i polarnim koordinatama točke T , pri čemu pravokutni koordinatni sustav ima ishodište u točki O , a polarna os o se podudara s osi apscisa (tj. njenim pozitivnim dijelom). Očito je

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Obratno,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Pri određivanju kuta φ uzimamo u obzir u kojem kvadrantu leži točka T .

Zadaci

1. U pravokutnom koordinatnom sustavu dane su točke $(60, 0)$, $(-6, 2\sqrt{3})$, $(0, -5)$, $(11, 11)$, $(0, 0)$, $(-3\sqrt{3}, -3)$, $(9, -12)$, $(-200, 100)$. Odredite njihove polarne koordinate.

$$\left[(60, 0), (4\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}), (5, \frac{3\pi}{2}), (11\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}), r = 0 \text{ } (\varphi \text{ nije određen}), \right. \\ \left. (6, \frac{7\pi}{6}), (15, \arctg -\frac{4}{3}), (100\sqrt{5}, \arctg -\frac{1}{2}) \right]$$

2. Točke $(3, -\frac{2\pi}{3})$, $(20, \frac{7\pi}{6})$, $(15, -\frac{\pi}{2})$, $(10, \frac{3\pi}{4})$, $(12, -\frac{\pi}{4})$, $(7, \frac{\pi}{2})$, $(0, \frac{11\pi}{12})$, $(1, \frac{7\pi}{3})$ dane su svojim polarnim koordinatama (r, φ) . Odredite njihove kartezijeve koordinate.

$$\left[(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}), (-10\sqrt{3}, -10), (0, -15), (-5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}), \right. \\ \left. (6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}), (0, 7), (0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \right]$$

3. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut duljine stranice 1. Napišite koordinate svih njegovih vrhova i središta S u polarnom koordinatnom sustavu kojem je pol u točki A , a os je polupravac AD .

$$\left[A(r = 0), B(1, -\frac{\pi}{3}), C(\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}), D(2, 0), E(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}), F(1, \frac{\pi}{3}), S(1, 0) \right]$$

4. Odredite polarne koordinate polovišta dužine \overline{AB} , ako je $A(12, \frac{4\pi}{9})$ i $B(12, -\frac{2\pi}{9})$.

$$\left[r = 6, \varphi = \frac{\pi}{6} \right]$$

5. Odredite udaljenost točaka $A(5, \frac{\pi}{4})$ i $B(8, -\frac{\pi}{12})$ zadanih polarnim koordinatama.

$$\left[d = 7 \right]$$

6. Izvedite općenitu formulu za udaljenost dviju točaka s polarnim koordinatama (r_1, φ_1) i (r_2, φ_2) .

$$\left[d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right]$$

7. Napišite formulu za površinu trokuta OAB ako je $A = (r_1, \varphi_1)$, $B = (r_2, \varphi_2)$.

$$\left[P = \frac{1}{2}r_1r_2 \sin |\varphi_2 - \varphi_1| \right]$$

8. Odredite u polarnom koordinatnom sustavu jednadžbu kružnice polumjera r_0 sa središtem u

(a) polu polarnog sustava (b) točki S s koordinatama (r_1, φ_1) ?

$$\left[\text{a) } r = r_0, \text{ b) } r^2 - 2rr_1 \cos(\varphi - \varphi_1) = r_0^2 - r_1^2 \right]$$

9. Odredite polarnu jednadžbu

(a) polupravca s vrhom u polu koordinatnog sustava

(b) pravca koji prolazi kroz pol

(c) pravca koji ne prolazi kroz pol

$$\left[\text{a) } \varphi = \varphi_0, \text{ b) } \varphi - \varphi_0 = k\pi, k = 0, 1, \text{ c) } r = \frac{d}{a \cos \varphi + b \sin \varphi} \right]$$

10. Odredite kartezijeve jednadžbe krivulja:

- (a) $r \sin \varphi = 1$,
- (b) $\sqrt{5} \sin \varphi = 1$,
- (c) $r^2 \sin 2\varphi = 2a^2$,
- (d) $\operatorname{tg} \varphi = 1$,
- (e) $r + \operatorname{tg} \varphi = 0$.

$$\left[\text{a) } y = 1; \text{ b) } x - 2y = 0; \text{ c) } xy = a^2; \text{ d) } y = x; \text{ e) } \sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{y}{x} \right]$$

11. Odredite polarne jednadžbe krivulja:

- (a) $y = 1$,
- (b) $y^2 = 2px$,
- (c) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$,
- (d) $2xy = 1$,
- (e) $9x^2 + 4y^2 = 36$,
- (f) $x^2 - y^2 + 2xy = 0$.

$$\left[\text{a) } r \sin \varphi = 1; \text{ b) } r = \frac{2p}{\sin^2 \varphi \cos \varphi}; \text{ c) } r = 4(\sin \varphi + \cos \varphi); \right. \\ \left. \text{d) } r^2 \sin 2\varphi = 1; \text{ e) } r^2(4 + 5 \cos^2 \varphi) = 36; \text{ f) } \varphi \in \left\{ \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8} \right\} \right]$$

12. Skicirajte krivulje dane sljedećim polarnim jednadžbama:

- (a) $r = 2 \cos \varphi$
- (b) $r = 4 \sin \varphi$
- (c) $r = 1 + 2 \cos \varphi$

13. U polarnim koordinatama dana je jednadžba $r^2 \sin 2\varphi = 2$. Napišite jednadžbu te krivulje u kartezijevim koordinatama. Koja je to krivulja? Skicirajte ju.

$$\left[\text{hiperbola } xy = 1 \right]$$

14. Provjerite da je $r = \frac{2p \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$ polarna jednadžba parabole $y^2 = 2px$, ako se polarna os podudara s x -osi, a pol se nalazi u tjemenu parabole.

15. Odredite sjecište krivulja čije su jednadžbe u polarnim koordinatama $r = \sin \varphi$ i $r = -\sqrt{3} \cos \varphi$. Koje su polarne, a koje kartezijeve koordinate sjecišta? Skicirajte te krivulje.

$$\left[(0, 0), \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right) \text{ odnosno } r = \frac{\sqrt{3}}{2}, \varphi = \frac{2\pi}{3} \right]$$

16. Točka $A = (a, \alpha)$ dana je svojim polarnim koordinatama. Pravac p prolazi točkom A i paralelan je s polarnom osi. Odredite jednadžbu pravca p u polarnim koordinatama.

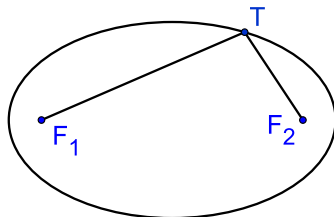
$$\left[r \sin \varphi = a \sin \alpha \right]$$

3.3 Elipsa

Definicija 3.3.1 Neka su F_1, F_2 dvije čvrste točke u ravnini E^2 udaljene za $2e > 0$ i neka je a zadani realan broj, $a > e$. **Elipsa** je skup točaka u E^2 za koje je zbroj udaljenosti od F_1 i F_2 konstantan i jednak $2a$

$$\mathcal{E} = \{T \in E^2 : d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a\}.$$

Točke F_1, F_2 nazivamo **žarištima** ili **fokusima elipse**.



Napomena. Na osnovu definicije, elipsu možemo konstruirati tzv. **vrtlarskom konstrukcijom**. Ako se napne labava nit (lopatom u rukama vrtlara) koja je učvršćena u dvjema točkama (fokusi), točka u kojoj je nit napeta (lopatom), opisuje elipsu.

Odredimo jednadžbu elipse.

Postavimo pravokutni koordinatni sustav tako da točke F_1, F_2 leže na osi x i da je polovište O dužine $\overline{F_1F_2}$ ishodište sustava. Tada točke F_1, F_2 imaju koordinate

$$F_1 = (-e, 0), \quad F_2 = (e, 0).$$

Neka je T po volji odabrana točka elipse. Tada je

$$d(T, F_1) + d(T, F_2) = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a. \quad (3.3)$$

Pomnožimo li tu jednadžbu sa $\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$, sređivanjem dobivamo

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \frac{2ex}{a}. \quad (3.4)$$

Zbrajanjem (3.3) i (3.4) te kvadriranjem dobivamo

$$(x+e)^2 + y^2 = \left(a + \frac{ex}{a}\right)^2,$$

te je uz $b^2 = a^2 - e^2 > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.5)$$

Vrijedi i obratno: točka koja zadovoljava jednadžbu (3.5) je točka elipse.

Zaista, ako definiramo $e^2 = a^2 - b^2$, $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$, tada su F_1, F_2 tražene točke iz definicije elipse.

Neka je $T = (x, y)$ točka koja zadovoljava jednadžbu (3.5). Treba pokazati da je $d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a = \text{konst.}$

Vrijedi

$$d(T, F_1) = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}, \quad d(T, F_2) = \sqrt{(x-e)^2 + y^2},$$

pri čemu je $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Stoga je

$$d(T, F_1) = \left|a + \frac{e}{a}x\right|, \quad d(T, F_2) = \left|a - \frac{e}{a}x\right|.$$

Kako je $e \leq a$ i kako za apscisu x točke T mora vrijediti $-a \leq x \leq a$ (inače je već pribrojnik $\frac{x^2}{a^2}$ u jednadžbi (3.5) veći od 1), to je

$$d(T, F_1) = a + \frac{e}{a}x, \quad d(T, F_2) = a - \frac{e}{a}x,$$

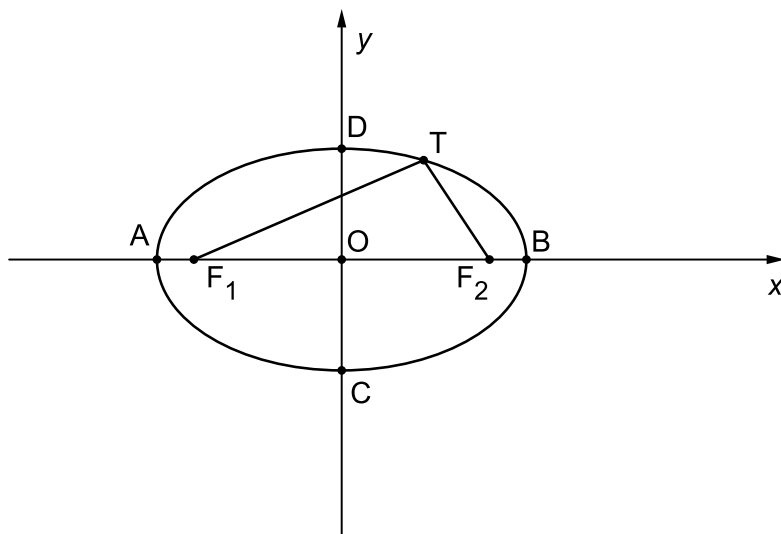
te je $d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a$. Time je obrat pokazan.

Naglasimo još jednom da je za točke na elipsi uvijek $|x| \leq a$. Zaista iz jednadžbe elipse (3.5) slijedi

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

pri čemu je korijen definiran samo za $|x| \leq a$.

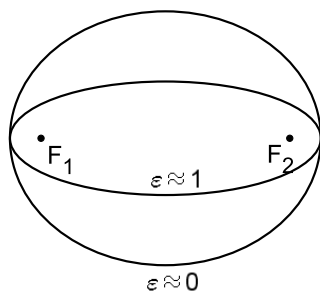
Analogno je i $|y| \leq b$. Odavde zaključujemo da je elipsa ograničena krivulja.



Jednadžba (3.5) naziva se **kanonskom jednadžbom elipse**. Ona se naziva i **središnjom (centralnom) jednadžbom** jer je ishodište koordinatnog sustava smješteno u središte ili centar elipse (elipsa je centralnosimetričan skup točaka sa središtem (centrom) simetrije u točki O).

Označimo $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (0, -b)$, $D = (0, b)$. Te točke se zovu **tjemena elipse**. Dužina \overline{AB} zove se **glavna (velika) os**, dužine \overline{OA} , \overline{OB} glavne poluosi, a dužina \overline{CD} **sporedna (mala) os**, \overline{OC} , \overline{OD} sporedne poluosi elipse. Prema tome, a je duljina glavne, a b sporedne poluosi.

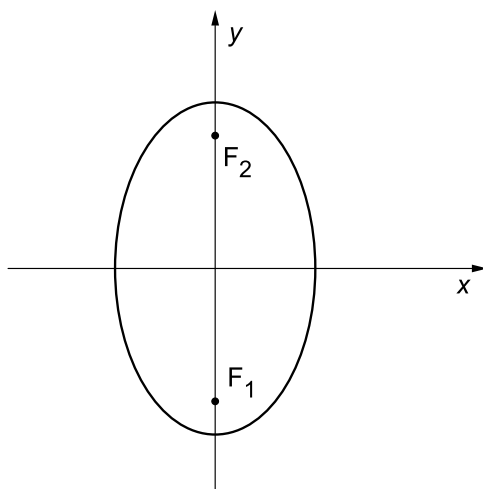
Broj e zove se *linearni ekscentricitet elipse*, $e < a$, a broj $\varepsilon = \frac{e}{a}$, $0 < \varepsilon < 1$, *numerički ekscentricitet elipse*. Kada je ε blizak 0, veličine a i b su bliske, pa je elipsa bliska kružnici. Još kažemo da kružnica ima numerički ekscentricitet jednak 0 (jer $a = b$). Ako je numerički ekscentricitet blizak 1, tada je elipsa "jako spljoštena".



Napomena. Ako postavimo koordinatni sustav tako da fokusi određuju y -os tog sustava, tada je jednadžba takve elipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad b < a.$$

U tom slučaju fokusi imaju koordinate $F_i = (0, \pm e)$, $e^2 = a^2 - b^2$.



Pravac $y = kx + l$ i elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ imaju dvije, jednu ili niti jednu zajedničku točku. Pravac je tangenta elipse, ako je diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$x^2(a^2k^2 + b^2) + 2kla^2x + a^2(l^2 - b^2) = 0 \tag{3.6}$$

jednaka 0.

Sličnim postupkom kao kod kružnice dobivamo uvjet dodira (tangencijalnosti) pravca i elipse

$$k^2a^2 + b^2 = l^2.$$

Odredimo jednadžbu tangente u točki elipse $D_1 = (x_1, y_1)$ (diralište tangente). Rješenja jednadžbe (3.6) uz uvjet $D = 0$ su

$$x_1 = -\frac{ka^2}{l}, \quad y_1 = \frac{b^2}{l}.$$

Iz te dvije jednadžbe određujemo koeficijent smjera k i odsječak l tražene tangente

$$k = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \quad l = \frac{b^2}{y_1}.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu $y = kx + l$ i sređivanjem dobivamo jednadžbu tangente elipse s diralištem u točki $D_1 = (x_1, y_1)$

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Direktrisa ili **ravnalica elipse** je pravac p za koji vrijedi da je za svaku točku T elipse omjer udaljenosti od jednog žarišta elipse i od tog pravca konstantan realan broj $c > 0$, tj. vrijedi

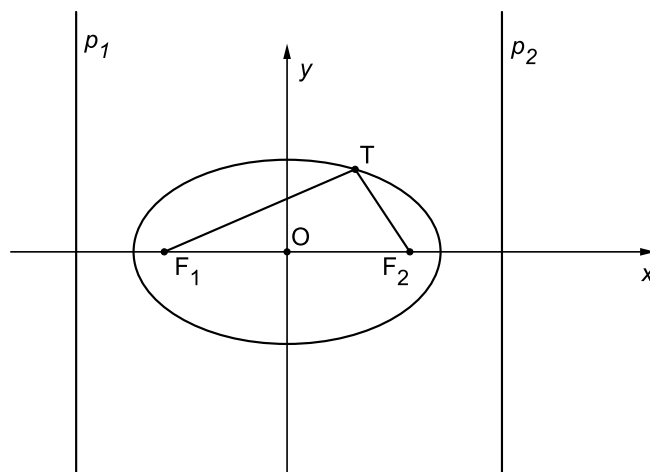
$$\frac{d(T, F)}{d(T, p)} = c. \quad (3.7)$$

Postoji li direktrisa elipse?

Ako postoji, ona ne smije sjeći elipsu (tada bi postojale točke elipse čija je udaljenost od direktrise jednaka 0 i one čija udaljenost nije 0).

Također, kako su točke koje su simetrične s obzirom na veliku os elipse jednako udaljene od jednog fokusa, to moraju biti jednako udaljene i od direktrise.

Dakle direktrisa mora biti okomita na veliku os elipse.



Uočimo još kako je elipsa simetrična u odnosu na sporednu os, te ako postoji jedna, onda postoje i dvije direktise, p_1, p_2 (koje odgovaraju dvama žarištima). Također se lako vidi da direktrisa odgovara bližem žarištu.

Iz dosad rečenog slijedi da bi jednadžbe direktrisa trebale biti $x = \pm x_0$.

Odredimo $x_0 > 0$.

Kako je

$$c \cdot (d(T, p_1) + d(T, p_2)) = 2cx_0 = d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a,$$

to je $x_0 = \frac{a}{c}$.

Nadalje, za tjemelje elipse B posebno vrijedi $d(B, F_2) = c d(B, p_2)$ iz čega slijedi

$$a - e = c(x_0 - a) = c \left(\frac{a}{c} - a \right)$$

te je $c = \frac{e}{a}$. Drugim riječima, jedini c za koji skup točaka T za koje vrijedi da je skup točaka koji zadovoljava (3.7) neprazan jednak je numeričkom ekscentricitetu $0 < \varepsilon < 1$.

Dakle, ako elipsa ima direktrise, tada bi njihove jednadžbe trebale glisiti

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}.$$

Direktnom provjerom možemo se uvjeriti da sve točke elipse zadovoljavaju uvjet (3.7), pri čemu za $F(e, 0)$ treba uzeti direktrisu $x = \frac{a}{\varepsilon}$, a za $F(-e, 0)$ direktrisu $x = -\frac{a}{\varepsilon}$. Zaista, za

točku $T = \left(x, \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)$ elipse vrijedi (uzimamo fokus $F(e, 0)$ i direktrisu $x = \frac{a}{\varepsilon}$)

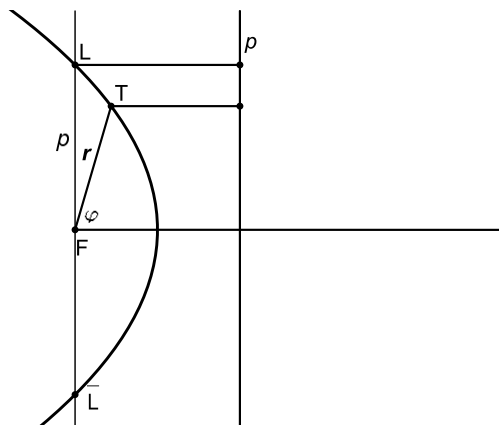
$$d(T, F) = \sqrt{\frac{e}{a}x - a} = \frac{e}{a} \left| x - \frac{a^2}{e} \right|, \quad d(T, p) = \left| \frac{a}{\varepsilon} - x \right|,$$

te slijedi uvjet (3.7).

Vrijedi i obratno, ako točka T ravnine ispunjava uvjet (3.7), $c = \varepsilon < 1$, tada je to točka elipse. Stoga uvjet (3.7) uz $c = \varepsilon < 1$ karakterizira točke elipse. Ta karakterizacija elipse poznata je kao **Pappus¹-Boškovićeve definicija (karakterizacija)** elipse.

Polazeći od Pappus-Boškovićeve karakterizacije elipse, izvedimo polarnu jednadžbu elipse.

Polarni sustav uvodimo tako da je fokus F elipse pol polarnog sustava, a polupravac s početkom u F okomit na direktrisu p polarna os (vidi sliku).



Tetivu elipse koja prolazi fokusom i koja je paralelna s direktrisom elipse nazivamo *latus rectum*. Označimo njenu duljinu s $2p$, a točke koje ona odsjeca na elipsi s L, \bar{L} . Kako je L točka elipse, vrijedi

$$d(L, F) = \varepsilon d(L, p).$$

¹Pappus – starogrčki matematičar, 3. st.

Neka je sada T neka točka elipse, a (r, φ) njene polarne koordinate. Također vrijedi

$$d(T, F) = \varepsilon d(T, p).$$

Prema tome

$$p = d(L, F) = \varepsilon d(L, p) = \varepsilon (r \cos \varphi + d(T, p)) = \varepsilon r \cos \varphi + d(T, F) = \varepsilon r \cos \varphi + r.$$

Polarna jednadžba elipse, dakle, glasi

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (3.8)$$

Veličinu p nazivamo i **parametrom elipse**.

Napomena. J. Kepler (1571-1630) je ustanovio da se planeti gibaju oko Sunca po eliptičnim putanjama, sa Suncem u jednom fokusu. Primjerice, za Zemlju, duljine velike i male osi njezine eliptične putanje iznose (u milijunima km)

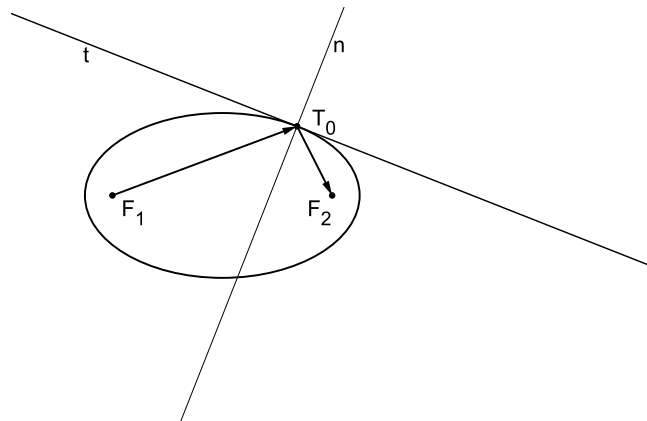
$$2a \approx 300.638, \quad 2b \approx 300.590.$$

Prema tome, numerički ekscentricitet te elipse je $\varepsilon = 0.018$. Što možete zaključiti o toj elipsi? Nadalje, Mjesec i umjetni sateliti se također gibaju po eliptičnim putanjama oko Zemlje.

Ako elipsu zamislimo kao zrcalo, tada vrijedi sljedeće *zrcalno (optičko) svojstvo elipse*:

Teorem 3.3.1 *Ako zraka svjetlosti izlazi iz jednog fokusa i reflektira se od elipse, tada reflektirana zraka prolazi drugim fokusom.*

Odatle potiče naziv za fokuse (žarišta).



Matematičkim rječnikom prethodni teorem izričemo na sljedeći način:

Teorem 3.3.2 *Neka je T_0 točka elipse i neka je t tangenta elipse u točki T_0 . Tada su kutovi koje zatvaraju spojnice F_1T_0 , F_2T_0 s tangentom t jednaki.*

Dokaz. Označimo kut $\angle(\overline{F_1T_0}, t) = \alpha$, a kut $\angle(\overline{F_2T_0}, t) = \beta$. Treba pokazati $\alpha = \beta$.

Kut između pravaca računamo po formuli (2.8). Ako je $T_0 = (x_0, y_0)$, tada je koeficijent smjera tangente elipse u toj točki jednak $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, a koeficijent smjera pravca T_0F_1 jednak $\frac{y_0}{x_0 + e}$. Dobivamo

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{b^2}{y_0e} \right|.$$

Slično dobivamo i

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{b^2}{y_0e} \right|.$$

Kako je $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, tvrdnja slijedi. □

Teorem možemo izreći i na sljedeći način:

Teorem 3.3.3 *Neka je T_0 točka elipse i neka je t tangenta elipse u točki T_0 . Tada tangenta t raspolavlja vanjski kut između spojnice F_1T_0 , F_2T_0 .*

Korolar 3.3.4 *Neka je T_0 točka elipse i neka je n normala elipse u točki T_0 . Tada su kutovi koje zatvaraju spojnice F_1T_0 , F_2T_0 s normalom n jednaki.*

Napomena. Zrcalno svojstvo elipse se koristi kod gradnje tzv. *prostorija šapta* (whispering galleries). Ako osoba stoji u jednom fokusu prostorije eliptičnog oblika i govori šaptom, tada ju osoba koja stoji u drugom fokusu čuje.

Zadaci

1. Napišite kanonsku jednadžbu elipse kojoj je udaljenost između fokusa 8, a udaljenost fokusa od najdaljeg tjemena 9. Koliki joj je numerički ekscentritet?

$$\left[\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \varepsilon = \frac{4}{5} \right]$$

2. Odredite jednadžbu elipse s fokusima $F_1 = (-3, 0)$, $F_2 = (3, 0)$ kojoj je pravac $x - y - 5 = 0$ tangenta.

$$\left[\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1 \right]$$

3. Odredite jednadžbe tangenata elipse $25x^2 + 64y^2 = 1600$ koje imaju koeficijent smjera $\frac{3}{2}$, te provjerite da dirališta tih tangenata leže na istom promjeru (tetivi koja sadrži središte elipse).

$$\left[y = \frac{3}{2}x \pm 13 \right]$$

4. Na pravcu $x = 4$ odredite sve točke iz kojih se elipsa $5x^2 + 12y^2 = 60$ vidi pod pravim kutem.

$$\left[(4, 1), (4, -1) \right]$$

5. Tetiva koja prolazi fokusom elipse (čije su poluosi a , b) i koja je paralelna s njenom direktrisom naziva se *latus rectum*. Izračunajte duljinu te tetive u ovisnosti o a , b .

$$\left[\frac{2b^2}{a} \right]$$

6. Neka je $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ elipsa, te neka je $P = (x_0, y_0)$ točka u ravnini elipse. Tada pravac p zadan s jednadžbom $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$ zovemo *polarom* točke P s obzirom na zadanu elipsu.

Ako je P vanjska točka elipse, onda je polara točke P spojnica dirališta tangenata iz P na elipsu. Dokažite.

7. Odredite jednadžbe tangenata iz točke $P = (14, 1)$ na elipsu $x^2 + 4y^2 = 100$. Zadatak rješite na dva načina: pomoću polare i pomoću uvjeta dodira.

$$\left[2x - 3y - 25 = 0, 3x + 8y - 50 = 0 \right]$$

8. Ako normala u svakoj točki elipse prolazi centrom, onda je ta elipsa kružnica. Dokažite.

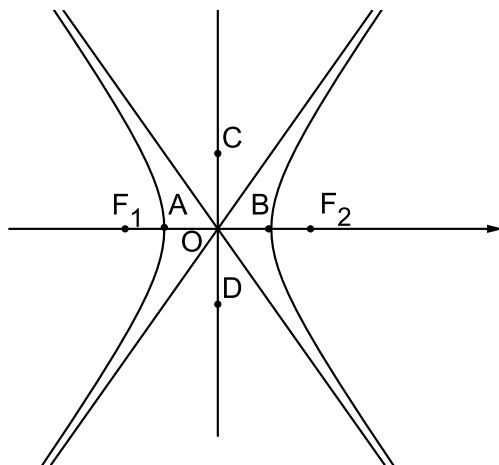
9. Neka je D neka točka elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ različita od tjemena i M njena projekcija na y os. Tangenta na elipsu u točki D siječe y os u točki N . Točka O je ishodište koordinatnog sustava. Pokažite da je $|OM| \cdot |ON| = b^2$.

3.4 Hiperbola

Definicija 3.4.1 Neka su F_1, F_2 dvije čvrste točke u ravnini E^2 udaljene za $2e > 0$ i neka je a zadani pozitivan realan broj, $a < e$. **Hiperbola** je skup točaka u E^2 za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od F_1 i F_2 konstantna i jednaka $2a$

$$\mathcal{H} = \{T \in E^2 : |d(T, F_1) - d(T, F_2)| = 2a\}.$$

Točke F_1, F_2 nazivamo **žarištima** ili **fokusima hiperbole**.



Jednadžbu hiperbole izvodimo analogno kao jednadžbu elipse. Dobivamo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.9)$$

gdje je $b^2 = e^2 - a^2$. Analogno kako kod elipse provjeravamo da sve točke skupa zadanog jednadžbom (3.9) su točke hiperbole opisane definicijom.

Iz jednadžbe (3.9) slijedi

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

odakle zaključujemo da je y definiran za sve x , $|x| \geq a$, te je hiperbola neograničena krivulja koja se sastoji od dviju grana.

Točke $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$ zovemo **tjemena hiperbole**. Točke $C = (0, b)$, $D = (0, -b)$ nisu točke hiperbole. Dužinu \overline{AB} zovemo **realna os**, dužine \overline{OA} , \overline{OB} realne poluosi, a dužinu \overline{CD} **imaginarna os**, \overline{OC} , \overline{OD} imaginarne poluosi hiperbole.

Jednadžba (3.9) također se naziva **kanonskom jednadžbom hiperbole**. Naziva se i **središnjom (centralnom) jednadžbom** jer je ishodište koordinatnog sustava smještemo u središte ili centar hiperbole (hiperbola je centralnosimetričan skup točaka sa središtem simetrije u točki O).

Veličina e naziva se **linearni ekscentricitet**, a $\varepsilon = \frac{e}{a}$ **numerički ekscentricitet hiperbole**. Iz $e > a$ slijedi $\varepsilon > 1$.

Napomena. Ako postavimo koordinatni sustav tako da fokusi određuju y -os tog sustava, tada je jednadžba takve hiperbole

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Fokusi imaju koordinate $F_i = (0, \pm e)$, $i = 1, 2$, $e^2 = a^2 + b^2$.

Pravac i hiperbola mogu imati dvije, jednu ili niti jednu zajedničku točku. Uvjet da je pravac $y = kx + l$ tangenta hiperbole (3.9) dobivamo na analogan način kao kod elipse (**uvjet dodira** ili **tangencijalnosti**)

$$k^2 a^2 - b^2 = l^2.$$

Analogno se određuje **jednadžba tangente** u točki hiperbole $D_1 = (x_1, y_1)$ (diralište tangente). Dobivamo

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Za razliku od elipse, hiperbola ima **asimptote**. Asimptote hiperbole su određene kao granični položaji tangente kada se diralište tangente giba po grani hiperbole prema beskonačnosti.

Odredimo jednadžbe asimptota. Tangenta dira hiperbolu u točki s koordinatama

$$x_1 = \frac{a^2 k l}{b^2 - a^2 k^2}, \quad y_1 = \frac{b^2 l}{b^2 - a^2 k^2}.$$

Diralište je *beskonačno daleka točka* hiperbole ako i samo ako je $b^2 - a^2k^2 = 0$, odakle slijedi $k = \pm \frac{b}{a}$. Uvjet tangencijalnosti povlači da je tada $l = 0$, pa su jednadžbe asimptota

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Napomenimo da se asimptota hiperbole može definirati i kao pravac kojemu se hiperbola sve više približava kako se točka hiperbola giba po nekoj njenoj grani prema beskonačnosti.

Direktrisa ili **ravnalica hiperbole** je pravac p za koji vrijedi da je za svaku točku T hiperbole omjer

$$\frac{d(T, F)}{d(T, p)}, \quad (3.10)$$

konstantan realan broj $c > 0$. Kao i kod elipse, pokazuje se da hiperbola ima dvije direktrise dane jednadžbama

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{e}.$$

Nadalje, za hiperbolu također vrijedi **Pappus-Boškovićeva karakterizacija**: Neka je F čvrsta točka, p čvrsti pravac u E^2 . Skup točaka T u E^2 koje zadovoljavaju uvjet

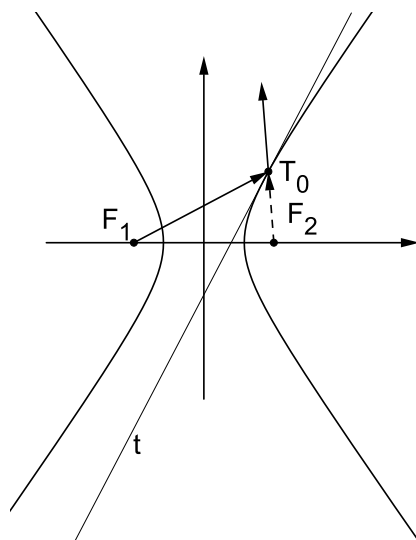
$$\frac{d(T, F)}{d(T, p)} = \varepsilon, \quad \varepsilon > 1$$

je hiperbola.

Polarna jednadžba hiperbole dana je s (3.8) uz uvjet $\varepsilon > 1$.

Izrecimo još i *zrcalno svojstvo za hiperbolu*:

Teorem 3.4.1 *Ako zraka svjetlosti izlazi iz jednog fokusa i reflektira se od hiperbole, tada reflektirana zraka izgleda kao da izlazi iz drugog fokusa.*



Zrcalno svojstvo izričemo i na sljedeći način:

Teorem 3.4.2 *Neka je T_0 točka hiperbole i neka je t tangenta hiperbole u točki T_0 . Tada su kutovi koje zatvaraju spojnice F_1T_0 , F_2T_0 s tangentom t jednaki.*

Ili:

Teorem 3.4.3 *Neka je T_0 točka hiperbole i neka je t tangenta hiperbole u točki T_0 . Tada tangenta t raspolavlja unutrašnji kut između spojnica F_1T_0 , F_2T_0 .*

Napomena. Svojstvo koje definira hiperbolu koristi se u navigaciji. Brod na moru mjeri razliku udaljenosti od dva fiksna odašiljača (mjeri razliku u vremenu primanja sinkroniziranih radio-signalâ). Time je položaj broda smješten na hiperbolu kojoj su odašiljači u fokusima. Ako se koriste četiri odašiljača (tj. dva para odašiljača), tada je položaj broda na presjeku hiperbola.

Zadaci

1. Napišite kanonsku jednadžbu hiperbole kojoj je udaljenost između fokusa 8, a od fokusa do bližeg tjemena 2. Koliki joj je numerički ekscentritet?

$$\left[3x^2 - y^2 = 12, \varepsilon = 2 \right]$$

2. Napišite jednadžbu centralne hiperbole koja dodiruje kružnicu $x^2 + y^2 = 50$ u dvije točke, a jedna asimptota joj je paralelna s pravcem $3x + y - 4 = 0$.

$$\left[9x^2 - y^2 = 450 \right]$$

3. Napišite jednadžbu centralne hiperbole kojoj kružnica $x^2 + y^2 = 26$ prolazi kroz fokuse, a točka $(-6, 4)$ leži na asimptoti.

$$\left[4x^2 - 9y^2 = 72 \right]$$

4. Naći udaljenosti fokusa hiperbole $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ od njenih asimptota.

$$\left[8 \right]$$

5. Na hiperboli $3x^2 - 4y^2 = 72$ odredite točku najbližu pravcu $3x + 2y + 1 = 0$.

$$\left[(-6, 3) \right]$$

6. Na hiperboli $3x^2 - y^2 = 12$ odredite točku koja je dva puta bliža desnom nego lijevom fokusu.

$$\left[(3, \sqrt{15}) \right]$$

7. U sjecištima pravca $x+y=2$ i hiperbole $2x^2-y^2=8$ povučene su tangente na hiperbolu. U kojoj točki i pod kojim kutem se sijeku te tangente?

$$\left[\text{Tangente se sijeku u točki } (2, -4) \text{ pod kutem } \arctg \frac{2}{3} \approx 33^\circ 41'. \right]$$

8. Tetiva koja prolazi fokusom hiperbole (kojoj su duljine poluosi a, b) i koja je paralelna s njenom direktrisom naziva se *latus rectum*. Izračunajte duljinu te tetive u ovisnosti o a, b .

$$\left[\frac{2b^2}{a} \right]$$

9. Neka je $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ hiperbola, te neka je $P = (x_0, y_0)$ točka u ravnini elipse. Tada pravac p zadan s jednadžbom $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$ zovemo *polarom* točke P s obzirom na zadanu hiperbolu.

Uvjerite se da je za vanjsku točku hiperbole P polara upravo spojnica dirališta tangenata iz P na hiperbolu.

10. Nađite jednadžbe tangenata iz točke $T = (7, \frac{13}{3})$ na hiperbolu $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ pomoću uvjeta dodira i pomoću polare.

$$\left[5x - 6y - 9 = 0, 41x - 60y - 27 = 0 \right]$$

11. Dokažite da je diralište tangente hiperbole ujedno i polovište dužine koju ta tangenta odsjeca među asimptotama hiperbole.
12. Osobe A, B, C nalazile su se u točkama s koordinatama $(-8, 0), (8, 0), (8, 10)$ kad su začule eksploziju. Osobe B i C čule su je u isto vrijeme, a osoba A 12 sekundi kasnije. Odredite koordinate točke u kojoj je bila eksplozija. Brzina zvuka iznosi $1/3$ km/s.

3.5 Parabola

Definicija 3.5.1 Neka je p čvrsti pravac i F čvrsta točka u E^2 koja ne pripada pravcu p . **Parabola** je skup točaka u E^2 koje su jednako udaljene od p i F

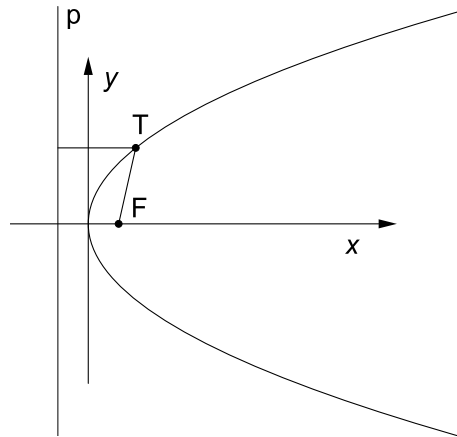
$$\mathcal{P} = \{T \in E^2 : d(T, F) = d(T, p)\}.$$

Pravac p nazivamo *ravnalicom* ili *direktrisom*, a točku F *žarištem* ili *fokusom parabole*.

Uočimo odmah da je ova definicija jednaka Pappus-Boškovićevoj uz zahtjev $\varepsilon = 1$. Polarna jednadžba parabole dana je s (3.8) uz $\varepsilon = 1$.

Izvedimo sada direktno jednadžbu parabole u Kartezijevim koordinatama.

Prije nego što izaberemo pravokutni koordinatni sustav, definirajmo tjeme i os parabole. Ako označimo nožište okomice iz F na p sa N , tada je *tjeme parabole* polovište dužine \overline{FN} , označimo ga s A . Tjeme očito pripada paraboli. Povučenu okomicu na direktrisu p kroz F (stoga i kroz A) nazivamo *os parabole*.



Neka je ishodište pravokutnog koordinatnog sustava u A , a x -os neka se podudara s osi parabole.

Neka je p parametar parabole, tj. polovina duljine tetive *latus rectum* (tetive koja prolazi fokusom i koja je paralelna s direktrikom). Krajnje točke te tetive, kao točke parabole, udaljene su jednako od F i od p i ta je udaljenost jednaka p .

Prema tome, udaljenost fokusa od direktrise jednaka je p , pa su koordinate fokusa $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$, a jednadžba direktrise p je $x = -\frac{p}{2}$.

Sada za po volji odabranu točku T parabole vrijedi

$$d(T, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d(T, p) = x + \frac{p}{2},$$

odakle izjednačavanjem i kvadriranjem dobivamo

$$y^2 = 2px. \tag{3.11}$$

To je tzv. **kanonska jednadžba parabole**. Nazivamo je još i **tjemenu (vršnom) jednadžbom**.

Vrijedi i obratno, točke (x, y) koje zadovoljavaju jednadžbu (2.1) su točke parabole. Zaista, kako je x uvijek nenegativan broj, to vrijedi

$$d(T, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d(T, p) = x + \frac{p}{2}.$$

Nadalje, kako vrijedi i (3.11), dobivamo $d(T, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$, odakle je i $d(T, F) = x + \frac{p}{2}$.

Iz jednadžbe (3.11) slijedi da je y definiran za $x \geq 0$, te da je parabola neograničena krivulja.

Zadatak. Kako glasi jednadžba parabole u koordinatnom sustavu kojemu je ishodište u tjemenu parabole A , a y -os se podudara s osi parabole. Razmotrite razne mogućnosti s obzirom na otvor parabole.

Pravac i parabola mogu imati dvije, jednu ili niti jednu zajedničku točku. Uvjet da je pravac tangenta parabole dobivamo na analogan način kao kod elipse (**uvjet dodira** ili **tangencijalnosti**)

$$p = 2kl.$$

Odredimo jednadžbu tangente u točki parabole $D_1 = (x_1, y_1)$ (diralište tangente). Koordinate dirališta se dobivaju kao korijeni kvadratne jednadžbe

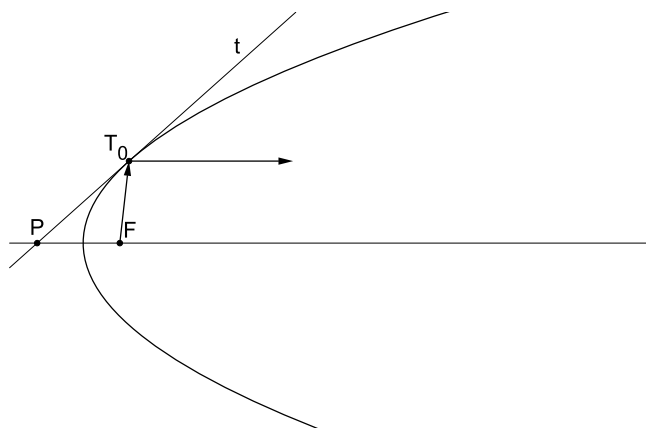
$$k^2x^2 + 2(kl - p)x + l^2 = 0$$

uz uvjet da je diskriminanta jednaka 0. Dobivamo $x_1 = \frac{p - kl}{k^2}$, $y_1 = \frac{p}{k}$. Odavde je $k = \frac{p}{y_1}$, $l = \frac{p}{2k} = \frac{y_1}{2}$. Uvrštavanjem u jednadžbu $y = kx + l$ dobivamo

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Zrcalno svojstvo za parabolu glasi:

Teorem 3.5.1 *Ako zraka svjetlosti izlazi iz fokusa i reflektira se od parabole, tada je reflektirana zraka paralelna s osi parabole i obrnuto.*



Ili, drugačije rečeno:

Teorem 3.5.2 *Neka je T_0 točka parabole i t tangenta parabole u T_0 . Tada je kut što ga tangenta t zatvara sa spojnicom FT_0 jednak kutu što ga tangenta zatvara s osi parabole.*

Dokaz. Označimo s P točku u kojoj tangenta presjeca x -os. Tada je tvrdnja teorem ekvivalentna s tvrdnjom da je trokut $\triangle T_0PF$ jednakokračan. U tu svrhu dovoljno je pokazati da je $d(F, P) = d(F, T_0)$. Kako je T_0 točka parabole, to je $T_0 = \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$. Tangenta kojoj je jednadžba $yy_0 = p(x + x_0)$ presjeca x -os u točki $P = (-x_0, 0)$, $x_0 > 0$. Dakle

$$d(F, P) = \frac{p}{2} + x_0, \quad d(F, T)^2 = \left(\frac{p}{2} + x_0\right)^2.$$

□

Napomena. Zrcalno svojstvo za parabolu (i za plohu koja se zove eliptički paraboloid) koristi se kod paraboloidnih antena. Parabola se javlja i u mnogim drugim situacijama, primjerice opisuje putanje projektila (kosi hitac), putanje kometa, u građevinarstvu itd.

Zadaci

1. Nađite jednadžbu parabole (u kanonskom obliku) s tjemenom u ishodištu koja sadrži točku $(2, 3)$. Odredite fokus te parabole.

$$\left[y^2 = \frac{9}{2}x, \left(\frac{9}{8}, 0\right) \right]$$

2. Odredite dužinu tetive parabole $y^2 = 8x$ koja sadrži točku $T = (2, -4)$, a paralelna je s pravcem $2x - 2y - 3 = 0$.

$$\left[16\sqrt{2} \right]$$

3. Odredite jednadžbe zajedničkih tangenata kružnice $10x^2 + 10y^2 = 81$ i parabole $y^2 = 4x$.

$$\left[y = \frac{1}{3}x + 3, y = -\frac{1}{3}x - 3 \right]$$

4. Kolika je duljina tetive parabole $y^2 = 2px$ koja prolazi kroz njen fokus, i okomita je na os parabole? Ako je nacrtana parabola i označeno njeno tjeme, kako biste konstruirali os i fokus parabole?

$$\left[2p \right]$$

5. Neka je A bilo koja točka na paraboli s fokusom F , neka je t tangenta na tu parabolu u točki A i neka je B točka u kojoj pravac t siječe direktrisu te parabole. Pokažite da je kut $\angle AFB$ uvijek pravi kut, neovisno o izboru točke A .
6. Dokažite da su tangente na parabolu povučene iz bilo koje točke njene direktrise međusobno okomite.
7. Neka je T točka parabole, a pravac n neka je normala parabole u toj točki. Neka je P projekcija točke T na os parabole, a točka N sjecište normale n s osi parabole. Dokažite da udaljenost točaka P i N ne ovisi o točki T .
8. Neka je F fokus parabole i p pravac kroz F okomit na os parabole. Neka je T bilo koja točka na paraboli koja se nalazi s iste strane pravca p kao i tjeme parabole. Ako je T' projekcija točke T na pravac p , pokažite da $|TT'| + |TF|$ ne ovisi o izboru točke T .

3.6 Elipsa, parabola i hiperbola kao konusni presjeci

Recimo još da elipsu, hiperbolu i parabolu dobivamo i kao presjeke uspravnog kružnog stošca (ili stožaste plohe) ravninom.

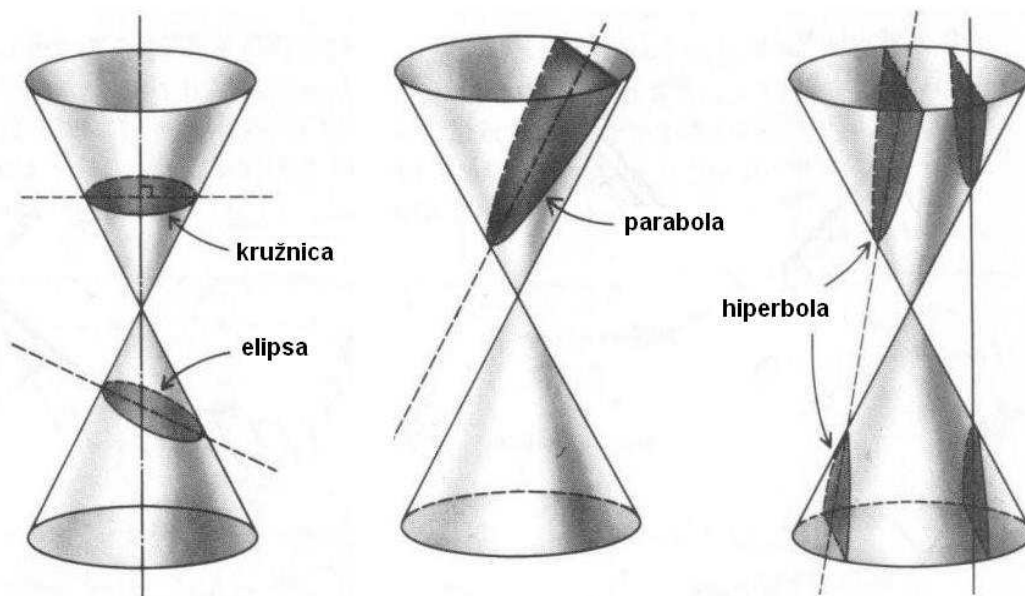
Preciznije, presjek uspravnog kružnog stošca (ili stožaste plohe) i ravnine nazivamo **konusnim presjekom** prema riječi konus (stožac). Razlikujemo degenerirane i nedegenerirane presjeke.

Degenerirane presjeke dobivamo kad presječna ravnina prolazi vrhom stošca. To su sljedeći skupovi točaka:

1. sam vrh stošca (točka),
2. jedna izvodnica (ravnina je tangencijalna ili dirna),
3. dvije izvodnice.

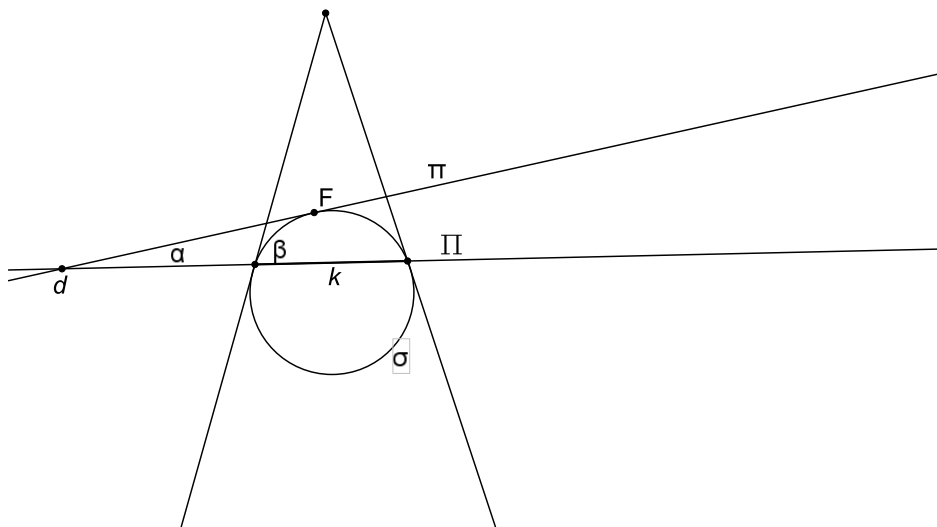
Nedegenerirani presjeci su:

1. elipsa (presječna ravnina siječe sve izvodnice); specijalno ako je presječna ravnina okomita na os stošca presjek je kružnica,
2. parabola (presječna ravnina je paralelna s jednom izvodnicom),
3. hiperbola (presječna ravnina je paralelna s dvije izvodnice).



Sljedeći teorem nam govori da su *svi* nedegenerirani konusni presjeci upravo elipsa, hiperbola i parabola (dane Pappus-Boškovićevom karakterizacijom). Nazivamo ih **konikama**.

Teorem 3.6.1 *Neka je \mathcal{K} krivulja dobivena kao presjek uspravnog kružnog stošca i ravnine. Tada u ravnini postoji točka F i pravac p takvi da je omjer udaljenosti $\frac{d(T, F)}{d(T, p)}$ konstantan, gdje je $T \in \mathcal{K}$ po volji odabrana točka krivulje \mathcal{K} .*



Skica dokaza.

π je presječna ravnina

σ je sfera upisana u stožac koja dira ravninu π u F

k je kružnica diranja sfere σ i stošca

Π ravnina u kojoj leži kružnica k

d je pravac presjeka ravnina π i Π

α je kut između ravnina π i Π

β je kut između izvodnice i ravnine Π .

Može se pokazati da za svaku točku T krivulje \mathcal{K} vrijedi

$$\frac{d(T, F)}{d(T, d)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{konst.}$$

što pokazuje da točke krivulje \mathcal{K} zadovoljavaju Pappus-Boškovićevu karakterizaciju elipse, hiperbole ili parabole. \square

Zadaci

1. Dana je hiperbola $x^2 - y^2 = 8$. Napišite jednadžbu elipse koja ima iste fokuse kao i dana hiperbola, a prolazi točkom $(4, 6)$.

$$\left[3x^2 + 4y^2 = 192 \right]$$

2. Odredite jednadžbu kružnice koja dodiruje asimptotu hiperbole $x^2 - y^2 = 1$ u točki $(1, 1)$ i čije se središte nalazi na pravcu $x + 2y = 4$.

$$\left[x^2 + (y - 2)^2 = 2 \right]$$

3. Točka A je fokus elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ koji leži u poluravnini $x \geq 0$, a p je pravac paralelan sa $x + y = 0$ koji prolazi kroz A . Odredite jednadžbu kružnice koja dira pravac p u točki A , a središte joj leži na pravcu $x + y + 2 = 0$.

$$\left[x^2 + (y + 2)^2 = 8 \right]$$

4. Napišite jednadžbu tangente na parabolu $y^2 = 4x$ koja je paralelna s jednom od asimptota hiperbole $9x^2 - 4y^2 = 36$. U kojoj točki ta tangenta dodiruje parabolu?

$$\left[y = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}, \left(\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right); y = -\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}, \left(\frac{4}{9}, -\frac{4}{3}\right) \right]$$

5. Neka je \mathcal{K} kružnica koja u točki $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ dodiruje pravac $4x - 10y = 27$, i prolazi točkom $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$. Neka je \mathcal{H} hiperbola $3x^2 - 7y^2 = 5$. Odredite sjecišta hiperbole \mathcal{H} i kružnice \mathcal{K} . Pod kojim se kutem \mathcal{H} i \mathcal{K} sijeku u sjecištu koje leži u prvom kvadrantu?

$$\left[\text{sjecišta su } (2, 1), (2, -1), \left(-\frac{27}{10}, \frac{\sqrt{241}}{10}\right), \left(-\frac{27}{10}, -\frac{\sqrt{241}}{10}\right), \text{ kut je } \arctg \frac{47}{16} \approx 71, 2^\circ \right]$$

6. Neka je \mathcal{K} kružnica koja prolazi točkama $(1, -6)$ i $(5, -2)$ i ima središte na pravcu $2x + y - 2 = 0$, te neka je A njezino središte. Neka je \mathcal{E} elipsa $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{7} = 1$. Pod kojim kutem se iz točke A vidi elipsa \mathcal{E} ?

$$\left[A(3, -4), \text{ kut je pravi.} \right]$$

7. Na elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ povučene su tangente paralelne s asimptotama hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Odredite površinu romba kojeg određuju te četiri tangente.

$$\left[4ab \right]$$

3.7 Koordinatni zapis geometrijskih transformacija u E^2

Geometrijske transformacije ravnine su preslikavanja ravnine E^2 na samu sebe.

Pritom se točka T preslikava u točku T' . Neka su koordinate točke T u odabranom koordinatnom sustavu (x, y) , a koordinate točke T' u istom koordinatnom sustavu (x', y') .

Navedimo koordinatne zapise nekih geometrijskih transformacija:

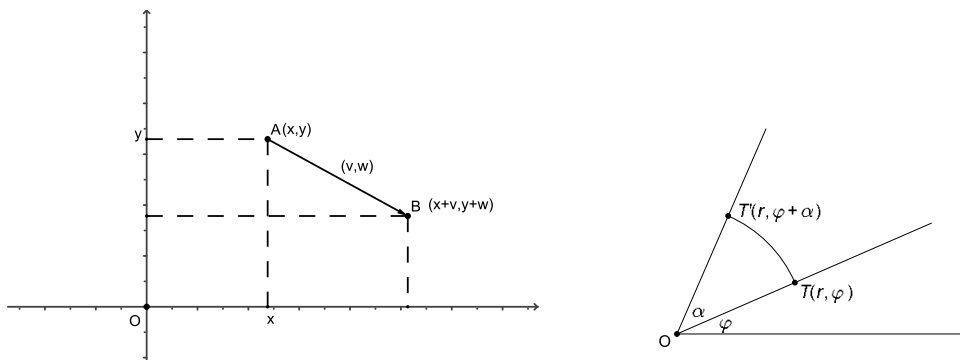
Translacija za vektor $\vec{a} = (v, w)$ točki $T = (x, y)$ pridružuje točku $T' = (x + v, y + w)$.

Rotacija za kut α u pozitivnom smjeru točki T pridružuje točku T' pri čemu njihove koordinate najlakše zapisujemo u polarnom sustavu: $T = (r, \varphi)$, $T' = (r, \varphi + \alpha)$.

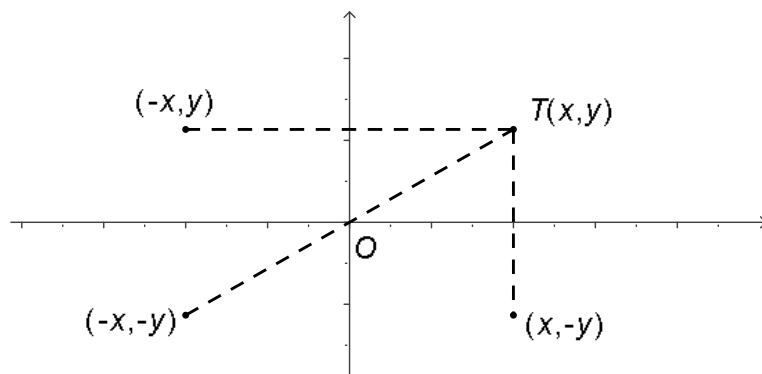
U Kartezijevom sustavu, primjenom adicijskih formula, dobivamo

$$x' = r \cos(\varphi + \alpha) = r \cos \varphi \cos \alpha - r \sin \varphi \sin \alpha = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = r \sin(\varphi + \alpha) = r \sin \varphi \cos \alpha + r \cos \varphi \sin \alpha = x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$



Centralna simetrija sa središtem u O točki $T = (x, y)$ pridružuje točku $T' = (-x, -y)$. Centralnu simetriju možemo dobiti kao poseban slučaj rotacije (za kut π).

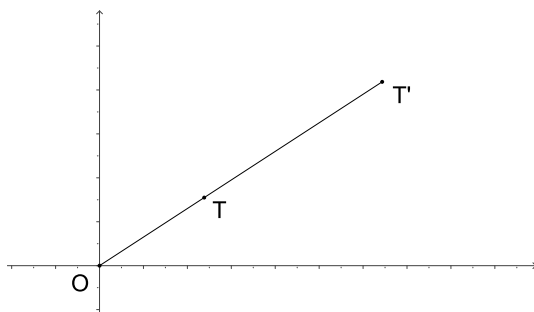


Oсна simetrija (zrcaljenje) s obzirom na x -os točki $T = (x, y)$ pridružuje točku $T' = (x, -y)$.

Oсна simetrija s obzirom na y -os točki $T = (x, y)$ pridružuje točku $T' = (-x, y)$.

Općenitije, osna simetrija s obzirom na os pravac kroz ishodište $\varphi = \alpha$ točki T s polarnim koordinatama (r, φ) pridružuje točku $T' = (r, 2\alpha - \varphi)$.

Homotetija s koeficijentom $k \in \mathbb{R}$ je preslikavanje koje točki $T = (x, y)$ pridružuje točku $T' = (kx, ky)$.



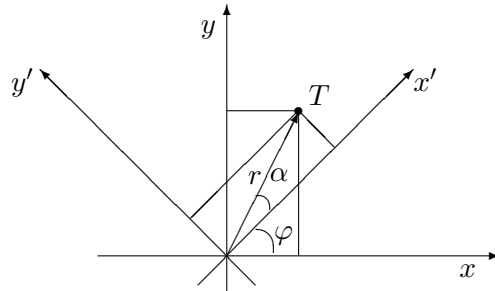
Napomena. Rotacija, centralna i osna simetrija su tzv. **linearna preslikavanja**. Više o takvim preslikavanjima na kolegiju **Linearna algebra**.

3.8 Transformacije koordinata

Cilj je sljedećeg odjeljka prepoznati krivulju koja je zadana općom algebarskom jednačbom drugog stupnja u varijablama x, y .

U tu svrhu, promjenom koordinatnog sustava (tj. rotacijom i translacijom polaznog koordinatnog sustava) nalazimo nove koordinate u kojima će zadana jednačba imati prepoznatljiv (kanonski) oblik – kao jednačba kružnice, elipse, hiperbole, parabole ili kao jednačba pravca, para pravaca, odnosno kao koordinate jedne točke ili \emptyset .

Promotrimo najprije **rotaciju koordinatnog sustava** za kut φ u pozitivnom smjeru. Označimo sa x, y osi polaznog sustava, a sa x', y' osi rotiranog sustava.



Očito je u polaznom sustavu

$$x = r \cos(\alpha + \varphi) = r \cos \alpha \cos \varphi - r \sin \alpha \sin \varphi,$$

a u novom sustavu $x' = r \cos \alpha$.

Slično je

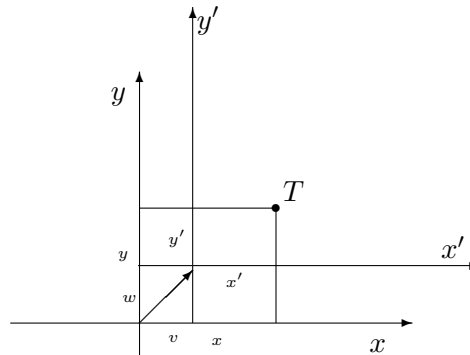
$$y = r \sin(\alpha + \varphi) = r \sin \alpha \cos \varphi + r \cos \alpha \sin \varphi,$$

i $y' = r \sin \alpha$.

Zato je veza među koordinatama točke T u ta dva sustava dana sa

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Promotrimo sada **translaciju koordinatnog sustava** za vektor (v, w) . Označimo sa x, y osi polaznog sustava, a sa x', y' osi novog translativanog sustava.



Tada je veza među koordinatama točke T u polaznom i transliranom koordinatnom sustavu dana sa

$$\begin{aligned}x &= x' + v \\y &= y' + w.\end{aligned}\tag{3.13}$$

3.9 Krivulje drugog reda u \mathbb{R}^2

Promotrimo opći polinom 2. stupnja u varijablama x i y

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f,\tag{3.14}$$

gdje su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ i bar jedan od koeficijenata a, b, c nije 0. Skup

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

nazivamo *krivuljom 2. reda*.

Posebne primjere krivulja 2. reda upoznali smo i ranije (kružnica, elipsa, hiperbola, parabola). Cilj nam je pokazati da je skup \mathcal{K} uvijek jedna od tih krivulja (u nedegeneriranom slučaju).

To ćemo postići tako da ćemo uvesti novi Kartezijev koordinatni sustav (dakle, nove koordinate x', y') u kojem će promatrani skup biti opisan već poznatim jednadžbama za elipsu, hiperbolu ili parabolu.

Dakle, uvođenjem novog koordinatnog sustava ne mijenjamo promatrani skup, nego pojednostavljujemo njegovu jednadžbu.

U tu svrhu promotrimo najprije *rotaciju koordinatnog sustava* za kut φ u pozitivnom smjeru. Označimo sa x, y osi polaznog sustava, a sa x', y' osi rotiranog sustava. Veza među koordinatama točke T u ta dva sustava dana je sa (3.12).

Stoga u novim koordinatama polinom f glasi

$$f(x', y') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f',\tag{3.15}$$

gdje su

$$\begin{aligned}a' &= a \cos^2 \varphi + c \sin^2 \varphi + b \sin 2\varphi, \\b' &= (c - a) \cos \varphi \sin \varphi + b(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \frac{1}{2}(c - a) \sin 2\varphi + b \cos 2\varphi, \\c' &= a \sin^2 \varphi + c \cos^2 \varphi - b \sin 2\varphi, \\d' &= d \cos \varphi + e \sin \varphi, \\e' &= -d \sin \varphi + e \cos \varphi, \\f' &= f.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Kut rotacije φ izabrat ćemo tako da se član b' u polinomu (3.15) poništava. Dakle, iz $b' = 0$ dobivamo

$$\operatorname{ctg}(2\varphi) = \frac{a - c}{2b}.\tag{3.17}$$

Sada polinom f glasi

$$f(x', y') = a'x'^2 + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f'.\tag{3.18}$$

Pokušajmo nadalje eliminirati koeficijente uz x' i y' (to je zapravo postupak svođenja izraza na puni kvadrat u svakoj varijabli).

Translantirajmo koordinatni sustav za vektor (v, w) . Označimo sa x'', y'' nove koordinate. Veza sa starima koordinatama x', y' je dana sa (3.13), imajući na umu imena novih i starih koordinata (uoči, prije smo imali x, y kao stare i x', y' kao nove koordinate).

U novim koordinatama dobivamo

$$\begin{aligned} f(x'', y'') &= a'(x'' + v)^2 + c'(y'' + w)^2 + 2d'(x'' + v) + 2e'(y'' + w) + f' \\ &= a''x''^2 + c''y''^2 + 2d''x'' + 2e''y'' + f'', \end{aligned} \quad (3.19)$$

gdje su

$$\begin{aligned} a'' &= a', \\ c'' &= c', \\ d'' &= a'v + d', \\ e'' &= c'w + e', \\ f'' &= a'v^2 + c'w^2 + 2d'v + 2e'w + f'. \end{aligned}$$

Slučaj A. Ako su oba a' i c' različiti od 0, tj. $a'c' \neq 0$, tada v i w možemo jednoznačno odrediti iz zahtjeva $d'' = 0$, $e'' = 0$

$$v = -\frac{d'}{a'}, \quad w = -\frac{e'}{c'},$$

pa možemo postići da polinom f poprima oblik

$$f(x'', y'') = a'x''^2 + c'y''^2 + f''. \quad (3.20)$$

Proanalizirajmo jednadžbu

$$f(x'', y'') = 0. \quad (3.21)$$

A1. Ako je $f'' = 0$, tada jednadžba (3.21) postaje

$$a'x''^2 + c'y''^2 = 0,$$

što predstavlja

- (i) točku $(0, 0)$; ukoliko su a', c' istog predznaka,
- (ii) par ukrštenih pravaca; ukoliko su a', c' različitih predznaka.

U tom se slučaju dobiva

$$\frac{y''^2}{x''^2} = -\frac{a'}{c'} > 0,$$

pa su jednadžbe pravaca

$$y'' = \pm \sqrt{-\frac{a'}{c'}} x''.$$

A2. Neka je $f'' \neq 0$ (i još od prije $a'c' \neq 0$).

(i) Ako su oba a', c' istog predznaka, ali suprotnog od f'' , dobivamo

$$\frac{x'^2}{-\frac{f''}{a'}} + \frac{y'^2}{-\frac{f''}{c'}} = 1,$$

što predstavlja **elipsu**.

(ii) Ako su a', c' različitih predznaka, npr. $a' > 0, c' < 0$ i neka je npr. $f'' < 0$, tada dobivamo

$$\frac{x'^2}{-\frac{f''}{a'}} - \frac{y'^2}{\frac{f''}{c'}} = 1,$$

što predstavlja **hiperbolu**.

(iii) Ako su a', c', f'' istog predznaka, za skup \mathcal{K} dobivamo prazan skup \emptyset , tj. nema točke iz \mathbb{R}^2 koja zadovoljava jednadžbu (3.21).

Uočimo da smo ovu analizu (slučaj A) napravili uz pretpostavku $a'c' \neq 0$. Lakim računom rabeći formule (3.16) može se pokazati da vrijedi

$$a'c' = ac - b^2,$$

gdje su a, b, c koeficijenti iz polaznog zapisa (3.14) polinoma f .

Ako polinomu (3.14) pridružimo determinantu

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2, \quad (3.22)$$

a polinomu (3.18) determinatu

$$\begin{vmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{vmatrix} = a'c' = ac - b^2, \quad (3.23)$$

tada zapravo vrijedi da su te determinante jednake.

Napomenimo još da prijelazom iz determinante (3.22) na determinantu oblika (3.23) u kojoj smo postigli dijagonalni oblik, određujemo **svojstvene vrijednosti matrice** $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. O tome više na **Linearnoj algebri**.

Slično se može provjeriti da je

$$\Delta := \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & c' & 0 \\ 0 & 0 & f'' \end{vmatrix}.$$

Dakle, u slučaju A1 vrijedi $\Delta = 0$; posebno za (i) vrijedi $\delta > 0$, odnosno za (ii) $\delta < 0$.

U slučaju A2 vrijedi $\Delta \neq 0$.

Da bismo mogli dobro opisati podslučajeve od A2 uvedimo još jednu veličinu

$$S = a + c.$$

S je tzv. **trag matrice** $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, tj. suma elemenata na dijagonali navedene matrice.

Za tu se veličinu također može provjeriti, rabeći (3.16), da je $S = a' + c'$.

Sad se lako vidi da:

za (i) vrijedi $\delta > 0, S\Delta < 0$,

za (iii) vrijedi $\delta > 0, S\Delta > 0$, a

za (ii) vrijedi $\delta < 0, S\Delta \neq 0$.

Ispišimo dobiveno u tablicu:

$\delta \neq 0$	$\Delta = 0$	$\delta > 0$ točka
		$\delta < 0$ par ukrštenih pravaca
	$\Delta \neq 0$	$\delta > 0, S\Delta < 0$ elipsa
		$\delta > 0, S\Delta > 0$ prazan skup
		$\delta < 0$ hiperbola

ili, malo drugačije

$\delta \neq 0$	$\delta > 0$	$\Delta \neq 0, S\Delta < 0$ elipsa
		$\Delta \neq 0, S\Delta > 0$ prazan skup
		$\Delta = 0$ točka
	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$ hiperbola
		$\Delta = 0$ par ukrštenih pravaca

Navedimo još da se krivulje za koje je $\delta \neq 0$ zovu **centralne**. To su krivulje koje imaju samo jedan centar ili središte, točku s obzirom na koju su centralnosimetrične. U nedegeneriranom slučaju, to su elipsa i hiperbola. Primijetimo također da su nedegenerirane krivulje (u ovom slučaju elipsa i hiperbola) opisane sa $\Delta \neq 0$.

Slučaj B. Ostaje razmotriti situaciju kad je $\delta = a'c' = ac - b^2 = 0$, dakle, kad je jedan od a', c' jednak 0 (ne mogu biti oba, jer tada (3.18) više nije polinom 2. stupnja).

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $c' = 0$. (Sjetimo se da su a', c' koeficijenti polinoma f u rotiranom sustavu.)

Dakle, imamo

$$f(x', y') = a'x'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f'. \quad (3.24)$$

Translacijom koordinatnog sustava duž x' -osi

$$\begin{aligned} x' &= x'' + v \\ y' &= y'' \end{aligned}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} f(x'', y'') &= a'(x'' + v)^2 + 2d'(x'' + v) + 2e'y'' + f' \\ &= a''x''^2 + 2d''x'' + 2e''y'' + f'', \end{aligned}$$

gdje su

$$\begin{aligned} a'' &= a', \\ d'' &= a'v + d', \\ e'' &= e', \\ f'' &= a'v^2 + 2d'v + f'. \end{aligned}$$

Ako želimo $d'' = 0$, tada je $v = -\frac{d'}{a'}$, tj. $x'' = x' - \frac{d'}{a'}$.

Tada f'' postaje $f'' = -\frac{d'^2}{a'} + f'$, i promatrana jednadžba skupa \mathcal{K} glasi

$$f(x'', y'') = a'x''^2 + 2e'y'' + f'' = 0. \quad (3.25)$$

Imamo sljedeće mogućnosti:

B1. Ako je $e'' (= e') = 0$, tada jednadžba postaje

$$x''^2 = -\frac{f''}{a'}.$$

U ovisnosti o desnoj strani te jednadžbe imamo

- (i) za $-\frac{f''}{a'} > 0$, jednadžba se transformira u $x'' = \pm\sqrt{-\frac{f''}{a'}}$ čime se dobivaju dva paralelna pravca;
- (ii) za $-\frac{f''}{a'} = 0$, jednadžba postaje $x'' = 0$ što je jednadžba jednog pravca (y'' -osi);
- (iii) za $-\frac{f''}{a'} < 0$, nema točaka koje zadovoljavaju jednadžbu (3.25).

B2. Ako je $e'' (= e') \neq 0$, translacijom sustava

$$\begin{aligned} x'' &= x''' \\ y'' &= y''' + w. \end{aligned}$$

možemo postići da slobodni član iščezne. Kako slobodni član u polinomu f glasi

$$f''' = f'' + 2e''w,$$

to uvjet $f''' = 0$ daje $w = -\frac{f''}{2e''}$. Tada jednadžba (3.25) postaje

$$f(x''', y''') = a'x'''^2 + 2e'''y''' = 0,$$

što predstavlja **parabolu**.

Time smo razmotrili sve mogućnosti za analizu skupa \mathcal{K} .

Opišimo još slučaj B preko veličina Δ , δ , S .

U slučaju B1 imamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f'' \end{vmatrix} = a' f'' \cdot 0 = 0,$$

dok u slučaju B2 imamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & e'' & 0 \\ 0 & e'' & 0 \end{vmatrix} = -a' e''^2 \neq 0.$$

(Opet $\Delta \neq 0$ opisuje nedegeneriranu koniku!)

Nadalje, u slučaju B1 promotrimo veličinu

$$-\frac{f''}{a'} = \frac{d'^2}{a'^2} - \frac{f'}{a'} = \frac{d'^2 - f'a'}{a'^2}.$$

Očito

za (i) vrijedi $d'^2 - f'a' > 0$,

za (ii) vrijedi $d'^2 - f'a' = 0$ i

za (iii) vrijedi $d'^2 - f'a' < 0$.

Lakim računom (koristeći (3.16) i činjenicu $c' = 0$, $e'' = e' = 0$) možemo se uvjeriti da je

$$T := d'^2 - f'a' = d^2 + e^2 - (a + c)f.$$

Navedimo još da su veličine Δ , δ , S tzv. **invarijante** krivulje 2. reda (ne mijenjaju se pri rotacijama i translacijama koordinatnog sustava), dok je veličina T **poluinvarijanta** (ne mijenja se pri rotaciji ali se mijenja pri translaciji).

Sada rezultat možemo ispisati u tablicu

$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	parabola
	$\Delta = 0$	$T > 0$ dva paralelna pravca
		$T = 0$ jedan (dvostruki) pravac
		$T < 0$ prazan skup

Napomena. Proučili smo krivulje zadane polinom prvog stupnja u varijablama x , y (pravci) i polinomom drugog stupnja (konike). Klasifikacija krivulja trećeg i većeg stupnja znatno je složenija. Nju je započeo I. Newton 1695. godine klasifikacijom kubika (krivulja zadanih polinomom 3. stupnja) na 72 različita tipa.

Zadaci

1. Skicirajte skup točaka u ravnini za koje vrijedi:

(a) $x^2 + 4y^2 - 16 > 0$, $x + 2y - 8 < 0$ i $x + y - 2 > 0$.

(b) $y^2 - 12x < 0$, $6x - y - 12 > 0$ i $y - 2 > 0$.

2. Odredite (i skicirajte) skupove dane sljedećim jednadžbama:

(a) $x^2 - 2xy = 0$

(b) $xy + y^2 = 0$

(c) $x^2 - y^2 = 0$

(d) $xy = 0$

(e) $x^2 + y^2 + 4 = 0$

(f) $x^2 + 2y^2 = 0$

[a) unija pravaca $x = 0$ i $x - 2y = 0$; b), c), d) slično;
e) prazan skup; f) točka $(0, 0)$]

3. Odredite duljine velike i male poluosi, linearni i numerički ekscentricitet, koordinate središta i koordinate obaju fokusa elipse $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$.

[$a = 4$, $b = 3$, $e = \sqrt{7}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{4}$,
središte $(2, -3)$, fokusi $(2 \pm \sqrt{7}, -3)$]

4. Odredite numerički ekscentricitet i skicirajte krivulje:

(a) $y^2 = x - \frac{1}{4}x^2$,

(b) $y^2 = x + \frac{1}{4}x^2$,

(c) $y^2 = x$.

[a) $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$, elipsa; b) $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$, hiperbola; c) $\varepsilon = 1$]

5. Svedite jednadžbe na kanonski oblik, odredite središte i numerički ekscentricitet konike te (ako se radi o hiperboli) asimptote i skicirajte ju:

(a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$,

(b) $11x^2 + 7y^2 + 66x - 28y + 50 = 0$,

(c) $3x^2 - 5y^2 - 24x - 30y - 12 = 0$,

(d) $3y^2 - 2x + 12y + 18 = 0$,

(e) $4x^2 + 9y^2 + 4x + 6y + 2 = 0$,

(f) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$,

(g) $x^2 + 2y^2 + 4y - 4x + 4 = 0$.

[a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$; b) $11(x+3)^2 + 7(y-2)^2 = 11$;
c) $3(x-4)^2 - 5(y+3)^2 = 15$; d) $(y+2)^2 = \frac{2}{3}(x-3)$;
e) točka $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$; f) $16(x-2)^2 - 9(y+3)^2 = 144$; g) $(x-2)^2 + 2(y+1)^2 = 2$.]

6. Napišite jednadžbu

- (a) elipse koja je simetrična u odnosu na pravce $x = 1$ i $y = 2$, a poluosi su joj $a = 2$ i $b = 1$;
- (b) elipse koja prolazi točkom $(-\frac{2}{5}, 2)$, a fokusi su joj $(2, -5)$ i $(2, 3)$;
- (c) parabole kojoj je tjeme u točki $(1, -3)$, a fokus u $(3, -3)$;
- (d) parabole kojoj je tjeme u točki $(2, -1)$, a direktrisa ima jednadžbu $y = 5$;
- (e) hiperbole s fokusima $(-7, 1)$ i $(3, 1)$, i direktrisom $x = \frac{6}{5}$.

$$\left[\text{a) } (x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 4; \text{ b) } 25(x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 225; \right. \\ \left. \text{c) } (y+3)^2 = 8(x-1); \text{ d) } -(x-2)^2 = 12(y-2); \text{ e) } 4(x+2)^2 - (y-1)^2 = 20 \right]$$

7. Napišite jednadžbu

- (a) elipse sa središtem u $(2, 2)$, tjemenom $(5, 5)$ i fokusom $(0, 0)$;
- (b) hiperbole kojoj su tjemena u točkama $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1)$ i $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, a numerički ekscentricitet $\varepsilon = \sqrt{2}$.

$$\left[\text{a) } 7x^2 - 4xy + 7y^2 - 20x - 20y - 50 = 0; \text{ b) } xy = \frac{1}{4} \right]$$

8. Provjerite da je $(x-a)(y-b) = k$ jednadžba hiperbole. Napišite sljedeće jednadžbe u tom obliku: $xy - 2x = 6$, $xy - 2x - y + 4 = 0$, $xy + 2x = 3y$, $2xy + 2x + y - 5 = 0$.

$$\left[x(y-2) = 6, (x-1)(y-2) = -2, (x-3)(y+2) = -6, (x+\frac{1}{2})(y+1) = 3 \right]$$

9. Skicirajte krivulju $y = \frac{3x+2}{2x-1}$, pokažite da je to hiperbola i odredite joj numerički ekscentricitet, asimptote i fokuse.

$$\left[\varepsilon = \sqrt{2}, \text{ asimptote } x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}, \text{ fokusi } (\frac{1 \pm \sqrt{14}}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{14}}{2}) \right]$$

10. Rotacijom i translacijom koordinatnog sustava svedite na kanonski oblik, odredite središte i numerički ekscentricitet, te skicirajte:

- (a) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$
- (b) $23x^2 + 72xy + 2y^2 + 25 = 0$
- (c) $9x^2 + 4y^2 - 12xy + 39 = 0$
- (d) $xy + 2x + y + \frac{5}{2} = 0$

$$\left[\text{a) hiperbola, } S(-1, 2), \varepsilon = \sqrt{10}; \text{ b) hiperbola, } S(0, 0), \varepsilon = \sqrt{\frac{3}{2}}; \right. \\ \left. \text{c) prazan skup; d) hiperbola, } S(-1, -2), \varepsilon = \sqrt{2} \right]$$

11. Skicirajte krivulju $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. Koja je to krivulja?

$$\left[\text{Dio parabole } (x+y-a)^2 = 4xy \text{ između } (0, a) \text{ i } (a, 0) \text{ gdje dira koordinatne osi.} \right]$$

12. Za koje vrijednosti parametra D je krivulja zadana s jednadžbom $(1-D)x^2 + 2xy + y^2 = 1$ elipsa, za koje hiperbola, a za koje unija dva pravca?

$$\left[\text{za } D < 0 \text{ elipsa; za } D = 0 \text{ dva paralelna pravca; za } D > 0 \text{ hiperbola.} \right]$$

3.10 Koordinatni sustavi u prostoru

Definirajmo najprije sferu:

Definicija 3.10.1 *Sfera je skup točaka u prostoru E^3 jednako udaljenih od neke čvrste točke prostora.*

Tu čvrstu točku zovemo **središtem** sfere, a udaljenost od središta do neke točke na sferi **polumjerom** ili **radijusom** sfere.

Izvedimo jednadžbu sfere u Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru. Neka je $S = (p, q, r)$ središte sfere, R njen polumjer. Točka T je točka sfere ako i samo ako vrijedi

$$d(S, T)^2 = R^2.$$

Prema tome, jednadžba sfere glasi

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - r)^2 = R^2.$$

Napomena. Navigacijski sustav GPS određuje položaj točke na Zemlji preko tri satelita u orbiti Zemlje. Poznavajući udaljenosti promatrane točke u odnosu na satelite (preko vremena potrebnog da elektromagnetski val prevali udaljenost), dobivaju se tri sfere sa središtima u točkama položaja satelita. Promatrana točka na Zemlji nalazi se u presjeku tih sfera.

Zadaci

1. Zadana je sfera $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 9$. Odredite jednadžbe onih ravnina paralelnih s ravninom $x + z = 0$ koje diraju tu sferu.

$$\left[x + z = 2, x + z = -6 \right]$$

2. Odredite polumjer kružnice koja nastaje presjekom sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 126$ i ravnine $y + 9 = 0$.

$$\left[3\sqrt{5} \right]$$

3. Odredite središte i polumjer kružnice

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = 36, \\ 3x + y - z - 9 = 0. \end{cases}$$

$$\left[\text{središte } (1, 6, 0), \text{ polumjer } 5 \right]$$

4. Na ravnini $x - 3y + 2z + 5 = 0$ odredite točku najbližu sferi sa središtem $(5, -14, 9)$ i polumjerom 12. Kolika je udaljenost te točke od središta sfere, a kolika od sfere (tj. njene najbliže točke) ?

$$\left[(0, 1, -1), 5\sqrt{14}, 5\sqrt{14} - 12 \right]$$

5. Odredite jednadžbu sfere opisane tetraedru koji je omeđen ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $3x - 2y + 6z = 18$.

$$\left[(x - 3)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{126}{4} \right]$$

6. Odredite jednadžbu sfere kojoj središte leži na pravcu

$$\begin{cases} 2x - 4y - z - 12 = 0, \\ 4x + 5y - 6z - 3 = 0 \end{cases}$$

i koja dodiruje ravnine $x + 2y - 2z - 2 = 0$ i $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

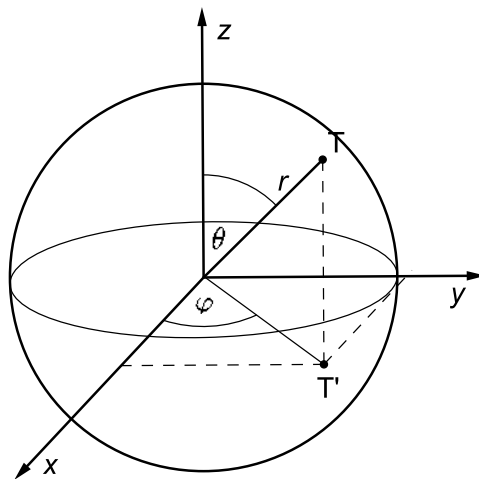
$$\left[(x - 5)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 1 \right]$$

Sferni koordinatni sustav

Sferni koordinatni sustav uvodimo na sljedeći način: neka je O čvrsta točka u E^3 i π čvrsta ravnina kroz O . Pravac z neka je pravac okomit na ravninu π u točki O , a pravac x pravac u ravnini π kroz točku O .

Neka je T' ortogonalna projekcija točke T na ravninu π .

Točku $T \in E^3$ možemo na jednoznačan način opisati uređenom trojkom $T = (r, \varphi, \theta)$, gdje je $r = d(O, T)$, φ kut što ga spojnica OT' zatvara sa pozitivnim dijelom x -osi, $\varphi \in [0, 2\pi)$, θ kut što ga spojnica OT zatvara sa pozitivnim dijelom z -osi, $\theta \in [0, \pi]$.



Uvedemo li Kartezijev sustav kojemu je točka O ishodište, pravac x os apscisa, pravac z os aplikata, a os ordinata y je pravac okomit na x -os i z -os, tada za sferne koordinate i za pravokutne koordinate vrijede sljedeće veze:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi \cos \theta, & y &= r \sin \varphi \sin \theta, & z &= r \cos \varphi, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \cos \varphi &= \frac{z}{r}, & \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Zadaci

1. Uvjerite se da je veza sfernih koordinata (R, φ, θ) i kartezijevih koordinata (x, y, z) dana jednakostima

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z},$$

odnosno

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta.$$

2. Točke A i B dane su sfernim koordinatama:

$$A \dots R = 1, \quad \varphi = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2},$$

$$B \dots R = 1, \quad \varphi = 0, \quad \theta = \pi.$$

Neka je \mathcal{S} sfera sa središtem u A koja prolazi kroz B . Odredite presjek sfere \mathcal{S} i ravnine $x = 2$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{sfera } (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 2; \\ \text{presjek je kružnica okomita na os } x \text{ sa središtem } (2, 0, 0) \text{ i polumjerom } 1. \end{array} \right]$$

3. Kako glasi u sfernom koordinatnom sustavu jednadžba sfere sa središtem u ishodištu?

$$\left[R = \text{konst} \right]$$

4. Zemljopisne koordinate slične su sfernim koordinatama, na površini Zemlje. Uz pretpostavku da je Zemlja kugla polumjera 6400 km, odredite udaljenosti

(a) Zagreba (16°E , 46°N) i Moskve (38°E , 56°N),

(b) Buenos Airesa (58°W , 34°S) i Hong Konga (115°E , 22°N).

Prvi podatak označava istočnu / zapadnu zemljopisnu dužinu, tj. kutnu udaljenost od multog meridijana, a drugi podatak sjevernu / južnu zemljopisnu širinu, tj. kutnu udaljenost od ekvatora.

Uputa: odredite kut pod kojim se iz središta Zemlje vidi luk glavne kružnice između navedenih gradova, npr. pomoću vektora.

$$\left[\text{a) } 1893 \text{ km, b) } 18600 \text{ km} \right]$$

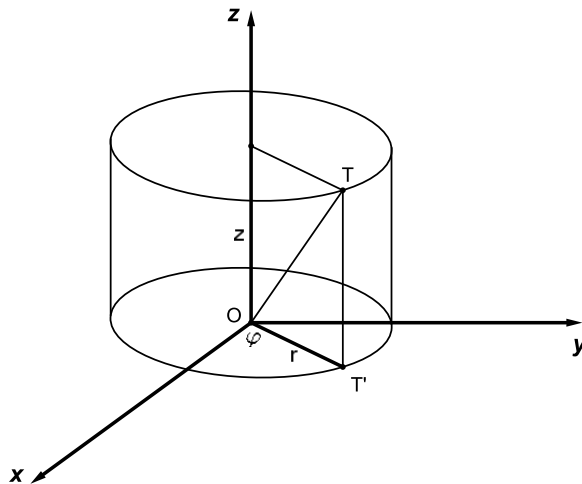
Cilindrični koordinatni sustav

U prostoru možemo uvesti i *cilindrični koordinatni sustav* koji je zadan je sljedećim elementima: neka je O čvrsta točka u E^3 i π čvrsta ravnina kroz O . Pravac z neka je pravac okomit na ravninu π u točki O . Neka je u ravnini π s polom u točki O zadan polarni sustav, te neka je T' ortogonalna projekcija točke T na ravninu π .

Točku $T \in E^3$ možemo na jednoznačan način opisati uređenom trojkom $T = (r, \varphi, z)$, gdje su (r, φ) polarne koordinate točke T' u ravnini π , a z (pozitivna ili negativna) udaljenost točke T od ravnine π .

Veze između cilindričnog i Kartezijevog sustava kojemu je točka O ishodište, pravac z os aplikata, polarna os je os apscisa, os ordinata je pravac okomit na polarnu os i z -os, glase

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & z &= z, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}, & z &= z. \end{aligned}$$



Zadaci

1. Izvedite vezu cilindričnih koordinata (r, φ, z) i kartezijevih koordinata (x, y, z) .
2. Izvedite vezu cilindričnih koordinata (r, φ, z) i sfernih koordinata (R, φ, θ) .

$$\left[R \sin \theta = r, \quad R \cos \theta = z, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{r}{z}, \quad R^2 = r^2 + z^2 \right]$$

3. U pravokutnom koordinatnom sustavu dane su točke $(0, 0, 5)$, $(-4, 3, \frac{5}{2})$, $(-2, 2, 0)$, $(0, -3, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(-3\sqrt{3}, -3, 12)$, $(9, -12, -5)$, $(1, 2, 3)$. Odredite njihove cilindrične i sferne koordinate.

$$\left[\text{Cilindrične koordinate } (r, \varphi, z): (0, -, 5), (5, -\operatorname{arctg} \frac{3}{4}, \frac{5}{2}), (2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, 0), (3, \frac{3\pi}{2}, 0), \right. \\ \left. (0, -, 0), (6, \frac{7\pi}{6}, 12), (15, -\operatorname{arctg} \frac{4}{3}, -5), (\sqrt{5}, \operatorname{arctg} 2, 3) \right]$$

$$\left[\text{Sferne koordinate } (R, \varphi, \theta): (5, -, 0), (\frac{5\sqrt{5}}{2}, -\operatorname{arctg} \frac{3}{4}, \operatorname{arctg} 2), (2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}), (3, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \right. \\ \left. (0, -, -), (6\sqrt{5}, \frac{7\pi}{6}, \operatorname{arctg} \frac{1}{2}), (5\sqrt{10}, -\operatorname{arctg} \frac{4}{3}, \pi - \operatorname{arctg} 3), (\sqrt{14}, \operatorname{arctg} 2, \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{3}) \right]$$

4. Točke $(0, \pi, 5)$, $(2, \frac{\pi}{2}, 0)$, $(5, \frac{\pi}{4}, -2)$, $(4, 0, 3)$, $(0, 0, 0)$, $(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $(1, 0, 0)$, $(5, -\frac{\pi}{3}, 5)$ dane su svojim cilindričnim koordinatama (r, φ, z) . Odredite njihove kartezijeve i sferne koordinate.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Kartezijeve koordinate } (x, y, z): (0, 0, 5), (0, 2, 0), (\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}, -2), (4, 0, 3), \\ (0, 0, 0), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3}), (1, 0, 0), (\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}, 5) \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Sferne koordinate } (R, \varphi, \theta): (5, \pi, 0), (2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\sqrt{29}, \frac{\pi}{4}, \pi - \arctg \frac{5}{2}), (5, 0, \arctg \frac{4}{3}), \\ (0, -, -), (1, -\frac{\pi}{4}, \arctg \sqrt{2}), (1, 0, \frac{\pi}{2}), (5\sqrt{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}) \end{array} \right]$$

5. Točke $(0, \pi, \frac{2\pi}{3})$, $(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(5, \frac{\pi}{4}, \pi)$, $(4, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $(1, 0, \pi)$, $(9, \pi, \frac{\pi}{6})$ dane su svojim sfernim koordinatama (r, φ, θ) . Odredite njihove cilindrične i kartezijeve koordinate.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Cilindrične koordinate } (r, \varphi, z): (0, -, -), (1, \frac{\pi}{2}, 0), (0, -, -5), (0, 0, 4), \\ (0, -, 0), (2, -\frac{\pi}{4}, 2), (0, -, -1), (\frac{9\sqrt{3}}{2}, \pi, \frac{9}{2}) \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Kartezijeve koordinate } (x, y, z): (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -5), (0, 0, 4), \\ (0, 0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2), (0, 0, -1), (-\frac{9\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{9}{2}) \end{array} \right]$$

6. Kako glasi u cilindričnom koordinatnom sustavu jednadžba kružnog cilindra kojemu je presjek s xy -ravninom kružnica polumjera R sa središtem u ishodištu O ?

$$\left[r = R \right]$$

3.11 Plohe drugog reda (kvadrike) u \mathbb{R}^3

Kao i u ravnini može se postaviti problem određivanja skupa točaka u prostoru koji je opisan algebarskom jednadžbom 2. stupnja u varijablama x, y, z . Analiza se provodi sofisticiranijim sredstvima nego što smo to napravili u ravnini (dijagonalizacija simetričnog operatora, odnosno dijagonalizacija kvadratne forme (uključuje određivanje svojstvenih vrijednosti)). Ista se takva analiza može provesti i u ravnini, dok bi u prostoru analiza "na prste" kakvu smo proveli u ravnini bila prilično mukotrpa. O tome više na **Linearnoj algebi**.

Promotrimo opći polinom 2. stupnja u varijablama x, y i z

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ & + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}, \end{aligned}$$

gdje su $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i \leq j = 1, \dots, 4$, i bar jedan od koeficijenata a_{ij} , $i \leq j = 1, \dots, 3$ nije 0.

Skup

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$$

nazivamo **algebarskom plohom 2. reda**.

Invarijante algebarske plohe 2. reda su

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

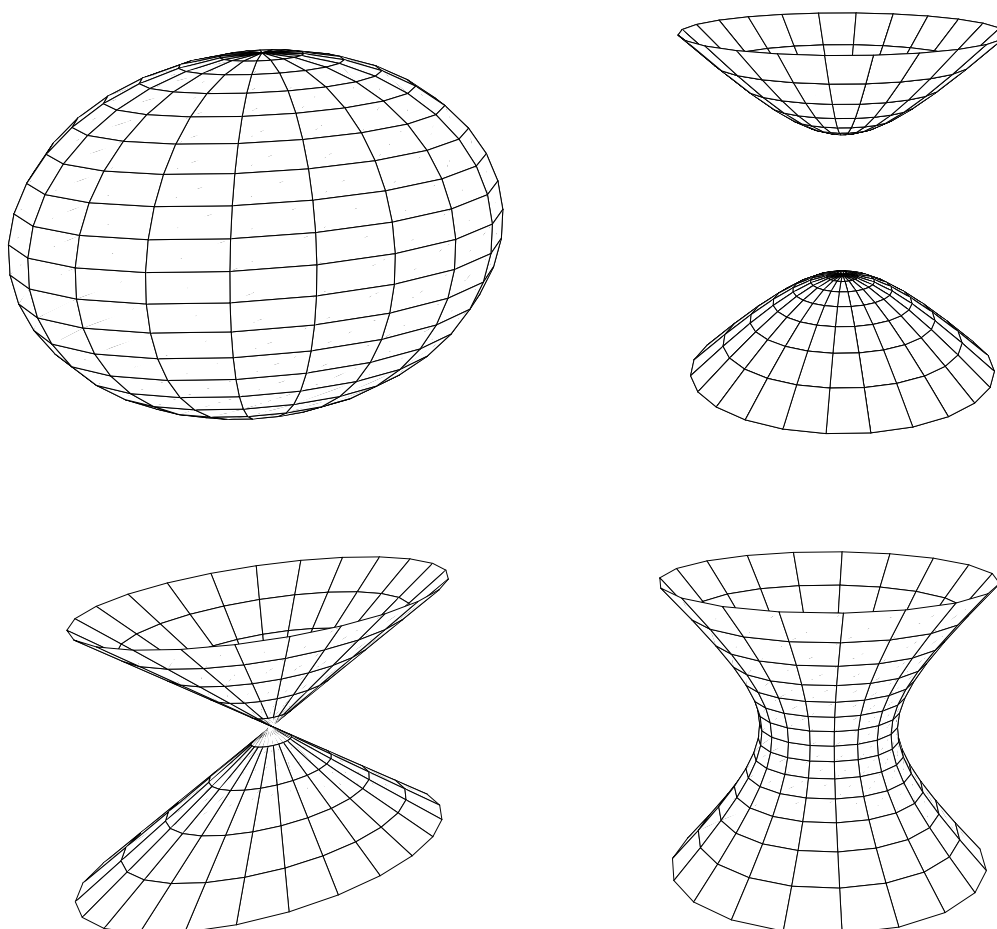
$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$T = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{13}^2 - a_{12}^2.$$

Te se veličine ne mijenjaju pri translacijama i rotacija koordinatnog sustava. Na osnovu njih možemo dobiti sljedeću klasifikaciju:

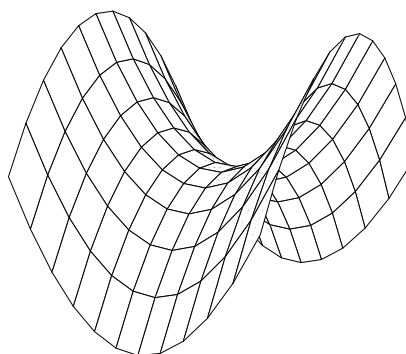
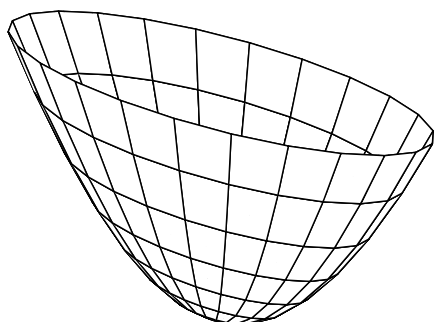
$\delta = 0$ *Centralne plohe*

	$S\delta > 0, T > 0$	$S\delta$ i T nisu oba > 0
$\Delta < 0$	<i>elipsoid</i>	<i>dvoplošni hiperboloid</i>
$\Delta > 0$	<i>prazan skup</i>	<i>jednoplōšni hiperboloid</i>
$\Delta = 0$	<i>točka</i>	<i>konus</i>



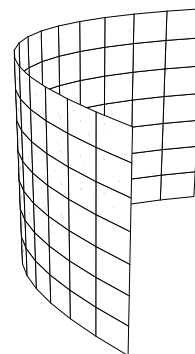
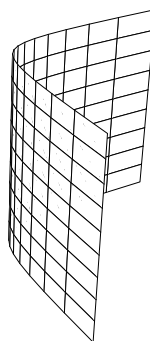
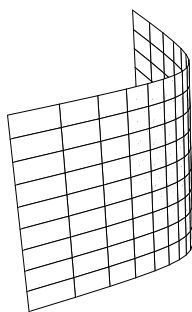
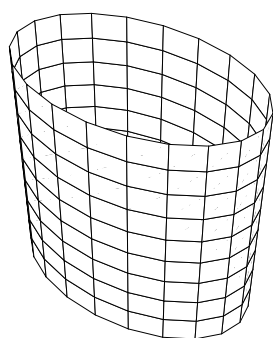
$\delta = 0$ *Paraboloidi*

	$\Delta < 0 (\Rightarrow T > 0)$	$\Delta > 0 (\Rightarrow T < 0)$
$\Delta \neq 0$	<i>eliptički paraboloid</i>	<i>hiperbolički paraboloid</i>



$\delta = 0$ *Cilindri i ravnine*

$\Delta = 0$	$T > 0$ <i>eliptički cilindar</i>	ili	<i>dviije ravnine</i>
	$T < 0$ <i>hiperbolički cilindar</i>		<i>jedna ravnina</i>
	$T = 0$ <i>parabolički cilindar</i>		<i>prazan skup</i>



Zadaci

1. Nađite udaljenost ravnine $x + y + z = 12$ i plohe čija jednadžba u sfernim koordinatama je $R = \sqrt{3}$. Nadalje, odredite točku na toj plohi koja je najbliže zadanoj ravnini.

$$\left[\text{udaljenost } 3\sqrt{3}, \text{ točka } (1, 1, 1) \right]$$

2. Točke $A = (\sqrt{18}, \frac{\pi}{2}, -3)$ i $B = (8, -\frac{\pi}{4}, 7)$ dane su svojim cilindričnim koordinatama (r, φ, z) . Odredite kartezijeve koordinate tih točaka, i napišite jednadžbu sfere sa središtem u A , koja prolazi kroz B . Koliki je polumjer kružnice koja nastaje presjekom te sfere i ravnine $x = 15$?

$$\left[A = (0, 3\sqrt{2}, -3), B = (4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}, 7); \right. \\ \left. x^2 + (y - 3\sqrt{3})^2 + (z + 3)^2 = 230; r = \sqrt{5}. \right]$$

3. Napišite jednadžbu plohe čije točke su dvostruko više udaljene od ishodišta nego od točke $(0, -3, 0)$.

$$\left[x^2 + y^2 + z^2 + 8y + 12 = 0 \right]$$

4. Odredite jednadžbu plohe takve da je zbroj kvadrata udaljenosti bilo koje njezine točke od točaka $F_1(-a, 0, 0)$ i $F_2(a, 0, 0)$ jednak $4a^2$.

$$\left[x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \right]$$

5. Odredite jednadžbu plohe takve da je zbroj udaljenosti bilo koje njezine točke od točaka $F_1(-1, 0, 0)$ i $F_2(1, 0, 0)$ jednak 4.

$$\left[3x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 12 \right]$$

Sadržaj

1	Vektori	3
1.1	Vektorski prostori V^1, V^2, V^3	3
1.2	Baza vektorskog prostora V^3 . Koordinatizacija	12
1.3	Skalarni produkt. Ortonormirana baza	22
1.4	Vektorski produkt	28
1.5	Mješoviti produkt	34
2	Pravci i ravnine u koordinatnom sustavu	38
2.1	Koordinatni sustav u E^1, E^2, E^3	38
2.2	Pravac u E^2	39
2.3	Udaljenost dviju točaka, udaljenost točke od pravca i kut dvaju pravaca u E^2 .	43
2.4	Ravnina u E^3	46
2.5	Udaljenost dviju točaka, udaljenost točke od ravnine i kut dviju ravnina u E^3 .	48
2.6	Pravac u E^3	50
2.7	Udaljenost točke od pravca, udaljenost dvaju pravaca. Kut dvaju pravaca, kut pravca i ravnine u E^3	51
3	Krivulje i plohe u koordinatnom sustavu	62
3.1	Kružnica u E^2	62
3.2	Polarni koordinatni sustav u E^2	64
3.3	Elipsa	67
3.4	Hiperbola	74
3.5	Parabola	78
3.6	Elipsa, parabola i hiperbola kao konusni presjeci	82
3.7	Koordinatni zapis geometrijskih transformacija u E^2	84
3.8	Transformacije koordinata	86
3.9	Krivulje drugog reda u \mathbb{R}^2	87
3.10	Koordinatni sustavi u prostoru	95
3.11	Plohe drugog reda (kvadrike) u \mathbb{R}^3	99