O konvergentnim dijagonalizacijskim metodama za pozitivno definitni generalizirani problem vlastitih vrijednosti

Vjeran Hari

PMF-Matematički odsjek
hari@math.hr

Seminar za numeričku matematiku i znanstveno računanje

Pregled predavanja

Pregled predavanja

- GEP and PGEP

Ovaj rad je potpuno potpomognut projektom IP-09-2014-3670 Hrvatske zaklade za znanost

Pregled predavanja

- GEP and PGEP
- Izvod algoritama

Ovaj rad je potpuno potpomognut projektom IP-09-2014-3670 Hrvatske zaklade za znanost

Pregled predavanja

- GEP and PGEP
- Izvod algoritama
- Konvergencija, globalna i asimptotička

Ovaj rad je potpuno potpomognut projektom IP-09-2014-3670 Hrvatske zaklade za znanost

Pregled predavanja

- GEP and PGEP
- Izvod algoritama
- Konvergencija, globalna i asimptotička
- Stabilnost i relativna točnost

Ovaj rad je potpuno potpomognut projektom IP-09-2014-3670 Hrvatske zaklade za znanost

Pregled predavanja

- GEP and PGEP
- Izvod algoritama
- Konvergencija, globalna i asimptotička
- Stabilnost i relativna točnost
- Blok algoritmi

Ovaj rad je potpuno potpomognut projektom IP-09-2014-3670 Hrvatske zaklade za znanost

Pregled predavanja

- GEP and PGEP
- Izvod algoritama
- Konvergencija, globalna i asimptotička
- Stabilnost i relativna točnost
- Blok algoritmi
- Globalna konvergencija blok algoritama

Ovaj rad je potpuno potpomognut projektom IP-09-2014-3670 Hrvatske zaklade za znanost

GEP i PGEP

Neka je $A = A^T, \quad B = B^T.$

GEP i PGEP

Neka je $A = A^T, \quad B = B^T$.

Rješavamo Generalizirani problem vlastitih vrijednosti (GEP)

$$Ax = \lambda Bx, \quad x \neq 0.$$

GEP i PGEP

Neka je $A = A^T, \quad B = B^T$.

Rješavamo Generalizirani problem vlastitih vrijednosti (GEP)

$$Ax = \lambda Bx, \quad x \neq 0.$$

Ako je $B \succ O$, tada GEP $\rightarrow$ PGEP

PGEP Pozitivno definitni problem vlastitih vrijednosti.

GEP i PGEP

Neka je $A = A^T, \quad B = B^T$.

Rješavamo Generalizirani problem vlastitih vrijednosti (GEP)

$$Ax = \lambda Bx, \quad x \neq 0.$$

Ako je $B \succ O$, tada GEP $\to$ PGEP

PGEP Pozitivno definitni problem vlastitih vrijednosti.

Za takav par (A, B) postoji nesingularna matrica F takva da je

$$F^T AF = \Lambda_A, \qquad F^T BF = \Lambda_B,$$

$\Lambda_A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \Lambda_B = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n) \succ O$.

GEP i PGEP

Neka je $A = A^T, \quad B = B^T$.

Rješavamo Generalizirani problem vlastitih vrijednosti (GEP)

$$Ax = \lambda Bx, \quad x \neq 0.$$

Ako je $B \succ O$, tada GEP $\rightarrow$ PGEP

PGEP Pozitivno definitni problem vlastitih vrijednosti.

Za takav par (A, B) postoji nesingularna matrica F takva da je

$$F^T AF = \Lambda_A\,, \qquad F^T BF = \Lambda_B,$$

$\Lambda_A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \Lambda_B = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n) \succ O.$

Vlastite vrijednosti i vektori para (A, B) su: $(\alpha_i/\beta_i, Fe_i)$, $1 \leq i \leq n$;

Mali dokaz

$$
\begin{aligned}
F^T A F = \Lambda_A \quad &\Rightarrow \quad AF = F^{-T} \Lambda_A \\
F^T B F = \Lambda_B \quad &\Rightarrow \quad BF = F^{-T} \Lambda_B .
\end{aligned}
$$

Mali dokaz

$$
\begin{aligned}
F^T A F = \Lambda_A \quad &\Rightarrow \quad AF = F^{-T}\Lambda_A \\
F^T B F = \Lambda_B \quad &\Rightarrow \quad BF = F^{-T}\Lambda_B.
\end{aligned}
$$

$$F^{-T}\Lambda_A = F^{-T}\Lambda_B(\Lambda_A\Lambda_B^{-1}) = BF(\Lambda_A\Lambda_B^{-1})$$

Mali dokaz

$$
\begin{aligned}
F^T A F = \Lambda_A \quad &\Rightarrow \quad AF = F^{-T}\Lambda_A \\
F^T B F = \Lambda_B \quad &\Rightarrow \quad BF = F^{-T}\Lambda_B.
\end{aligned}
$$

$$F^{-T}\Lambda_A = F^{-T}\Lambda_B(\Lambda_A\Lambda_B^{-1}) = BF(\Lambda_A\Lambda_B^{-1})$$

$$AF = F^{-T}\Lambda_A = BF(\Lambda_A\Lambda_B^{-1}) = BF\,\mathrm{diag}(\alpha_1/\beta_1, \ldots, \alpha_n/\beta_n)$$

Mali dokaz

$$F^T AF = \Lambda_A \quad \Rightarrow \quad AF = F^{-T}\Lambda_A$$
$$F^T BF = \Lambda_B \quad \Rightarrow \quad BF = F^{-T}\Lambda_B.$$

$$F^{-T}\Lambda_A = F^{-T}\Lambda_B(\Lambda_A\Lambda_B^{-1}) = BF(\Lambda_A\Lambda_B^{-1})$$

$$AF = F^{-T}\Lambda_A = BF(\Lambda_A\Lambda_B^{-1}) = BF\,\mathrm{diag}(\alpha_1/\beta_1, \ldots, \alpha_n/\beta_n)$$

$$A\,Fe_i = BF\,\mathrm{diag}(\alpha_1/\beta_1, \ldots, \alpha_n/\beta_n)e_i = (\alpha_i/\beta_i)\,B\,Fe_i, \quad 1 \le i \le n.$$

$\square$

Kako riješiti PGEP?

Može se pokušati sa transformacijom $(A, B) \mapsto (L^{-1}AL^{-T}, I)$, $B = LL^T$ i reducirati PGEP na standardni EP za jednu simetričnu matricu.

Kako riješiti PGEP?

Može se pokušati sa transformacijom $(A, B) \mapsto (L^{-1}AL^{-T}, I)$, $B = LL^T$ i reducirati PGEP na standardni EP za jednu simetričnu matricu.

Ako B ima visoku kondiciju, tada će i L imati visoku kondiciju

Kako riješiti PGEP?

Može se pokušati sa transformacijom $(A, B) \mapsto (L^{-1}AL^{-T}, I)$, $B = LL^T$ i reducirati PGEP na standardni EP za jednu simetričnu matricu.

Ako B ima visoku kondiciju, tada će i L imati visoku kondiciju

$$(\quad \text{sjetimo se: } \kappa_2(L) = \sqrt{\kappa_2(B)} \quad),$$

Kako riješiti PGEP?

Može se pokušati sa transformacijom $(A, B) \mapsto (L^{-1}AL^{-T}, I)$, $B = LL^T$ i reducirati PGEP na standardni EP za jednu simetričnu matricu.

Ako B ima visoku kondiciju, tada će i L imati visoku kondiciju

$$\left(\text{ sjetimo se: } \kappa_2(L) = \sqrt{\kappa_2(B)} \ \right),$$

tada će izračunata matrica $L^{-1}AL^{-T}$ imati visoku kondiciju i netočnost u L + kondicija od L će kontaminirati vlastite vrijednosti od $L^{-1}AL^{-T}$.

Kako riješiti PGEP?

Može se pokušati sa transformacijom $(A, B) \mapsto (L^{-1}AL^{-T}, I)$, $B = LL^T$ i reducirati PGEP na standardni EP za jednu simetričnu matricu.

Ako B ima visoku kondiciju, tada će i L imati visoku kondiciju

$$(\text{ sjetimo se: } \kappa_2(L) = \sqrt{\kappa_2(B)} \ ),$$

tada će izračunata matrica $L^{-1}AL^{-T}$ imati visoku kondiciju i netočnost u L + kondicija od L će kontaminirati vlastite vrijednosti od $L^{-1}AL^{-T}$.

Tada se npr. može pokušati maksimizirati minimalnu vlastitu vrijednost od B rotirajući par

$$(A, B) \mapsto (A_\varphi, B_\varphi) = (A\cos\varphi + B\sin\varphi, -A\sin\varphi + B\cos\varphi),$$

ili dizajnirati neku novu metodu za par (A, B).

Kako riješiti PGEP?

Može se pokušati sa transformacijom $(A, B) \mapsto (L^{-1}AL^{-T}, I)$, $B = LL^T$ i reducirati PGEP na standardni EP za jednu simetričnu matricu.

Ako B ima visoku kondiciju, tada će i L imati visoku kondiciju

$$(\quad \text{sjetimo se: } \kappa_2(L) = \sqrt{\kappa_2(B)} \quad),$$

tada će izračunata matrica $L^{-1}AL^{-T}$ imati visoku kondiciju i netočnost u L + kondicija od L će kontaminirati vlastite vrijednosti od $L^{-1}AL^{-T}$.

Tada se npr. može pokušati maksimizirati minimalnu vlastitu vrijednost od B rotirajući par

$$(A, B) \mapsto (A_\varphi, B_\varphi) = (A\cos\varphi + B\sin\varphi, -A\sin\varphi + B\cos\varphi),$$

ili dizajnirati neku novu metodu za par (A, B).

Mi odabiremo drugi put.

Dijagonalizacijske metode za PGEP

Postoje dvije dijagonalizacijske metode za PGEP

Dijagonalizacijske metode za PGEP

Postoje dvije dijagonalizacijske metode za PGEP

- Falk-Langemeyerova metoda (kraće: FL metoda)
  (Elektronische Datenverarbeitung, 1960)

Dijagonalizacijske metode za PGEP

Postoje dvije dijagonalizacijske metode za PGEP

- Falk-Langemeyerova metoda (kraće: FL metoda)
  (Elektronische Datenverarbeitung, 1960)
- Hari-Zimmermann metoda (kraće: HZ metoda)
  (Hari Ph.D. 1984)

Dijagonalizacijske metode za PGEP

Postoje dvije dijagonalizacijske metode za PGEP

- Falk-Langemeyerova metoda (kraće: FL metoda)
  (Elektronische Datenverarbeitung, 1960)
- Hari-Zimmermann metoda (kraće: HZ metoda)
  (Hari Ph.D. 1984)

Te dvije metode su povezane: FL se može promatrati kao HZ metoda sa "brzo skaliranim" transformacijama (još nije publiciran dokaz),

Dijagonalizacijske metode za PGEP

Postoje dvije dijagonalizacijske metode za PGEP

- Falk-Langemeyerova metoda (kraće: FL metoda)
  (Elektronische Datenverarbeitung, 1960)
- Hari-Zimmermann metoda (kraće: HZ metoda)
  (Hari Ph.D. 1984)

Te dvije metode su povezane: FL se može promatrati kao HZ metoda sa "brzo skaliranim" transformacijama (još nije publiciran dokaz),

dok je HZ metoda direktna generalizacija Jacobijeve metode za matricu A.
Stoga se očekuje da je FL metoda nešto brža, a HZ metoda je robustnija.

Dijagonalizacijske metode za PGEP

U članku

V. Novaković, S. Singer, S. Singer (Parallel Comput., 2015)

Dijagonalizacijske metode za PGEP

U članku

V. Novaković, S. Singer, S. Singer (Parallel Comput., 2015)

pokazano je testiranjem na velikim matricama, koristeći jednostranu blok HZ metodu za računanje GSVD, da HZ metoda ima prednosti pred FL metodom.

Dijagonalizacijske metode za PGEP

U članku

V. Novaković, S. Singer, S. Singer (Parallel Comput., 2015)

pokazano je testiranjem na velikim matricama, koristeći jednostranu blok HZ metodu za računanje GSVD, da HZ metoda ima prednosti pred FL metodom. (U tom članku je metoda dobila i naziv!)

Dijagonalizacijske metode za PGEP

U članku

V. Novaković, S. Singer, S. Singer (Parallel Comput., 2015)

pokazano je testiranjem na velikim matricama, koristeći jednostranu blok HZ metodu za računanje GSVD, da HZ metoda ima prednosti pred FL metodom. (U tom članku je metoda dobila i naziv!)

Kada se implementira kao jednostrana blok metoda za GSVD, HZ metoda se skoro perfektno paralelizira, pri čemu su paralelne verzije algoritma sa zajedničkom memorijom, visoko skalabilne i njihovo ubrzanje ovisi samo o broju jezgri koje se koriste.

> *When implemented as one-sided block algorithm for the GSVD, it is almost perfectly parallelizable, so parallel shared memory versions of the algorithm are highly scalable, and their speedup almost solely depends on the number of cores used.*

Izvod HZ Metode (ne blok HZ metode)

Preliminarna transformacija: $A^{(0)} = D_0 A D_0, \;\; B^{(0)} = D_0 B D_0$

Izvod HZ Metode (ne blok HZ metode)

Preliminarna transformacija: $A^{(0)} = D_0 A D_0, \ B^{(0)} = D_0 B D_0$

$D_0 = [\mathrm{diag}(B)]^{-\frac{1}{2}}$, tako da vrijedi $b_{11}^{(0)} = b_{22}^{(0)} = \cdots = b_{nn}^{(0)} = 1.$

Izvod HZ Metode (ne blok HZ metode)

Preliminarna transformacija: $A^{(0)} = D_0 A D_0, \; B^{(0)} = D_0 B D_0$

$D_0 = [\mathrm{diag}(B)]^{-\frac{1}{2}}$, tako da vrijedi $b_{11}^{(0)} = b_{22}^{(0)} = \cdots = b_{nn}^{(0)} = 1.$

Ovo svojstvo od $B^{(0)}$ se čuva u iterativnom procesu:

$$A^{(k+1)} = Z_k^T A^{(k)} Z_k, \qquad B^{(k+1)} = Z_k^T B^{(k)} Z_k, \quad k \geq 0.$$

Izvod HZ Metode (ne blok HZ metode)

Preliminarna transformacija: $\quad A^{(0)} = D_0 A D_0,\ B^{(0)} = D_0 B D_0$

$D_0 = [\mathrm{diag}(B)]^{-\frac{1}{2}}$, tako da vrijedi $\quad b_{11}^{(0)} = b_{22}^{(0)} = \cdots = b_{nn}^{(0)} = 1.$

Ovo svojstvo od $B^{(0)}$ se čuva u iterativnom procesu:

$$A^{(k+1)} = Z_k^T A^{(k)} Z_k, \qquad B^{(k+1)} = Z_k^T B^{(k)} Z_k, \quad k \geq 0.$$

Svaka Z_k je nesingularna elementarna ravninska matrica

Izvod HZ Metode (ne blok HZ metode)

Preliminarna transformacija: $A^{(0)} = D_0 A D_0, \ B^{(0)} = D_0 B D_0$

$D_0 = [\mathrm{diag}(B)]^{-\frac{1}{2}}$, tako da vrijedi $b_{11}^{(0)} = b_{22}^{(0)} = \cdots = b_{nn}^{(0)} = 1.$

Ovo svojstvo od $B^{(0)}$ se čuva u iterativnom procesu:

$$A^{(k+1)} = Z_k^T A^{(k)} Z_k, \qquad B^{(k+1)} = Z_k^T B^{(k)} Z_k, \quad k \geq 0.$$

Svaka Z_k je nesingularna elementarna ravninska matrica

$$Z_k = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} I & & & & \\ & c_k & & -s_k & \\ & & I & & \\ & \tilde{s}_k & & \tilde{c}_k & \\ & & & & I \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ i(k) \\ \\ j(k) \\ \\ \end{array} \end{array}, \qquad i(k) < j(k) \text{ su pivotni indeksi u koraku } k,$$

$$c_k^2 + s_k^2 = \tilde{c}_k^2 + \tilde{s}_k^2 = 1/\sqrt{1 - b_{i(k)j(k)}^2} \quad \text{(Gose 1979).}$$

Izvod HZ Metode (ne blok HZ metode)

Preliminarna transformacija: $A^{(0)} = D_0 A D_0,\ B^{(0)} = D_0 B D_0$

$D_0 = [\mathrm{diag}(B)]^{-\frac{1}{2}}$, tako da vrijedi $b_{11}^{(0)} = b_{22}^{(0)} = \cdots = b_{nn}^{(0)} = 1.$

Ovo svojstvo od $B^{(0)}$ se čuva u iterativnom procesu:

$$A^{(k+1)} = Z_k^T A^{(k)} Z_k, \qquad B^{(k+1)} = Z_k^T B^{(k)} Z_k, \quad k \geq 0.$$

Svaka Z_k je nesingularna elementarna ravninska matrica

$$Z_k = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} I & & & & \\ & c_k & & -s_k & \\ & & I & & \\ & \tilde{s}_k & & \tilde{c}_k & \\ & & & & I \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ i(k) \\ \\ j(k) \\ \\ \end{array} \end{array}, \qquad i(k) < j(k) \text{ su pivotni indeksi u koraku } k,$$

$c_k^2 + s_k^2 = \tilde{c}_k^2 + \tilde{s}_k^2 = 1/\sqrt{1 - b_{i(k)j(k)}^2}$ (Gose 1979).

Način kako se vrši izbor pivotnog para $(i(k), j(k))$ definira pivotnu strategiju.

Izvod HZ Metode

Da bismo opisali k-ti korak metode, uvodimo oznake:

$$A = A^{(k)}, \quad A' = A^{(k+1)}, \quad Z_k = Z,$$

$$\hat{Z} = \begin{bmatrix} c & -s \\ \tilde{s} & \tilde{c} \end{bmatrix} \qquad \text{pivotna podmatrica od } Z.$$

Izvod HZ Metode

Da bismo opisali k-ti korak metode, uvodimo oznake:

$$A = A^{(k)}, \quad A' = A^{(k+1)}, \quad Z_k = Z,$$

$$\hat{Z} = \begin{bmatrix} c & -s \\ \tilde{s} & \tilde{c} \end{bmatrix} \qquad \text{pivotna podmatrica od } Z.$$

Vrijedi

$$A' = Z^T A Z, \quad B' = Z^T B Z \qquad \left(\hat{A}' = \hat{Z}^T \hat{A} \hat{Z}, \quad \hat{B}' = \hat{Z}^T \hat{B} \hat{Z}\right).$$

Izvod HZ Metode

Da bismo opisali k-ti korak metode, uvodimo oznake:

$$A = A^{(k)}, \quad A' = A^{(k+1)}, \quad Z_k = Z,$$

$$\hat{Z} = \begin{bmatrix} c & -s \\ \tilde{s} & \tilde{c} \end{bmatrix} \qquad \text{pivotna podmatrica od } Z.$$

Vrijedi

$$A' = Z^T A Z, \quad B' = Z^T B Z \qquad \left(\hat{A}' = \hat{Z}^T \hat{A} \hat{Z}, \quad \hat{B}' = \hat{Z}^T \hat{B} \hat{Z} \right).$$

Z se konstruira da poništi pivotne elemente a_{ij} i b_{ij}.

Izvod HZ Metode

Da bismo opisali k-ti korak metode, uvodimo oznake:

$$A = A^{(k)}, \quad A' = A^{(k+1)}, \quad Z_k = Z,$$

$$\hat{Z} = \begin{bmatrix} c & -s \\ \tilde{s} & \tilde{c} \end{bmatrix} \qquad \text{pivotna podmatrica od } Z.$$

Vrijedi

$$A' = Z^T A Z, \quad B' = Z^T B Z \qquad \left(\hat{A}' = \hat{Z}^T \hat{A} \hat{Z}, \quad \hat{B}' = \hat{Z}^T \hat{B} \hat{Z} \right).$$

Z se konstruira da poništi pivotne elemente a_{ij} i b_{ij}.

$\hat{Z}$ će se dobiti kao produkt dviju Jacobijevih rotacija i jedne dijagonalne matrice. Postoje dvije mogućnosti:

$\hat{Z}$ se traži u obliku:

(a) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+b_{ij}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-b_{ij}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) & -\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) & \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-b_{ij}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+b_{ij}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) & -\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) & \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$

$\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$

$\hat{B} \to \text{diag}$ $\qquad$ $\hat{B} \to I_2$ $\qquad$ $\hat{A} \to \text{diag}$

$\hat{Z}$ se traži u obliku:

$$(a)\quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+b_{ij}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-b_{ij}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) & -\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) & \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$$

$$(b)\quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-b_{ij}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+b_{ij}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) & -\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) & \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\hat{B} \to \text{diag} \qquad \hat{B} \to I_2 \qquad \hat{A} \to \text{diag}$$

Oba izbora vode do iste matrice $\hat{F}$, dakle do istog algoritma.

Bitni dio algoritma: formule

$$\xi = \frac{b_{ij}}{\sqrt{1+b_{ij}} + \sqrt{1-b_{ij}}}, \quad \rho = \xi + \sqrt{1-b_{ij}}, \quad \xi^2 + \rho^2 = 1,$$

Bitni dio algoritma: formule

$$\xi = \frac{b_{ij}}{\sqrt{1+b_{ij}} + \sqrt{1-b_{ij}}}, \quad \rho = \xi + \sqrt{1-b_{ij}}, \quad \xi^2 + \rho^2 = 1,$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2a_{ij} - (a_{ii} + a_{jj})\, b_{ij}}{\sqrt{1-(b_{ij})^2}\,(a_{ii} - a_{jj})}, \qquad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},$$

Bitni dio algoritma: formule

$$\xi = \frac{b_{ij}}{\sqrt{1+b_{ij}} + \sqrt{1-b_{ij}}}, \quad \rho = \xi + \sqrt{1-b_{ij}}, \quad \xi^2 + \rho^2 = 1,$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2a_{ij} - (a_{ii} + a_{jj})\, b_{ij}}{\sqrt{1-(b_{ij})^2}\,(a_{ii} - a_{jj})}, \qquad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned}
\cos\phi &= \rho\cos\theta - \xi\sin\theta \\
\sin\phi &= \rho\sin\theta + \xi\cos\theta \\
\cos\psi &= \rho\cos\theta + \xi\sin\theta \\
\sin\psi &= \rho\sin\theta - \xi\cos\theta
\end{aligned}$$

Bitni dio algoritma: formule

$$\xi = \frac{b_{ij}}{\sqrt{1+b_{ij}} + \sqrt{1-b_{ij}}}, \quad \rho = \xi + \sqrt{1-b_{ij}}, \quad \xi^2 + \rho^2 = 1,$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2a_{ij} - (a_{ii} + a_{jj})\, b_{ij}}{\sqrt{1-(b_{ij})^2}\,(a_{ii} - a_{jj})}, \qquad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \rho\cos\theta - \xi\sin\theta \\ \sin\phi &= \rho\sin\theta + \xi\cos\theta \\ \cos\psi &= \rho\cos\theta + \xi\sin\theta \\ \sin\psi &= \rho\sin\theta - \xi\cos\theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{Z} = \frac{1}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix}.}$$

Bitni dio algoritma: formule

$$\xi = \frac{b_{ij}}{\sqrt{1+b_{ij}}+\sqrt{1-b_{ij}}}, \quad \rho = \xi + \sqrt{1-b_{ij}}, \quad \xi^2+\rho^2 = 1,$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2a_{ij} - (a_{ii}+a_{jj})\, b_{ij}}{\sqrt{1-(b_{ij})^2}\,(a_{ii}-a_{jj})}, \qquad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \rho\cos\theta - \xi\sin\theta \\ \sin\phi &= \rho\sin\theta + \xi\cos\theta \\ \cos\psi &= \rho\cos\theta + \xi\sin\theta \\ \sin\psi &= \rho\sin\theta - \xi\cos\theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{Z} = \frac{1}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix}.}$$

$$\begin{aligned} a'_{ii} &= a_{ii} + \frac{1}{1-b_{ij}^2}\left[(b_{ij}^2 - \sin^2\phi)\, a_{ii} + 2\cos\phi\sin\psi\, a_{ij} + \sin^2\psi\, a_{jj}\right] \\ a'_{jj} &= a_{jj} - \frac{1}{1-b_{ij}^2}\left[(\sin^2\psi - b_{ij}^2)\, a_{jj} + 2\cos\psi\sin\phi\, a_{ij} + \sin^2\phi\, a_{ii}\right] \end{aligned}$$

Ima još dosta formula!

$$\rho = \frac{1}{2}(\sqrt{1+b_{ij}} + \sqrt{1-b_{ij}}), \quad 2\rho\xi = b_{ij}.$$

Lako se pokaže da vrijedi $\quad |\xi| \leq \sqrt{2}/2, \ \sqrt{2}/2 \leq \rho \leq 1.$

$$\begin{aligned}
\cos\phi \sin\psi &= \cos\theta \sin\theta - \rho\xi = 0.5\,(\sin 2\theta - b_{ij}), \\
\cos\psi \sin\phi &= \cos\theta \sin\theta + \rho\xi = 0.5\,(\sin 2\theta + b_{ij}), \\
\cos\phi \cos\psi &= \rho^2 \cos^2\theta - \xi^2 \sin^2\theta, \\
\sin\phi \sin\psi &= \rho^2 \sin^2\theta - \xi^2 \cos^2\theta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\min\{\cos\phi\,,\, \cos\psi\} &\geq \rho\cos\theta - \frac{|b_{ij}|}{2\rho}|\sin\theta| \geq (\rho - \frac{|b_{ij}|}{2\rho})\cos\theta > 0, \\
\max\{\cos\phi\,,\, \cos\psi\} &= \rho\cos\theta + |\xi\sin\theta| \geq \cos(\theta) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Ima još dosta formula!

Neka je: $\sin\gamma = b_{ij}$, $\cos\gamma = \sqrt{1-b_{ij}^2}$. Tada je

$$\frac{1}{\cos\gamma}\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a'_{ii} & \\ & a'_{jj} \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{\cos\gamma}\begin{bmatrix} 1 & b_{ij} \\ b_{ij} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{\cos\phi}{\cos\psi} + b_{ij}\tan\psi = \frac{\cos\psi}{\cos\phi} - b_{ij}\tan\phi, \\ 2\cos(\phi+\psi)a_{ij} &= a_{ii}\sin(2\phi) - a_{jj}\sin(2\psi). \end{aligned}$$

Ima još dosta formula!

$$\begin{aligned} a'_{ii} &= \frac{1}{\cos\gamma}\left(a_{ii}\frac{\cos\phi}{\cos\psi} + a_{ij}\tan\psi\right) = \frac{a_{ii} + a_{ij}\frac{\sin\psi}{\cos\phi}}{1 + b_{ij}\frac{\sin\psi}{\cos\phi}}, \\ a'_{jj} &= \frac{1}{\cos\gamma}\left(a_{jj}\frac{\cos\psi}{\cos\phi} - a_{ij}\tan\phi\right) = \frac{a_{jj} - a_{ij}\frac{\sin\phi}{\cos\psi}}{1 - b_{ij}\frac{\sin\phi}{\cos\psi}}. \end{aligned}$$

Također vrijedi

$$\phi + \psi = 2\theta\,, \qquad \text{stoga je} \qquad \begin{aligned} \phi &= \theta + \gamma/2, \\ \psi &= \theta - \gamma/2. \end{aligned}$$

Sve te formule koriste se i u dokazu globalne konvergencije, i u dokazu relativne točnosti metode.

Digresija: kompleksne matrice

Ako su $A = A^*$ i $B = B^*$ kompleksne, te ako je $B \succ O$ i $\mathrm{diag}(B) = I_n$, tada jedan korak HZ metode koristi transformaciju

Digresija: kompleksne matrice

Ako su $A = A^*$ i $B = B^*$ kompleksne, te ako je $B \succ O$ i $\mathrm{diag}(B) = I_n$, tada jedan korak HZ metode koristi transformaciju

$$A' = Z^* A Z, \quad B' = Z^* B Z,$$

Z je konstruirana da poništi pivotne elemente a_{ij} i b_{ij}.

Digresija: kompleksne matrice

Ako su $A = A^*$ i $B = B^*$ kompleksne, te ako je $B \succ O$ i $\mathrm{diag}(B) = I_n$, tada jedan korak HZ metode koristi transformaciju

$$A' = Z^* A Z, \quad B' = Z^* B Z,$$

Z je konstruirana da poništi pivotne elemente a_{ij} i b_{ij}.

Pokazuje se da pivotna podmatrica od Z ima oblik

$$\hat{Z} = \begin{bmatrix} c & \bar{s} \\ -\tilde{s} & \tilde{c} \end{bmatrix}.$$

Digresija: kompleksne matrice

Ako su $A = A^*$ i $B = B^*$ kompleksne, te ako je $B \succ O$ i $\operatorname{diag}(B) = I_n$, tada jedan korak HZ metode koristi transformaciju

$$A' = Z^* A Z, \quad B' = Z^* B Z,$$

Z je konstruirana da poništi pivotne elemente a_{ij} i b_{ij}.

Pokazuje se da pivotna podmatrica od Z ima oblik

$$\hat{Z} = \begin{bmatrix} c & \bar{s} \\ -\tilde{s} & \tilde{c} \end{bmatrix}.$$

Vrijedi $\hat{A}' = \hat{Z}^* \hat{A} \hat{Z}, \quad \hat{B}' = \hat{Z}^* \hat{B} \hat{Z}.$

Digresija: kompleksne matrice

Ako su $A = A^*$ i $B = B^*$ kompleksne, te ako je $B \succ O$ i $\mathrm{diag}(B) = I_n$, tada jedan korak HZ metode koristi transformaciju

$$A' = Z^* A Z, \quad B' = Z^* B Z,$$

Z je konstruirana da poništi pivotne elemente a_{ij} i b_{ij}.

Pokazuje se da pivotna podmatrica od Z ima oblik

$$\hat{Z} = \begin{bmatrix} c & \bar{s} \\ -\tilde{s} & \tilde{c} \end{bmatrix}.$$

Vrijedi $\hat{A}' = \hat{Z}^* \hat{A} \hat{Z}$, $\hat{B}' = \hat{Z}^* \hat{B} \hat{Z}$. $\hat{Z}$ se traži u obliku produkta dviju kompleksnih Jacobijevih rotacija i dviju dijagonalnih matrica.

$\hat{Z}$ se traži u obliku:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \hat{B} \to \mathrm{diag} & \hat{B} \to I_2 \\
 & \uparrow & \uparrow
\end{array}
$$

$$
\hat{Z} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\imath \arg(b_{ij})} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\imath \arg(b_{ij})} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+|b_{ij}|}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-|b_{ij}|}} \end{bmatrix}
$$

$$
\cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) & e^{\imath\alpha} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \\ -e^{-\imath\alpha} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) & \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{\imath\omega_i} & 0 \\ 0 & e^{\imath\omega_j} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\downarrow & \downarrow \\
\hat{A} \to \mathrm{diag} & \mathrm{diag}(\hat{Z}) \succ O
\end{array}
$$

Bitni dio algoritma

Neka je

$$b = |b_{ij}|, \quad t = \sqrt{1 - b^2}, \quad e = a_{jj} - a_{ii}, \quad \epsilon = \begin{cases} 1, & e \geq 0 \\ -1, & e < 0 \end{cases},$$

Bitni dio algoritma

Neka je

$$b = |b_{ij}|, \quad t = \sqrt{1-b^2}, \quad e = a_{jj} - a_{ii}, \quad \epsilon = \begin{cases} 1, & e \geq 0 \\ -1, & e < 0 \end{cases},$$

$$\begin{aligned}
u + \imath\, v &= e^{-\imath \arg(b_{ij})}\, a_{ij}, \qquad \tan\gamma = 2\tfrac{v}{|e|}, \quad -\tfrac{\pi}{2} < \gamma \leq \tfrac{\pi}{2} \\
\tan 2\theta &= \epsilon \tfrac{2u - (a_{ii}+a_{jj})b}{t\sqrt{e^2+4v^2}}, \quad -\tfrac{\pi}{4} < \theta \leq \tfrac{\pi}{4} \\
2\cos^2\phi &= 1 + b\sin 2\theta + t\cos 2\theta\cos\gamma, \qquad 0 \leq \phi \leq \tfrac{\pi}{2} \\
2\cos^2\psi &= 1 - b\sin 2\theta + t\cos 2\theta\cos\gamma, \qquad 0 \leq \psi \leq \tfrac{\pi}{2} \\
e^{\imath\alpha}\sin\phi &= \frac{e^{\imath \arg(b_{ij})}}{2\cos\psi}\left[\sin 2\theta - b - \imath t\cos 2\theta\sin\gamma\right] \\
e^{-\imath\beta}\sin\psi &= \frac{e^{-\imath \arg(b_{ij})}}{2\cos\phi}\left[\sin 2\theta + b + \imath t\cos 2\theta\sin\gamma\right].
\end{aligned}$$

Bitni dio algoritma

Neka je

$$b = |b_{ij}|, \quad t = \sqrt{1-b^2}, \quad e = a_{jj} - a_{ii}, \quad \epsilon = \begin{cases} 1, & e \geq 0 \\ -1, & e < 0 \end{cases},$$

$$\begin{aligned}
u + \imath\, v &= e^{-\imath \arg(b_{ij})}\, a_{ij}, \qquad \tan\gamma = 2\tfrac{v}{|e|}, \quad -\tfrac{\pi}{2} < \gamma \leq \tfrac{\pi}{2} \\
\tan 2\theta &= \epsilon \frac{2u-(a_{ii}+a_{jj})b}{t\sqrt{e^2+4v^2}}, \quad -\tfrac{\pi}{4} < \theta \leq \tfrac{\pi}{4} \\
2\cos^2\phi &= 1 + b\sin 2\theta + t\cos 2\theta\cos\gamma, \qquad 0 \leq \phi \leq \tfrac{\pi}{2} \\
2\cos^2\psi &= 1 - b\sin 2\theta + t\cos 2\theta\cos\gamma, \qquad 0 \leq \psi \leq \tfrac{\pi}{2} \\
e^{\imath\alpha}\sin\phi &= \frac{e^{\imath \arg(b_{ij})}}{2\cos\psi}\left[\sin 2\theta - b - \imath t\cos 2\theta\sin\gamma\right] \\
e^{-\imath\beta}\sin\psi &= \frac{e^{-\imath \arg(b_{ij})}}{2\cos\phi}\left[\sin 2\theta + b + \imath t\cos 2\theta\sin\gamma\right].
\end{aligned}$$

Tada je

$$\hat{Z} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \begin{bmatrix} \cos\phi & e^{\imath\alpha}\sin\phi \\ -e^{-\imath\beta}\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$$

Novi algoritmi: bazirani na LL^T i RR^T faktorizacijama

Napravimo faktorizaciju Choleskog od $\hat{B}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{ij} \\ b_{ij} & 1 \end{bmatrix} = \hat{B} = \hat{L}\hat{L}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 + c^2 \end{bmatrix}.$$

Novi algoritmi: bazirani na LL^T i RR^T faktorizacijama

Napravimo faktorizaciju Choleskog od $\hat{B}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{ij} \\ b_{ij} & 1 \end{bmatrix} = \hat{B} = \hat{L}\hat{L}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 + c^2 \end{bmatrix}.$$

Uzmimo da je $c > 0$. Tada se dobije $a = b_{ij}$, $c = \sqrt{1 - b_{ij}^2}$. Dakle je

Novi algoritmi: bazirani na LL^T i RR^T faktorizacijama

Napravimo faktorizaciju Choleskog od $\hat{B}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{ij} \\ b_{ij} & 1 \end{bmatrix} = \hat{B} = \hat{L}\hat{L}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 + c^2 \end{bmatrix}.$$

Uzmimo da je $c > 0$. Tada se dobije $a = b_{ij}$, $c = \sqrt{1 - b_{ij}^2}$. Dakle je

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b_{ij} & \sqrt{1 - b_{ij}^2} \end{bmatrix}, \quad \hat{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b_{ij}}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} \end{bmatrix}.$$

Novi algoritmi: bazirani na LL^T i RR^T faktorizacijama

Napravimo faktorizaciju Choleskog od $\hat{B}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{ij} \\ b_{ij} & 1 \end{bmatrix} = \hat{B} = \hat{L}\hat{L}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 + c^2 \end{bmatrix}.$$

Uzmimo da je $c > 0$. Tada se dobije $a = b_{ij}$, $c = \sqrt{1 - b_{ij}^2}$. Dakle je

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b_{ij} & \sqrt{1 - b_{ij}^2} \end{bmatrix}, \quad \hat{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b_{ij}}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} \end{bmatrix}.$$

Ako pišemo $\hat{F}_1 = \hat{L}^{-T}$, tada je $\hat{F}_1^T \hat{B} \hat{F}_1 = I_2$ i

Algoritam baziran na LL^T faktorizaciji

$$
\begin{aligned}
\hat{F}_1^T \hat{A} \hat{F}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f_{ij} & f_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_{ij} \\ 0 & f_{jj} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{ii} & f_{ij} a_{ii} + f_{jj} a_{ij} \\ f_{ij} a_{ii} + f_{jj} a_{ij} & f_{ij}^2 a_{ii} + 2 f_{ij} f_{jj} a_{ij} + f_{jj}^2 a_{jj} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{ii} & \frac{a_{ij} - b_{ij} a_{ii}}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}} \\ \frac{a_{ij} - b_{ij} a_{ii}}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}} & a_{jj} - \frac{2 a_{ij} - (a_{ii} + a_{jj}) b_{ij}}{1 - b_{ij}^2} b_{ij} \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

gdje smo koristili $f_{ij} = -b_{ij}/\sqrt{1 - b_{ij}^2}$, $f_{jj} = 1/\sqrt{1 - b_{ij}^2}$.

Algoritam baziran na LL^T faktorizaciji

$$
\begin{aligned}
\hat{F}_1^T \hat{A} \hat{F}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f_{ij} & f_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_{ij} \\ 0 & f_{jj} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{ii} & f_{ij} a_{ii} + f_{jj} a_{ij} \\ f_{ij} a_{ii} + f_{jj} a_{ij} & f_{ij}^2 a_{ii} + 2 f_{ij} f_{jj} a_{ij} + f_{jj}^2 a_{jj} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{ii} & \frac{a_{ij} - b_{ij} a_{ii}}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}} \\ \frac{a_{ij} - b_{ij} a_{ii}}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}} & a_{jj} - \frac{2a_{ij} - (a_{ii} + a_{jj}) b_{ij}}{1 - b_{ij}^2} b_{ij} \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

gdje smo koristili $f_{ij} = -b_{ij}/\sqrt{1 - b_{ij}^2}$, $f_{jj} = 1/\sqrt{1 - b_{ij}^2}$.

Konačna $\hat{F}$ ima oblik $\hat{F} = \hat{F}_1 \hat{R}$, gdje je $\hat{R}$ Jacobijeva transformacija koja dijagonalizira $\hat{F}_1^T \hat{A} \hat{F}_1$. Kut ϑ se određuje iz formule

Algoritam baziran na LL^T faktorizaciji

$$\tan(2\vartheta) = \frac{2(a_{ij} - b_{ij}a_{ii})\sqrt{1 - b_{ij}^2}}{a_{ii} - a_{jj} + 2(a_{ij} - b_{ij}a_{ii})b_{ij}}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Algoritam baziran na LL^T faktorizaciji

$$\tan(2\vartheta) = \frac{2(a_{ij} - b_{ij}a_{ii})\sqrt{1-b_{ij}^2}}{a_{ii} - a_{jj} + 2(a_{ij} - b_{ij}a_{ii})b_{ij}}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Transformacijske formule za dijagonalne elemente od A imaju oblik:

$$a'_{ii} = a_{ii} + \tan\vartheta \cdot \frac{a_{ij} - a_{ii}b_{ij}}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} \tag{2}$$

$$a'_{jj} = a_{jj} - \frac{2a_{ij}b_{ij} - b_{ij}^2(a_{ii} + a_{jj})}{1-b_{ij}^2} - \tan\vartheta \cdot \frac{a_{ij} - a_{ii}b_{ij}}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} \tag{3}$$

Algoritam baziran na LL^T faktorizaciji

$$\tan(2\vartheta) = \frac{2(a_{ij} - b_{ij}a_{ii})\sqrt{1-b_{ij}^2}}{a_{ii} - a_{jj} + 2(a_{ij} - b_{ij}a_{ii})b_{ij}}, \quad -\frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}.$$

Transformacijske formule za dijagonalne elemente od A imaju oblik:

$$a'_{ii} = a_{ii} + \tan\vartheta \cdot \frac{a_{ij} - a_{ii}b_{ij}}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} \tag{2}$$

$$a'_{jj} = a_{jj} - \frac{2a_{ij}b_{ij} - b_{ij}^2(a_{ii} + a_{jj})}{1 - b_{ij}^2} - \tan\vartheta \cdot \frac{a_{ij} - a_{ii}b_{ij}}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} \tag{3}$$

Ako je $a_{ii} = a_{jj}$, $a_{ij} = a_{ii}b_{ij}$ tada je ϑ oblika $0/0$, pa izabiremo $\vartheta = 0$. U tom slučaju se a'_{ii} i a'_{jj} reduciraju na a_{ii} and a_{jj}, respektivno.

Dobivamo

$$\begin{aligned}\hat{Z} &= \frac{1}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} \begin{bmatrix} \sqrt{1-b_{ij}^2} & -b_{ij} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\vartheta & -s_\vartheta \\ s_\vartheta & c_\vartheta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} \begin{bmatrix} c_{\tilde{\vartheta}} & -s_{\tilde{\vartheta}} \\ s_\vartheta & c_\vartheta \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} c_{\tilde{\vartheta}} &= c_\vartheta \sqrt{1-b_{ij}^2} - s_\vartheta b_{ij}, \\ s_{\tilde{\vartheta}} &= c_\vartheta b_{ij} + s_\vartheta \sqrt{1-b_{ij}^2}. \end{aligned}\end{aligned}$$

Lako je provjeriti da vrijedi $c_{\tilde{\vartheta}}^2 + s_{\tilde{\vartheta}}^2 = 1$.

Algoritam baziran na RR^T faktorizaciji

Promotrimo sada RR^T faktorizaciju od $\hat{B}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{ij} \\ b_{ij} & 1 \end{bmatrix} = \hat{B} = \hat{R}\hat{R}^T = \begin{bmatrix} c & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

Ako odaberemo pozitivni c, dobijemo $a = b_{ij}$, $c = \sqrt{1 - b_{ij}^2}$, dakle

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - b_{ij}^2} & b_{ij} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \hat{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} & -\frac{b_{ij}}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Algoritam baziran na RR^T faktorizaciji

Promotrimo sada RR^T faktorizaciju od $\hat{B}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{ij} \\ b_{ij} & 1 \end{bmatrix} = \hat{B} = \hat{R}\hat{R}^T = \begin{bmatrix} c & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

Ako odaberemo pozitivni c, dobijemo $a = b_{ij}$, $c = \sqrt{1 - b_{ij}^2}$, dakle

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - b_{ij}^2} & b_{ij} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \hat{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} & -\frac{b_{ij}}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stavimo $\hat{F}_2 = \hat{R}^{-T}$, tada je $\hat{F}_2^T \hat{B} \hat{F}_2 = I_2$ i

Algoritam baziran na RR^T faktorizaciji

$$
\begin{aligned}
\hat{F}_2^T \hat{A} \hat{F}_2 &= \begin{bmatrix} f_{ii} & f_{ji} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ii} & 0 \\ f_{ji} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f_{ii}^2 a_{ii} + 2 f_{ii} f_{ji} a_{ij} + f_{ji}^2 a_{jj} & f_{ii} a_{ij} + f_{ji} a_{jj} \\ f_{ii} a_{ij} + f_{ji} a_{jj} & a_{jj} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{ii} - \frac{2a_{ij} - (a_{ii} + a_{jj}) b_{ij}}{1 - b_{ij}^2} b_{ij} & \frac{a_{ij} - b_{ij} a_{jj}}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}} \\ \frac{a_{ij} - b_{ij} a_{jj}}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}} & a_{jj} \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

pričemu smo koristili $f_{ii} = 1/\sqrt{1 - b_{ij}^2}$, $f_{ji} = -b_{ij}/\sqrt{1 - b_{ij}^2}$.

Algoritam baziran na RR^T faktorizaciji

$$
\begin{aligned}
\hat{F}_2^T \hat{A} \hat{F}_2 &= \begin{bmatrix} f_{ii} & f_{ji} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ii} & 0 \\ f_{ji} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f_{ii}^2 a_{ii} + 2 f_{ii} f_{ji} a_{ij} + f_{ji}^2 a_{jj} & f_{ii} a_{ij} + f_{ji} a_{jj} \\ f_{ii} a_{ij} + f_{ji} a_{jj} & a_{jj} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{ii} - \frac{2a_{ij} - (a_{ii} + a_{jj}) b_{ij}}{1 - b_{ij}^2} b_{ij} & \frac{a_{ij} - b_{ij} a_{jj}}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}} \\ \frac{a_{ij} - b_{ij} a_{jj}}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}} & a_{jj} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4}
$$

pričemu smo koristili $f_{ii} = 1/\sqrt{1 - b_{ij}^2}$, $f_{ji} = -b_{ij}/\sqrt{1 - b_{ij}^2}$.

Konačna matrica $\hat{F}$ ima oblik $\hat{F} = \hat{F}_2 \hat{J}$, gdje je $\hat{J}$ Jacobijeva transformacija koja dijagonalizira $\hat{F}_2^T \hat{A} \hat{F}_2$. Njen kut ϑ se određuje iz formula:

Algoritam baziran na RR^T faktorizaciji

$$\tan(2\vartheta) = \frac{2(a_{ij} - b_{ij}a_{jj})\sqrt{1 - b_{ij}^2}}{a_{ii} - a_{jj} - 2(a_{ij} - b_{ij}a_{jj})b_{ij}}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Algoritam baziran na RR^T faktorizaciji

$$\tan(2\vartheta) = \frac{2(a_{ij} - b_{ij}a_{jj})\sqrt{1 - b_{ij}^2}}{a_{ii} - a_{jj} - 2(a_{ij} - b_{ij}a_{jj})b_{ij}}, \quad -\frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}.$$

Transormacijske formule za dijagonalne elemente od A su:

$$\begin{aligned}
a'_{ii} &= a_{ii} - \frac{2a_{ij} - (a_{ii} + a_{jj})b_{ij}}{1 - b_{ij}^2} b_{ij} + \tan\vartheta \cdot \frac{a_{ij} - a_{jj}b_{ij}}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}} \\
a'_{jj} &= a_{jj} - \tan\vartheta \cdot \frac{a_{ij} - a_{jj}b_{ij}}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}}
\end{aligned}$$

Algoritam baziran na RR^T faktorizaciji

$$\tan(2\vartheta) = \frac{2(a_{ij} - b_{ij}a_{jj})\sqrt{1 - b_{ij}^2}}{a_{ii} - a_{jj} - 2(a_{ij} - b_{ij}a_{jj})b_{ij}}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Transormacijske formule za dijagonalne elemente od A su:

$$\begin{aligned} a'_{ii} &= a_{ii} - \frac{2a_{ij} - (a_{ii} + a_{jj})b_{ij}}{1 - b_{ij}^2} b_{ij} + \tan\vartheta \cdot \frac{a_{ij} - a_{jj}b_{ij}}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}} \\ a'_{jj} &= a_{jj} - \tan\vartheta \cdot \frac{a_{ij} - a_{jj}b_{ij}}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}} \end{aligned}$$

Ako je $a_{ii} = a_{jj}$, $a_{ij} = a_{jj}b_{ij}$, tada je ϑ oblika $0/0$, pa izabiremo $\vartheta = 0$. U tom slučaju se a'_{ii} i a'_{jj} reduciraju na a_{ii} i a_{jj}, respektivno.

Algoritam baziran na RR^T faktorizaciji

To dovodi do jednostavnijeg oblika matrice

$$
\begin{aligned}
\hat{Z} &= \frac{1}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_{ij} & \sqrt{1-b_{ij}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\vartheta & -s_\vartheta \\ s_\vartheta & c_\vartheta \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-b_{ij}^2}} \begin{bmatrix} c_\vartheta & -s_\vartheta \\ s_{\tilde{\vartheta}} & c_{\tilde{\vartheta}} \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} c_{\tilde{\vartheta}} &= c_\vartheta \sqrt{1-b_{ij}^2} + s_\vartheta b_{ij}, \\ s_{\tilde{\vartheta}} &= s_\vartheta \sqrt{1-b_{ij}^2} - c_\vartheta b_{ij}. \end{aligned}
\end{aligned}
$$

Lako se provjeri da vrijedi $c_{\tilde{\vartheta}}^2 + s_{\tilde{\vartheta}}^2 = 1$.

Algoritmi bazirani na LL^T i RR^T faktorizacijama mogu se poopćiti na kompleksne matrice.

Definicija hibridnih i općih metoda

Definicija

Neka je $\mathcal{H}$ klasa Jacobijevih metoda za pozitivno definitni generalizirani problem vlastitih vrijednosti $Ax = \lambda Bx$ koje zadovoljavaju sljedeće uvjete:

1. *u k-tom koraku metode pivotna podmatrica $\hat{A}^{(k)}$ se dijagonalizira, a $\hat{B}^{(k)}$ se transformira u I_2,*
2. *barem jedan od dva dijagonalna elementa pivotne podmatrice $\hat{F}_k$ nije manji od $\sqrt{2}/2$.*

Element klase $\mathcal{H}$ se naziva opća PGEP Jacobijeva metoda. Hibridna Jacobijeva metoda je ona metoda iz $\mathcal{H}$ koja u svakom koraku koristi HZ, $LL^T J$ ili $RR^T J$ algoritam.

Definicija hibridnih i općih metoda

Definicija

Neka je $\mathcal{H}$ klasa Jacobijevih metoda za pozitivno definitni generalizirani problem vlastitih vrijednosti $Ax = \lambda Bx$ koje zadovoljavaju sljedeće uvjete:

1. *u k-tom koraku metode pivotna podmatrica $\hat{A}^{(k)}$ se dijagonalizira, a $\hat{B}^{(k)}$ se transformira u I_2,*
2. *barem jedan od dva dijagonalna elementa pivotne podmatrice $\hat{F}_k$ nije manji od $\sqrt{2}/2$.*

Element klase $\mathcal{H}$ se naziva opća PGEP Jacobijeva metoda. Hibridna Jacobijeva metoda je ona metoda iz $\mathcal{H}$ koja u svakom koraku koristi HZ, $LL^T J$ ili $RR^T J$ algoritam.

U ovoj definiciji pivotna strategija nije specificirana, pa se svaka može koristiti. Ako metoda iz $\mathcal{H}$ koristi samo HZ ($LL^T J$, $RR^T J$) algoritam, zvat će se HZ ($LL^T J$, $RR^T J$) metoda.

Komentari:

- Lako se pokaže da su HZ, $LL^T J$ i $RR^T J$ metode iz klase $\mathcal{H}$.

Komentari:

- Lako se pokaže da su HZ, $LL^T J$ i $RR^T J$ metode iz klase $\mathcal{H}$.
- Opća (PGEP) Jacobijeva metoda može na svakom koraku koristiti svaki zamisliv algoritam koji zadovoljava gornja dva uvjeta. Npr. može koristiti FL metodu kombiniranu sa normalizacijom elemenata matrice B.

Komentari:

- Lako se pokaže da su HZ, LL^TJ i RR^TJ metode iz klase $\mathcal{H}$.
- Opća (PGEP) Jacobijeva metoda može na svakom koraku koristiti svaki zamisliv algoritam koji zadovoljava gornja dva uvjeta. Npr. može koristiti FL metodu kombiniranu sa normalizacijom elemenata matrice B.
- Algoritmi bazirani na LL^T i RR^T faktorizacijama su dobili nazive LL^TJ i RR^TJ algoritam jer iza spomenutih faktorizacija slijedi korak Jacobijeve metode za simetrične matrice.

Komentari:

- Svi realni algoritmi imaju oblik

$$\hat{Z} = \frac{1}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}} \left[\begin{array}{cc} \cos\phi & -\sin\phi \\ \cos\psi & \sin\psi \end{array} \right].$$

Komentari:

- Svi realni algoritmi imaju oblik

$$\hat{Z} = \frac{1}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix}.$$

To slijedi iz rezultata od Gose (ZAMM 59, 1979), koji je pronašao opći oblik matrice $\hat{Z}$ koja dijagonalizira pozitivno definitnu simetričnu matricu $\hat{B}$ reda 2 pomoću kongruencijske transformacije $\hat{B} \mapsto \hat{Z}^T \hat{B} \hat{Z}$.

Komentari:

- Svi realni algoritmi imaju oblik

$$\hat{Z} = \frac{1}{\sqrt{1 - b_{ij}^2}} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix}.$$

To slijedi iz rezultata od Gose (ZAMM 59, 1979), koji je pronašao opći oblik matrice $\hat{Z}$ koja dijagonalizira pozitivno definitnu simetričnu matricu $\hat{B}$ reda 2 pomoću kongruencijske transformacije $\hat{B} \mapsto \hat{Z}^T \hat{B} \hat{Z}$.

Ako se pretpostavi $b_{11} = \cdots = b_{nn}$, prije i nakon transformacije, tada je oblik od $\hat{Z}$ upravo Goseov teorem. Kasnije je Hari generalizirao taj rezultat na kompleksne matrice.

Globalna konvergencija (realni i kompleksni algoritmi)

Koristimo sljedeću mjeru za napredovanje procesa:

$$S^2(A) = \|A - \mathrm{diag}(A)\|_F^2, \quad S(A,B) = \left[S^2(A) + S^2(B)\right]^{1/2}.$$

Globalna konvergencija (realni i kompleksni algoritmi)

Koristimo sljedeću mjeru za napredovanje procesa:

$$S^2(A) = \|A - \mathrm{diag}(A)\|_F^2, \quad S(A,B) = \left[S^2(A) + S^2(B)\right]^{1/2}.$$

Definicija

Opća Jacobijeva metoda za PGEP je globalno konvergentna ako

$$A^{(k)} \to \Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad B^{(k)} \to I_n \qquad as \quad k \to \infty,$$

vrijedi za svaki polazni par simetričnih matrica (A,B) za koji je $B \succ O$.

Globalna konvergencija (realni i kompleksni algoritmi)

Koristimo sljedeću mjeru za napredovanje procesa:

$$S^2(A) = \|A - \mathrm{diag}(A)\|_F^2, \quad S(A,B) = \left[S^2(A) + S^2(B)\right]^{1/2}.$$

Definicija

Opća Jacobijeva metoda za PGEP je globalno konvergentna ako

$$A^{(k)} \to \Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad B^{(k)} \to I_n \qquad as \quad k \to \infty,$$

vrijedi za svaki polazni par simetričnih matrica (A, B) za koji je $B \succ O$.

Zapravo, dovoljno je pokazati da $S(A,B) \to 0$ kad $k \to \infty$.

Globalna konvergencija (realni i kompleksni algoritmi)

Koristimo sljedeću mjeru za napredovanje procesa:

$$S^2(A) = \|A - \mathrm{diag}(A)\|_F^2, \quad S(A,B) = \left[S^2(A) + S^2(B)\right]^{1/2}.$$

Definicija

Opća Jacobijeva metoda za PGEP je globalno konvergentna ako

$$A^{(k)} \to \Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad B^{(k)} \to I_n \qquad as \quad k \to \infty,$$

vrijedi za svaki polazni par simetričnih matrica (A, B) za koji je $B \succ O$.

Zapravo, dovoljno je pokazati da $S(A, B) \to 0$ kad $k \to \infty$.

Globalna konvergencija prvo je pokazana za serijalne pivotne strategije.

Globalna konvergencija (realni i kompleksni algoritmi)

Koristimo sljedeću mjeru za napredovanje procesa:

$$S^2(A) = \|A - \text{diag}(A)\|_F^2, \quad S(A,B) = \left[S^2(A) + S^2(B)\right]^{1/2}.$$

Definicija

Opća Jacobijeva metoda za PGEP je globalno konvergentna ako

$$A^{(k)} \to \Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad B^{(k)} \to I_n \qquad as \quad k \to \infty,$$

vrijedi za svaki polazni par simetričnih matrica (A, B) za koji je $B \succ O$.

Zapravo, dovoljno je pokazati da $S(A,B) \to 0$ kad $k \to \infty$.

Globalna konvergencija prvo je pokazana za serijalne pivotne strategije.

A zatim za generalizirane serijalne strategije koje uključuju i klasu cikličkih strategija koje su slabo ekvivalentne serijalnim strategijama.

Asimptotička konvergencija (realni i kompleksni algoritmi)

Neka prvo par (A, B) ima jednostruke vlastite vrijednosti:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n, \qquad \mu = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_n|\},$$

$$3\delta_i = \min_{\substack{1 \le i \le n \\ j \ne i}} |\lambda_i - \lambda_j|, \quad 1 \le i \le n; \qquad \delta = \min_{1 \le i \le n} \delta_i .$$

Asimptotička konvergencija (realni i kompleksni algoritmi)

Neka prvo par (A, B) ima jednostruke vlastite vrijednosti:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n, \qquad \mu = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_n|\},$$

$$3\delta_i = \min_{\substack{1 \le i \le n \\ j \ne i}} |\lambda_i - \lambda_j|, \quad 1 \le i \le n; \qquad \delta = \min_{1 \le i \le n} \delta_i .$$

Teorem

Ako vrijedi $S(B^{(0)}) < \dfrac{1}{n(n-1)}$ *i* $S(A^{(0)}, B^{(0)}) < \dfrac{\delta}{2\sqrt{1+\mu^2}}$,
tada za bilo koju cikličku odnosno serijalnu HZ metodu vrijedi:

$$S(A^{(N)}, B^{(N)}) \le \sqrt{N(1+\mu^2)}\, \frac{S^2(A^{(0)}, B^{(0)})}{\delta}, \quad N = n(n-1)/2,$$

$$S(A^{(N)}, B^{(N)}) \le \sqrt{1+\mu^2}\, \frac{S^2(A^{(0)}, B^{(0)})}{\delta},$$

respektivno.

Višestruke vlastite vrijednosti

Sada se situacija komplicira jer pozitivno definitni par (A, B) sa višestrukim vlastitim vrijednostima, i sa skoro dijagonalnim matricama, ima specijalnu strukturu.

Višestruke vlastite vrijednosti

Sada se situacija komplicira jer pozitivno definitni par (A, B) sa višestrukim vlastitim vrijednostima, i sa skoro dijagonalnim matricama, ima specijalnu strukturu.

Neka vrijedi: $A = A^* \;\text{ i }\; a_{11} \geq a_{22} \geq \cdots \geq a_{nn},$

$$B = B^* \;\text{ i }\; B \succ O,\ \mathrm{diag}(B) = I_n.$$

Višestruke vlastite vrijednosti

Sada se situacija komplicira jer pozitivno definitni par (A, B) sa višestrukim vlastitim vrijednostima, i sa skoro dijagonalnim matricama, ima specijalnu strukturu.

Neka vrijedi: $A = A^* \;\text{ i }\; a_{11} \geq a_{22} \geq \cdots \geq a_{nn},$

$$B = B^* \;\text{ i }\; B \succ O, \, \text{diag}(B) = I_n.$$

Neka za vlastite vrijednosti para (A, B) vrijedi

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{s_1} > \lambda_{s_1+1} = \cdots = \lambda_{s_2} > \cdots > \lambda_{s_{p-1}+1} = \cdots = \lambda_{s_p},$$

pri čemu je $s_p = n$.

Višestruke vlastite vrijednosti

Sada se situacija komplicira jer pozitivno definitni par (A, B) sa višestrukim vlastitim vrijednostima, i sa skoro dijagonalnim matricama, ima specijalnu strukturu.

Neka vrijedi: $\quad A = A^* \;$ i $\; a_{11} \geq a_{22} \geq \cdots \geq a_{nn}$,

$$B = B^* \;\text{ i }\; B \succ O, \, \mathrm{diag}(B) = I_n.$$

Neka za vlastite vrijednosti para (A, B) vrijedi

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{s_1} > \lambda_{s_1+1} = \cdots = \lambda_{s_2} > \cdots > \lambda_{s_{p-1}+1} = \cdots = \lambda_{s_p},$$

pri čemu je $s_p = n$. Tada je

$$n_i = s_i - s_{i-1}, \qquad 1 \leq i \leq p \quad (s_0 = 0),$$

multiplicitet vlastite vrijednosti λ_{s_i}. Neka je $\mu = \max\{|\lambda_{s_1}|\,, \, |\lambda_{s_p}|\}$.

Višestruke vlastite vrijednosti

U rezultatu se koristi minimalna udaljenost (minimalni apsolutni razmak) između različitih vlastitih vrijednosti.

Višestruke vlastite vrijednosti

U rezultatu se koristi minimalna udaljenost (minimalni apsolutni razmak) između različitih vlastitih vrijednosti.

Neka je δ_r apsolutni razmak (separacija) vlastite vrijednosti λ_{s_r} od ostalih vlastitih vrijednosti,

$$3\delta_r = \min_{\substack{1 \le t \le p \\ t \ne r}} |\, \lambda_{s_r} - \lambda_{s_t} \,|, \quad 1 \le r \le p.$$

Višestruke vlastite vrijednosti

U rezultatu se koristi minimalna udaljenost (minimalni apsolutni razmak) između različitih vlastitih vrijednosti.

Neka je δ_r apsolutni razmak (separacija) vlastite vrijednosti λ_{s_r} od ostalih vlastitih vrijednosti,

$$3\delta_r = \min_{\substack{1 \leq t \leq p \\ t \neq r}} |\, \lambda_{s_r} - \lambda_{s_t} \,|, \quad 1 \leq r \leq p.$$

Tada je

$$\delta = \min_{1 \leq r \leq p} \delta_r$$

minimalni apsolutni razmak u spektru $\sigma(A, B)$.

Višestruke vlastite vrijednosti

Promotrimo sada matričnu blok-particiju (blok matrice)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pp} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p1} & \cdots & B_{pp} \end{bmatrix},$$

gdje su blokovi A_{rt}, B_{rt} tipa $n_r \times n_t$.

Višestruke vlastite vrijednosti

Promotrimo sada matričnu blok-particiju (blok matrice)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pp} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p1} & \cdots & B_{pp} \end{bmatrix},$$

gdje su blokovi A_{rt}, B_{rt} tipa $n_r \times n_t$.

Za kvadratnu matricu $X = (X_{rt})$ koja nosi particiju kao gore, neka je

$$\tau(X) = \|X - \mathrm{diag}(X_{11}, \ldots, X_{pp})\|_F.$$

Za naš pozitivno definitni par matrica (A, B), neka je

$$\tau(A, B) = \left[\tau^2(A) + \tau^2(B)\right]^{1/2}$$

Teorem (Hari 91)

Neka je $D_r + E_r = A - \lambda_{s_r} B, \quad diag(E_r) = 0,\ 1 \leq r \leq p.$ *Ako je*

$$\|E_r\|_2 < \delta_r, \quad 1 \leq r \leq p,$$

tada je

(i) $$\|A_{rr} - \lambda_{s_r} B_{rr}\|_F \leq \frac{1}{\delta_r} \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq r}}^{p} \|A_{rt} - \lambda_{s_r} B_{rt}\|_F^2, \quad 1 \leq r \leq p$$

Višestruke vlastite vrijednosti

Teorem (Hari 91)

Neka je $D_r + E_r = A - \lambda_{s_r} B, \quad diag(E_r) = 0,\ 1 \le r \le p.$ *Ako je*

$$\|E_r\|_2 < \delta_r, \quad 1 \le r \le p,$$

tada je

(i) $$\|A_{rr} - \lambda_{s_r} B_{rr}\|_F \le \frac{1}{\delta_r} \sum_{\substack{t=1 \\ t \ne r}}^{p} \|A_{rt} - \lambda_{s_r} B_{rt}\|_F^2, \quad 1 \le r \le p$$

(ii) $$\sum_{s=1}^{n} \left| \frac{a_{ss}}{b_{ss}} - \lambda_s \right|^2 \le \sum_{r=1}^{p} \|A_{rr} - \lambda_{s_r} B_{rr}\|_F^2 \le \left[\frac{(1+\mu^2)\tau^2(A,B)}{\delta} \right]^2.$$

Višestruke vlastite vrijednosti

Vratimo se HZ metodi. Neka je par (A, B) dobiven metodom uoči k-tog koraka.

Višestruke vlastite vrijednosti

Vratimo se HZ metodi. Neka je par (A, B) dobiven metodom uoči k-tog koraka. Neka je k dovoljno veliki tako da zadnji teorem vrijedi za par (A, B).

Višestruke vlastite vrijednosti

Vratimo se HZ metodi. Neka je par (A, B) dobiven metodom uoči k-tog koraka. Neka je k dovoljno veliki tako da zadnji teorem vrijedi za par (A, B). Neka je $\tau = \tau(A, B)$, $\epsilon = S(A, B)$.

Višestruke vlastite vrijednosti

Vratimo se HZ metodi. Neka je par (A, B) dobiven metodom uoči k-tog koraka. Neka je k dovoljno veliki tako da zadnji teorem vrijedi za par (A, B). Neka je $\tau = \tau(A, B)$, $\epsilon = S(A, B)$. Uočimo da je $\tau \leq \epsilon$.

Višestruke vlastite vrijednosti

Vratimo se HZ metodi. Neka je par (A, B) dobiven metodom uoči k-tog koraka. Neka je k dovoljno veliki tako da zadnji teorem vrijedi za par (A, B). Neka je $\tau = \tau(A, B)$, $\epsilon = S(A, B)$. Uočimo da je $\tau \leq \epsilon$.
Tada teorem implicira

$$A_{rr} = \lambda_{s_r} B_{rr} + F_{rr}, \qquad \|F_r\|_F = \mathcal{O}(\tau^2), \quad 1 \leq r \leq p.$$

Višestruke vlastite vrijednosti

Vratimo se HZ metodi. Neka je par (A, B) dobiven metodom uoči k-tog koraka. Neka je k dovoljno veliki tako da zadnji teorem vrijedi za par (A, B). Neka je $\tau = \tau(A, B)$, $\epsilon = S(A, B)$. Uočimo da je $\tau \leq \epsilon$.
Tada teorem implicira

$$A_{rr} = \lambda_{s_r} B_{rr} + F_{rr}, \qquad \|F_r\|_F = \mathcal{O}(\tau^2), \quad 1 \leq r \leq p.$$

Ako pivotni elementi a_{ij} i b_{ij} leže unutar dijagonalnih blokova A_{rr} i B_{rr}, tada ćemo imati:

Višestruke vlastite vrijednosti

Vratimo se HZ metodi. Neka je par (A, B) dobiven metodom uoči k-tog koraka. Neka je k dovoljno veliki tako da zadnji teorem vrijedi za par (A, B). Neka je $\tau = \tau(A, B)$, $\epsilon = S(A, B)$. Uočimo da je $\tau \leq \epsilon$.
Tada teorem implicira

$$A_{rr} = \lambda_{s_r} B_{rr} + F_{rr}, \qquad \|F_r\|_F = \mathcal{O}(\tau^2), \quad 1 \leq r \leq p.$$

Ako pivotni elementi a_{ij} i b_{ij} leže unutar dijagonalnih blokova A_{rr} i B_{rr}, tada ćemo imati:

- Jako kraćenje u brojniku i nazivniku kada se računa

$$\tan(2\theta) = \frac{2a_{ij} - (a_{ii} + a_{jj})\, b_{ij}}{\sqrt{1 - (b_{ij})^2}\,(a_{ii} - a_{jj})} = \frac{\mathcal{O}(\tau^2)}{\mathcal{O}(\tau^2)}$$

Višestruke vlastite vrijednosti

Vratimo se HZ metodi. Neka je par (A, B) dobiven metodom uoči k-tog koraka. Neka je k dovoljno veliki tako da zadnji teorem vrijedi za par (A, B). Neka je $\tau = \tau(A, B)$, $\epsilon = S(A, B)$. Uočimo da je $\tau \leq \epsilon$. Tada teorem implicira

$$A_{rr} = \lambda_{s_r} B_{rr} + F_{rr}, \qquad \|F_r\|_F = \mathcal{O}(\tau^2), \quad 1 \leq r \leq p.$$

Ako pivotni elementi a_{ij} i b_{ij} leže unutar dijagonalnih blokova A_{rr} i B_{rr}, tada ćemo imati:

- Jako kraćenje u brojniku i nazivniku kada se računa

$$\tan(2\theta) = \frac{2a_{ij} - (a_{ii} + a_{jj})\, b_{ij}}{\sqrt{1 - (b_{ij})^2}\,(a_{ii} - a_{jj})} = \frac{\mathcal{O}(\tau^2)}{\mathcal{O}(\tau^2)}$$

- Vjerojatno veliki θ iako su ϵ i τ vrlo mali.

Višestruke vlastite vrijednosti

Vratimo se HZ metodi. Neka je par (A, B) dobiven metodom uoči k-tog koraka. Neka je k dovoljno veliki tako da zadnji teorem vrijedi za par (A, B). Neka je $\tau = \tau(A, B)$, $\epsilon = S(A, B)$. Uočimo da je $\tau \leq \epsilon$. Tada teorem implicira

$$A_{rr} = \lambda_{s_r} B_{rr} + F_{rr}, \qquad \|F_r\|_F = \mathcal{O}(\tau^2), \quad 1 \leq r \leq p.$$

Ako pivotni elementi a_{ij} i b_{ij} leže unutar dijagonalnih blokova A_{rr} i B_{rr}, tada ćemo imati:

- Jako kraćenje u brojniku i nazivniku kada se računa

$$\tan(2\theta) = \frac{2a_{ij} - (a_{ii} + a_{jj})\, b_{ij}}{\sqrt{1 - (b_{ij})^2}\,(a_{ii} - a_{jj})} = \frac{\mathcal{O}(\tau^2)}{\mathcal{O}(\tau^2)}$$

- Vjerojatno veliki θ iako su ϵ i τ vrlo mali.

To utječe na asimptotičku konvergenciju i točnost metode.

Višestruke vlastite vrijednosti: rezultati

$$N = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad M = N - \sum_{r=1}^{p} \frac{n_r(n_r-1)}{2}, \qquad n_{max} = \max_{1\le r\le p} n_r$$

Neka ϵ_N i τ_N označavaju ϵ i τ za par $(A^{(N)}, B^{(N)})$ koji je dobiven primjenom serijalne HZ metode na par (A, B) nakon jednog ciklusa. Ako za polazni par (A, B) vrijedi $n \ge 3$, $p \ge 2$,

$$S(B) < \frac{1}{n(n-1)}, \quad \sqrt{1+\mu^2}\epsilon < \min\left\{\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{\delta}{\mu+1}}\right\}\delta,$$

tada je

- $\tau_N \le \dfrac{3}{2}\sqrt{2.31^M \cdot n_{max}(1+\mu^2)}\,\dfrac{\epsilon}{\delta}\tau$
- $\tau_N \le \dfrac{3}{2}\sqrt{n_{max}(1+\mu^2)}\,\dfrac{\epsilon^2}{\delta}$
- if $n_{max} = 2$ then $\epsilon_N \le \dfrac{18}{17}\sqrt{1+\mu^2}\dfrac{\epsilon^2}{\delta}$.

Stabilnost i visoka relativna točnost HZ i CJ metode

- Zanima nas koliko su točne metode: HZ, $LL^T J$ i $RR^T J$.

Stabilnost i visoka relativna točnost HZ i CJ metode

- Zanima nas koliko su točne metode: HZ, $LL^T J$ i $RR^T J$.
- Za to je potrebna detaljna analiza grešaka zaokruživanja. J. Matejaš i V. Hari su ju napravili za HZ metodu, ali članak još nije završen.

Stabilnost i visoka relativna točnost HZ i CJ metode

- Zanima nas koliko su točne metode: HZ, $LL^T J$ i $RR^T J$.
- Za to je potrebna detaljna analiza grešaka zaokruživanja. J. Matejaš i V. Hari su ju napravili za HZ metodu, ali članak još nije završen.
- Kako je za prikaz tog istraživanja potreban posebni seminar, ovdje ćemo samo prikazati rezultate numeričkih ispitivanja.

Stabilnost i visoka relativna točnost HZ i CJ metode

- Zanima nas koliko su točne metode: HZ, LL^TJ i RR^TJ.
- Za to je potrebna detaljna analiza grešaka zaokruživanja. J. Matejaš i V. Hari su ju napravili za HZ metodu, ali članak još nije završen.
- Kako je za prikaz tog istraživanja potreban posebni seminar, ovdje ćemo samo prikazati rezultate numeričkih ispitivanja.
- Stoga ćemo prvo prikazati algoritme, zatim teorijsku podlogu za testiranje i onda same rezultate testiranja.

Stabilnost i visoka relativna točnost HZ i CJ metode

- Zanima nas koliko su točne metode: HZ, $LL^T J$ i $RR^T J$.
- Za to je potrebna detaljna analiza grešaka zaokruživanja. J. Matejaš i V. Hari su ju napravili za HZ metodu, ali članak još nije završen.
- Kako je za prikaz tog istraživanja potreban posebni seminar, ovdje ćemo samo prikazati rezultate numeričkih ispitivanja.
- Stoga ćemo prvo prikazati algoritme, zatim teorijsku podlogu za testiranje i onda same rezultate testiranja.
- Visoku relativnu točnost metoda možemo očekivati tek za dobro ponašajuće polazne parove (A, B).

Stabilnost i visoka relativna točnost HZ i CJ metode

- Zanima nas koliko su točne metode: HZ, $LL^T J$ i $RR^T J$.
- Za to je potrebna detaljna analiza grešaka zaokruživanja. J. Matejaš i V. Hari su ju napravili za HZ metodu, ali članak još nije završen.
- Kako je za prikaz tog istraživanja potreban posebni seminar, ovdje ćemo samo prikazati rezultate numeričkih ispitivanja.
- Stoga ćemo prvo prikazati algoritme, zatim teorijsku podlogu za testiranje i onda same rezultate testiranja.
- Visoku relativnu točnost metoda možemo očekivati tek za dobro ponašajuće polazne parove (A, B).
- Primjer takvih parova su parovi pozitivno definitnih matrica koje se mogu dobro simetrično skalirati. Dakle parovi za koje su uvjetovanosti $\kappa_2(\Delta_A A \Delta_A)$ i $\kappa_2(\Delta_B B \Delta_B)$ male za neke dijagonalne matrice Δ_A i Δ_B.

Algoritam HZ

```
select the pivot pair (i,j)
if a_ij ≠ 0 or b_ij ≠ 0 then
```

$$\rho = 0.5\,(\sqrt{1+b_{ij}} + \sqrt{1-b_{ij}}); \quad \xi = b_{ij}/(2\rho);$$

$$\tau = \sqrt{(1+b_{ij})(1-b_{ij})}; \quad t2 = 2a_{ij} - (a_{ii}+a_{jj})b_{ij};$$

if $t2 = 0$ then $t = 0$;

else

$$ct2 = \tau\,(a_{ii} - a_{jj})/t2;$$

$$t = \mathtt{sign}(ct2)/(\mathtt{abs}(ct2) + (1 + \sqrt{1+ct2^2});$$

end

$$cs = 1/\sqrt{1+t^2}; \quad sn = t/\sqrt{1+t^2};$$

$$c1 = (\rho\cdot cs - \xi\cdot sn)/\tau; \quad s1 = (\rho\cdot sn + \xi\cdot cs)/\tau;$$

$$c2 = (\rho\cdot cs + \xi\cdot sn)/\tau; \quad s2 = (\rho\cdot sn - \xi\cdot cs)/\tau;$$

$$\delta_i = (b_{ij}/\tau - s1)(b_{ij}/\tau + s1)a_{ii} + (2c1\,a_{ij} + s2\,a_{jj})\,s2;$$

$$\delta_j = (s2 - b_{ij}/\tau)(s2 + b_{ij}/\tau)\,a_{jj} + (2c2\,a_{ij} - s1\,a_{ii})\,s1;$$

$$a'_{ij} = (c1\,c2 - s1\,s2)a_{ij} + (c2\,s2\,a_{jj} - c1\,s1\,a_{ii}); \quad a'_{ji} = a'_{ij};$$

$$b'_{ij} = 0; \quad b'_{ji} = b'_{ij}; \quad a'_{ii} = a_{ii} + \delta_i; \quad a'_{jj} = a_{jj} - \delta_j;$$

for $k = 1,\ldots,n,\ k \neq i,j$ do

$$a'_{ki} = c1\cdot a_{ki} + s2\cdot a_{kj}; \quad b'_{ki} = c1\cdot b_{ki} + s2\cdot b_{kj}; \quad a'_{ik} = a'_{ki}; \quad b'_{ik} = b'_{ki};$$

$$a'_{kj} = c2\cdot a_{kj} - s1\cdot a_{ki}; \quad b'_{kj} = c2\cdot b_{kj} - s1\cdot b_{ki}; \quad a'_{jk} = a'_{kj}; \quad b'_{jk} = b'_{kj};$$

endfor

endif

Algoritam $LL^T J$

select the pivot pair (i, j)
if $a_{ij} \neq 0$ or $b_{ij} \neq 0$ then
$\quad \beta = b_{ij}$, $\tau = \mathtt{sqrt}((1+\beta)(1-\beta))$; $\quad \alpha = a_{ij} - \beta a_{ii}$;
$\qquad$ if $\alpha = 0$ then $t = 0$;
$\qquad$ else $ct2 = (0.5\,(a_{ii} - a_{jj}) + \alpha\beta)/(\alpha\,\tau)$;
$\qquad\qquad t = \mathtt{sign}(ct2)/(\mathtt{abs}(ct2) + \mathtt{sqrt}(1 + ct2^2))$;
$\qquad$ endif
$\qquad cs = 1/\mathtt{sqrt}(1+t^2)$; $\quad sn = t/\mathtt{sqrt}(1+t^2)$;
$\qquad c1 = cs - sn\,\beta/\tau$; $\quad s1 = sn + cs\,\beta/\tau$; $\quad c2 = cs/\tau$; $\quad s2 = sn/\tau$;
$\qquad \delta_i = t\alpha/\tau$; $\quad \delta_j = (\,t\alpha + (\beta/\tau)\cdot(2a_{ij} - (a_{ii} + a_{jj})\beta)\,)/\tau$;
$\qquad a'_{ij} = (c1\,c2 - s1\,s2)\,a_{ij} + (c2\,s2\,a_{jj} - c1\,s1\,a_{ii})$; $\quad a'_{ji} = a'_{ij}$;
$\qquad b'_{ij} = (c1\,c2 - s1\,s2)\,\beta + (c2\,s2 - c1\,s1)$; $\quad b'_{ji} = b'_{ij}$;
$\qquad a'_{ii} = a_{ii} + \delta_i$; $\quad a'_{j} = a_{jj} - \delta_j$;
$\qquad$ for $k = 1, \ldots, n,\ k \neq i, j$ do
$\qquad\quad a'_{ki} = c1 \cdot a_{ki} + s2 \cdot a_{kj}$; $\quad b'_{ki} = c1 \cdot b_{ki} + s2 \cdot b_{kj}$; $\quad a'_{ik} = a'_{ki}$; $\quad b'_{ik} = b'_{ki}$
$\qquad\quad a'_{kj} = c2 \cdot a_{kj} - s1 \cdot a_{ki}$; $\quad b'_{kj} = c2 \cdot b_{kj} - s1 \cdot b_{ki}$; $\quad a'_{jk} = a'_{kj}$; $\quad b'_{jk} = b'_{kj}$;
$\qquad$ endfor
endif

Algoritam RR^TJ

```
select the pivot pair (i, j)
if a_ij ≠ 0 or b_ij ≠ 0 then
```

$$
\begin{array}{l}
\texttt{select the pivot pair } (i,j) \\
\texttt{if } \; a_{ij} \neq 0 \; \texttt{or} \; b_{ij} \neq 0 \; \texttt{then} \\
\quad \beta = b_{ij}\,, \;\; \tau = \texttt{sqrt}((1+\beta)(1-\beta)); \quad \alpha = a_{ij} - \beta a_{jj}\,; \\
\quad \texttt{if} \;\; \alpha = 0 \quad \texttt{then} \quad t = 0; \\
\quad \texttt{else} \quad ct2 = (0.5\,(a_{ii} - a_{jj}) - \alpha\beta)/(\alpha\,\tau); \\
\qquad\qquad\quad t = \texttt{sign}(ct2)/(\texttt{abs}(ct2) + \texttt{sqrt}(1 + ct2^2)); \\
\quad \texttt{endif} \\
\quad cs = 1/\texttt{sqrt}(1+t^2); \quad sn = t/\texttt{sqrt}(1+t^2); \\
\quad c1 = cs/\tau\,; \quad s1 = sn/\tau\,; \quad c2 = cs + sn\,\beta/\tau\,; \quad s2 = sn - cs\,\beta/\tau\,; \\
\quad \delta_j = t\alpha/\tau\,; \quad \delta_i = (\,t\alpha - (\beta/\tau)\cdot(2a_{ij} - (a_{ii} + a_{jj})\beta)\,)/\tau\,; \\
\quad a'_{ij} = (c1\,c2 - s1\,s2)\,a_{ij} + (c2\,s2\,a_{jj} - c1\,s1\,a_{ii}); \quad a'_{ji} = a'_{ij}\,; \\
\quad b'_{ij} = (c1\,c2 - s1\,s2)\,\beta + (c2\,s2 - c1\,s1); \quad b'_{ji} = b'_{ij}\,; \\
\quad a'_{ii} = a_{ii} + \delta_i\,; \quad a'_{j} = a_{jj} - \delta_j\,; \\
\quad \texttt{for} \;\; k = 1, \ldots, n, \; k \neq i, j \quad \texttt{do} \\
\qquad a'_{ki} = c1 \cdot a_{ki} + s2 \cdot a_{kj}; \quad b'_{ki} = c1 \cdot b_{ki} + s2 \cdot b_{kj}; \quad a'_{ik} = a'_{ki}; \quad b'_{ik} = b'_{ki} \\
\qquad a'_{kj} = c2 \cdot a_{kj} - s1 \cdot a_{ki}; \quad b'_{kj} = c2 \cdot b_{kj} - s1 \cdot b_{ki}; \quad a'_{jk} = a'_{kj}; \quad b'_{jk} = b'_{kj}\,; \\
\quad \texttt{endfor} \\
\texttt{endif}
\end{array}
$$

Teorem (Theorem 3.2, Drmač 1998)

Neka su $A = A^T \succ O$, $B = B^T \succ O$ *i* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ *su vl. vrij. para* (A, B).
Neka su $A_S = D_A^{-1/2} A D_A^{-1/2}$, $B_S = D_B^{-1/2} B D_B^{-1/2}$, $D_A = diag(A)$, $D_B = diag(B)$.
Neka su δA *i* δB *simetrične perturbacije za koje vrijedi*

$$\|(\delta A)_S\|_2 \|A_S^{-1}\|_2 < 1 \quad \text{and} \quad \|(\delta B)_S\|_2 \|B_S^{-1}\|_2 < 1,$$

pri čemu su $(\delta A)_S = D_A^{-1/2} \delta A D_A^{-1/2}$, $(\delta B)_S = D_B^{-1/2} \delta B D_B^{-1/2}$.
Ako su $\tilde{\lambda}_1 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq \cdots \geq \tilde{\lambda}_n$ *vl. vrij. para* $(A + \delta A, B + \delta B)$, *tada je*

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i|}{\lambda_i} \leq \frac{\|(\delta A)_S\|_2 \|A_S^{-1}\|_2 + \|(\delta B)_S\|_2 \|B_S^{-1}\|_2}{1 - \|(\delta B)_S\|_2 \|B_S^{-1}\|_2} = \frac{\varepsilon_{A_S} \kappa_2(A_S) + \varepsilon_{B_S} \kappa_2(B_S)}{1 - \varepsilon_{B_S} \kappa_2(B_S)},$$

gdje su $\varepsilon_{A_S} = \|(\delta A)_S\|_2 / \|A_S\|_2$, $\varepsilon_{B_S} = \|(\delta B)_S\|_2 / \|B_S\|_2$ *dok je* $\kappa_2(X)$ *spektralna uvjetovanost od* X.

Teorijska podloga

- Za sve promatrane metode polazna matrica $B^{(0)}$ je upravo B_S. Stoga

$$\max_{1\le i\le n} \frac{|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i|}{\lambda_i} \le \frac{\varepsilon_{A_S}\kappa_2(A_S) + \varepsilon_{B^{(0)}}\kappa_2(B_S)}{1 - \varepsilon_{B_S}\kappa_2(B^{(0)})},$$

Teorijska podloga

- Za sve promatrane metode polazna matrica $B^{(0)}$ je upravo B_S. Stoga

$$\max_{1\le i\le n} \frac{|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i|}{\lambda_i} \le \frac{\varepsilon_{A_S}\kappa_2(A_S) + \varepsilon_{B^{(0)}}\kappa_2(B_S)}{1 - \varepsilon_{B_S}\kappa_2(B^{(0)})},$$

- Polazna redukcija $B \mapsto B_S = B^{(0)}$, osim što simplificira algoritam, ima i stabilizirajući efekt na iterativni proces, jer gotovo optimalno reducira uvjetovanost polazne matrice $B^{(0)}$ kao i svih kasnijih matrica $B^{(k)}$.

  Van der Sluis, A.: Condition numbers and equilibration of matrices. Numer. Math. 14 (1), 14–23 (1969)

Teorijska podloga

- Za sve promatrane metode polazna matrica $B^{(0)}$ je upravo B_S. Stoga

$$\max_{1\leq i\leq n} \frac{|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i|}{\lambda_i} \leq \frac{\varepsilon_{A_S}\kappa_2(A_S) + \varepsilon_{B^{(0)}}\kappa_2(B_S)}{1 - \varepsilon_{B_S}\kappa_2(B^{(0)})},$$

- Polazna redukcija $B \mapsto B_S = B^{(0)}$, osim što simplificira algoritam, ima i stabilizirajući efekt na iterativni proces, jer gotovo optimalno reducira uvjetovanost polazne matrice $B^{(0)}$ kao i svih kasnijih matrica $B^{(k)}$.

  Van der Sluis, A.: Condition numbers and equilibration of matrices. Numer. Math. 14 (1), 14–23 (1969)

- Za ovakve polazne dobro ponašajuće parove, moramo otkriti koje metode generiraju na svakom koraku male relativne greške $\varepsilon_{A_S^{(k)}}$ i $\varepsilon_{B_S^{(k)}}$ i u isto vrijeme male ili umjerene $\kappa_2(A_S^{(k)})$ i $\kappa_2(B^{(k)})$.

Teorijska podloga

- Za sve promatrane metode polazna matrica $B^{(0)}$ je upravo B_S. Stoga

$$\max_{1\leq i\leq n} \frac{|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i|}{\lambda_i} \leq \frac{\varepsilon_{A_S}\kappa_2(A_S) + \varepsilon_{B^{(0)}}\kappa_2(B_S)}{1 - \varepsilon_{B_S}\kappa_2(B^{(0)})},$$

- Polazna redukcija $B \mapsto B_S = B^{(0)}$, osim što simplificira algoritam, ima i stabilizirajući efekt na iterativni proces, jer gotovo optimalno reducira uvjetovanost polazne matrice $B^{(0)}$ kao i svih kasnijih matrica $B^{(k)}$.

  Van der Sluis, A.: Condition numbers and equilibration of matrices. Numer. Math. 14 (1), 14–23 (1969)

- Za ovakve polazne dobro ponašajuće parove, moramo otkriti koje metode generiraju na svakom koraku male relativne greške $\varepsilon_{A_S^{(k)}}$ i $\varepsilon_{B_S^{(k)}}$ i u isto vrijeme male ili umjerene $\kappa_2(A_S^{(k)})$ i $\kappa_2(B^{(k)})$.

No, to je zahtjevno istraživanje, pa ćemo krenuti prečacem.

Kako prepoznali je li metoda visoko relativno točna?

Kako prepoznali je li metoda visoko relativno točna?

Možemo numerički ispitati da li nejednakost

$$\varrho_{(A,B)} = \max_{1 \le i \le n} \frac{|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i|}{\lambda_i} / \sqrt{\kappa_2^2(A_S^{(0)}) + \kappa_2^2(B^{(0)})} \le f(n)\mathbf{u}, \tag{5}$$

vrijedi za veći uzorak Υ polaznih dobro ponašajućih parova (A, B)!

Kako prepoznali je li metoda visoko relativno točna?

Možemo numerički ispitati da li nejednakost

$$\varrho_{(A,B)} = \max_{1\leq i\leq n} \frac{|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i|}{\lambda_i} / \sqrt{\kappa_2^2(A_S^{(0)}) + \kappa_2^2(B^{(0)})} \leq f(n)\mathbf{u}, \qquad (5)$$

vrijedi za veći uzorak Υ polaznih dobro ponašajućih parova (A, B)!

$\tilde{\lambda}_i$, $1 \leq i \leq n$ su izračunate vlastite vrijednosti polaznog para $(A^{(0)}, B^{(0)})$,

Kako prepoznali je li metoda visoko relativno točna?

Možemo numerički ispitati da li nejednakost

$$\varrho_{(A,B)} = \max_{1 \le i \le n} \frac{|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i|}{\lambda_i} / \sqrt{\kappa_2^2(A_S^{(0)}) + \kappa_2^2(B^{(0)})} \le f(n)\mathbf{u}, \qquad (5)$$

vrijedi za veći uzorak Υ polaznih dobro ponašajućih parova (A, B)!

$\tilde{\lambda}_i$, $1 \le i \le n$ su izračunate vlastite vrijednosti polaznog para $(A^{(0)}, B^{(0)})$,
$f(n)$ je slabo rastuća funkcija od n, a

Kako prepoznali je li metoda visoko relativno točna?

Možemo numerički ispitati da li nejednakost

$$\varrho_{(A,B)} = \max_{1\leq i\leq n} \frac{|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i|}{\lambda_i} \Big/ \sqrt{\kappa_2^2(A_S^{(0)}) + \kappa_2^2(B^{(0)})} \leq f(n)\mathbf{u}, \tag{5}$$

vrijedi za veći uzorak Υ polaznih dobro ponašajućih parova (A, B)!

$\tilde{\lambda}_i$, $1 \leq i \leq n$ su izračunate vlastite vrijednosti polaznog para $(A^{(0)}, B^{(0)})$,
$f(n)$ je slabo rastuća funkcija od n, a
$\mathbf{u}$ je stojna točnost.

Kako prepoznali je li metoda visoko relativno točna?

Možemo numerički ispitati da li nejednakost

$$\varrho_{(A,B)} = \max_{1 \le i \le n} \frac{|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i|}{\lambda_i} / \sqrt{\kappa_2^2(A_S^{(0)}) + \kappa_2^2(B^{(0)})} \le f(n)\mathbf{u}, \qquad (5)$$

vrijedi za veći uzorak Υ polaznih dobro ponašajućih parova (A, B)!

- $\tilde{\lambda}_i$, $1 \le i \le n$ su izračunate vlastite vrijednosti polaznog para $(A^{(0)}, B^{(0)})$,
- $f(n)$ je slabo rastuća funkcija od n, a
- $\mathbf{u}$ je stojna točnost.

Relacija (5) bi trebala vrijediti bez obzira na to kolika je uvjetovanost $\kappa_2(A^{(0)})$.
Stoga nas zanima kako se $\varrho_{(A,B)}$ ponaša s obzirom na $\chi_{(A,B)}$,

$$\chi_{(A,B)} := \kappa_2(A^{(0)}, B^{(0)}) = \sqrt{\kappa_2^2(A^{(0)}) + \kappa_2^2(B^{(0)})}.$$

Kako prepoznali je li metoda visoko relativno točna?

- Za dani uzorak parova Υ, i za svaku metodu, napravit ćemo njen graf relativnih grešaka $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E} = \{(\chi_{(A,B)}\ ,\ \varrho_{(A,B)})\ :\ (A,B) \in \Upsilon\}.$$

Kako prepoznali je li metoda visoko relativno točna?

- Za dani uzorak parova Υ, i za svaku metodu, napravit ćemo njen graf relativnih grešaka $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E} = \{(\chi_{(A,B)}\ ,\ \varrho_{(A,B)}) \ :\ (A,B) \in \Upsilon\}.$$

- Zatim ćemo prikazati graf $\mathcal{E}$ koristeći M-funkciju `scatter(x,y,3)`.

Kako prepoznali je li metoda visoko relativno točna?

- Za dani uzorak parova Υ, i za svaku metodu, napravit ćemo njen graf relativnih grešaka $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E} = \{(\chi_{(A,B)}\ ,\ \varrho_{(A,B)})\ :\ (A,B) \in \Upsilon\}.$$

- Zatim ćemo prikazati graf $\mathcal{E}$ koristeći M-funkciju `scatter(x,y,3)`.
- Metoda će se smatrati visoko relativno točnom ako ordinate točaka na grafu budu reda veličine strojne točnosti, $\mathbf{u} \approx 2.2 \cdot 10^{-16}$.

Kako generirati matrične parove?

Polazni par $(A^{(0)}, B^{(0)})$ generiramo pomoću

- 4 dijagonalne matrice : Δ_A, Δ_B, Σ, Δ i
- 2 orthogonalne matrice U, V reda n.

Kako generirati matrične parove?

Polazni par $(A^{(0)}, B^{(0)})$ generiramo pomoću

- 4 dijagonalne matrice : Δ_A, Δ_B, Σ, Δ i
- 2 orthogonalne matrice U, V reda n.

Dva su koraka:

1: $F = U\Sigma V^T, \quad A = F^T \Delta_A F, \quad B = F^T \Delta_B F,$

2: $B^{(0)} = B_S = D_B^{-1/2} B D_B^{-1/2}, \quad A^{(0)} = \Delta A_S \Delta,\ A_S = D_A^{-1/2} A D_A^{-1/2},$

gdje su D_A i D_B dijagonalni dijelovi od A i B.

Kako generirati matrične parove?

Polazni par $(A^{(0)}, B^{(0)})$ generiramo pomoću

- 4 dijagonalne matrice : Δ_A, Δ_B, Σ, Δ i
- 2 orthogonalne matrice U, V reda n.

Dva su koraka:

1: $F = U\Sigma V^T, \quad A = F^T\Delta_A F, \quad B = F^T\Delta_B F,$

2: $B^{(0)} = B_S = D_B^{-1/2} B D_B^{-1/2}, \quad A^{(0)} = \Delta A_S \Delta,\ A_S = D_A^{-1/2} A D_A^{-1/2},$

gdje su D_A i D_B dijagonalni dijelovi od A i B. Pritom se $\kappa_2(A_S^{(0)})$ i $\kappa_2(B^{(0)})$ mogu kontrolirati pomoću dijagonalnih elemenata od Δ_A, Δ_B, Σ,

$$\kappa_2(A_S^{(0)}) \leq n\kappa_2^2(\Sigma)\kappa_2(\Delta_A) \quad \text{and} \quad \kappa_2(B^{(0)}) \leq n\kappa_2^2(\Sigma)\kappa_2(\Delta_B)$$

iako su najčešće $\kappa_2(A_S^{(0)})$ i $\kappa_2(B^{(0)})$ mnogo manji od tih ograda.

Kako generirati matrične parove?

Da bi pojednostavili konstrukciju, stavljamo $\Delta_B = I_n$.

Ako metoda ima visoku relativnu točnost, tada $\varrho_{(A,B)}$ iz relacije (5) ne smije ovisiti o $\kappa_2(\Delta)$.

Kako generirati matrične parove?

Da bi pojednostavili konstrukciju, stavljamo $\Delta_B = I_n$.

Ako metoda ima visoku relativnu točnost, tada $\varrho_{(A,B)}$ iz relacije (5) ne smije ovisiti o $\kappa_2(\Delta)$.

Uočimo da vrijedi

$$\kappa_2(A^{(0)}) \leq \kappa_2(A_S^{(0)})\kappa_2^2(\Delta).$$

Kako generirati matrične parove?

Da bi pojednostavili konstrukciju, stavljamo $\Delta_B = I_n$.

Ako metoda ima visoku relativnu točnost, tada $\varrho_{(A,B)}$ iz relacije (5) ne smije ovisiti o $\kappa_2(\Delta)$.

Uočimo da vrijedi

$$\kappa_2(A^{(0)}) \leq \kappa_2(A_S^{(0)})\kappa_2^2(\Delta).$$

Ako stavimo $\Delta = I_n$ i $(A^{(0)}, B^{(0)}) = (D_B^{-1/2} A D_B^{-1/2}, B_S)$, tada znamo vlastite vrijednosti od $(A^{(0)}, B^{(0)})$ unaprijed. To su kvocijenti

$$(\Delta_A)_{jj}/(\Delta_B)_{jj}, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Ovaj način se može koristiti kada razmatramo parove sa višestrukim vlastitim vrijednostima.

Još par detalja

- Dijagonalne matrice se konstruiraju pomoću M-funkcije `diag(d)`

Još par detalja

- Dijagonalne matrice se konstruiraju pomoću M-funkcije `diag(d)`
- `d` je vektor, a vektori se konstruiraju pomoću M-funkcije `logspace(x1,x2,n)`. Koristimo ju za dijagonalne matrice Σ i Δ_A.

Još par detalja

- Dijagonalne matrice se konstruiraju pomoću M-funkcije `diag(d)`

- `d` je vektor, a vektori se konstruiraju pomoću M-funkcije `logspace(x1,x2,n)`. Koristimo ju za dijagonalne matrice Σ i Δ_A.

- Za konstrukciju Δ koristimo svoju m-funkciju `scalvec(k1,k2,k3,n,k)` koja generira vektor duljine n, $d = [10^{\mathrm{k1}}, \ldots, 10^{\mathrm{k2}}, \ldots, 10^{\mathrm{k3}}]$ pri čemu `k` određuje poziciju od 10^{k2} između komponenata od d.

Još par detalja

- Dijagonalne matrice se konstruiraju pomoću M-funkcije `diag(d)`

- `d` je vektor, a vektori se konstruiraju pomoću M-funkcije `logspace(x1,x2,n)`. Koristimo ju za dijagonalne matrice Σ i Δ_A.

- Za konstrukciju Δ koristimo svoju m-funkciju `scalvec(k1,k2,k3,n,k)` koja generira vektor duljine n, $d = [10^{\mathrm{k1}}, \ldots, 10^{\mathrm{k2}}, \ldots, 10^{\mathrm{k3}}]$ pri čemu `k` određuje poziciju od 10^{k2} između komponenata od d.

- Za računanje Δ, funkcija `scalvec` se koristi unutar trostruke petlje kontrolirane indeksima `k1`, `k2` and `k3`

Još par detalja

- Dijagonalne matrice se konstruiraju pomoću M-funkcije `diag(d)`
- `d` je vektor, a vektori se konstruiraju pomoću M-funkcije `logspace(x1,x2,n)`. Koristimo ju za dijagonalne matrice Σ i Δ_A.
- Za konstrukciju Δ koristimo svoju m-funkciju `scalvec(k1,k2,k3,n,k)` koja generira vektor duljine n, $d = [10^{\mathtt{k1}}, \dots, 10^{\mathtt{k2}}, \dots, 10^{\mathtt{k3}}]$ pri čemu `k` određuje poziciju od $10^{\mathtt{k2}}$ između komponenata od d.
- Za računanje Δ, funkcija `scalvec` se koristi unutar trostruke petlje kontrolirane indeksima `k1`, `k2` and `k3`
- Ortogonalne matrice U i V se računaju naredbom `[Q,~]=qr(rand(n))`

Još par detalja

- Dijagonalne matrice se konstruiraju pomoću M-funkcije `diag(d)`

- `d` je vektor, a vektori se konstruiraju pomoću M-funkcije `logspace(x1,x2,n)`. Koristimo ju za dijagonalne matrice Σ i Δ_A.

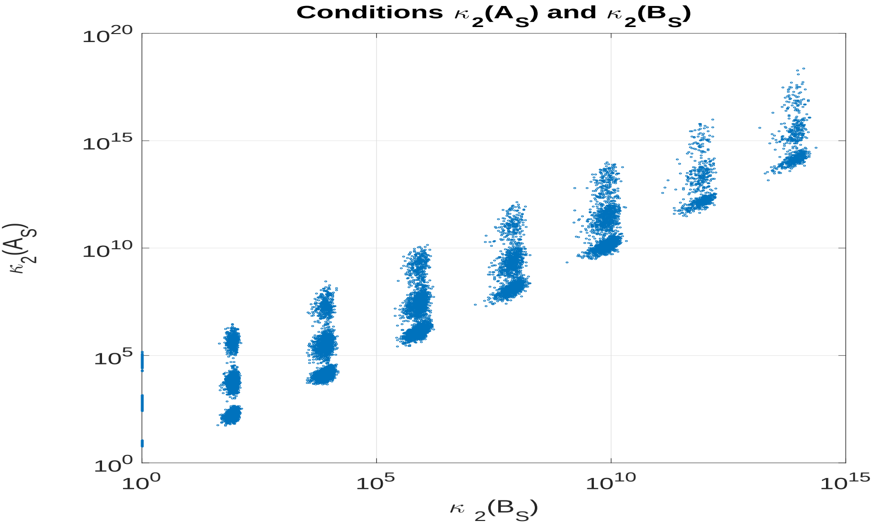
- Za konstrukciju Δ koristimo svoju m-funkciju `scalvec(k1,k2,k3,n,k)` koja generira vektor duljine n, $d = [10^{\mathtt{k1}}, \ldots, 10^{\mathtt{k2}}, \ldots, 10^{\mathtt{k3}}]$ pri čemu `k` određuje poziciju od $10^{\mathtt{k2}}$ između komponenata od d.

- Za računanje Δ, funkcija `scalvec` se koristi unutar trostruke petlje kontrolirane indeksima `k1`, `k2` and `k3`

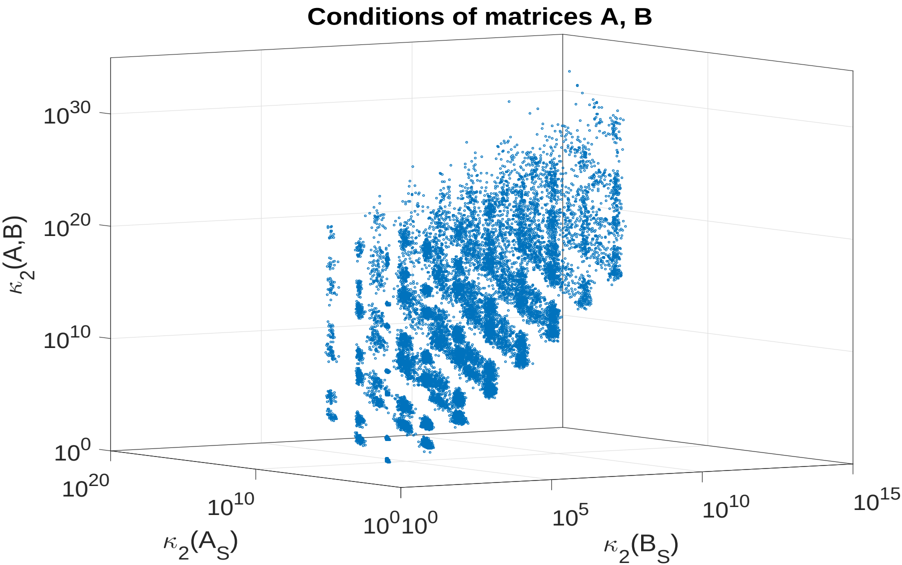
- Ortogonalne matrice U i V se računaju naredbom `[Q,~]=qr(rand(n))`

- U eksperimentu smo generirali 18900 parova matrica reda 10. Kao egzaktne vlastite vrijednosti koristili smo one izračunate pomoću M-funkcije `eig(A,B)` u VPA aritmetici sa 80 dekadskih znamenaka.

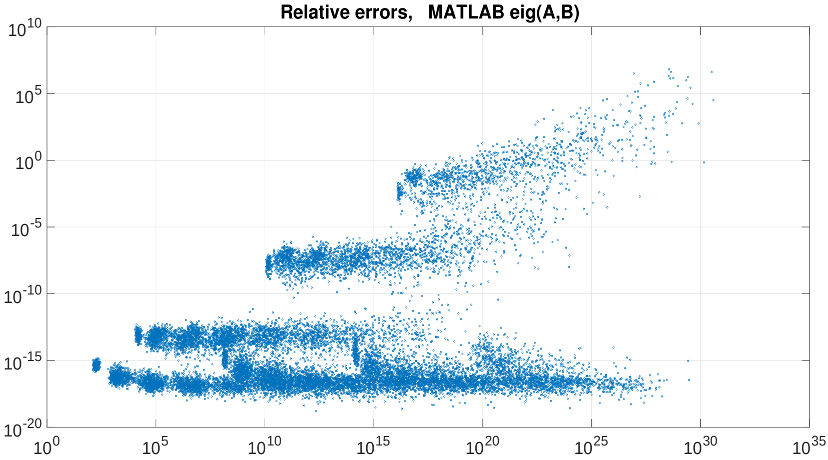
Kondicije matrica



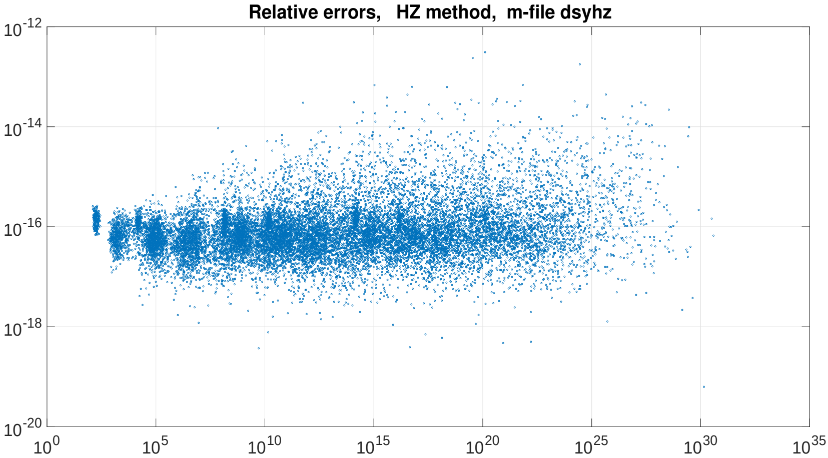
Kondicije matrica



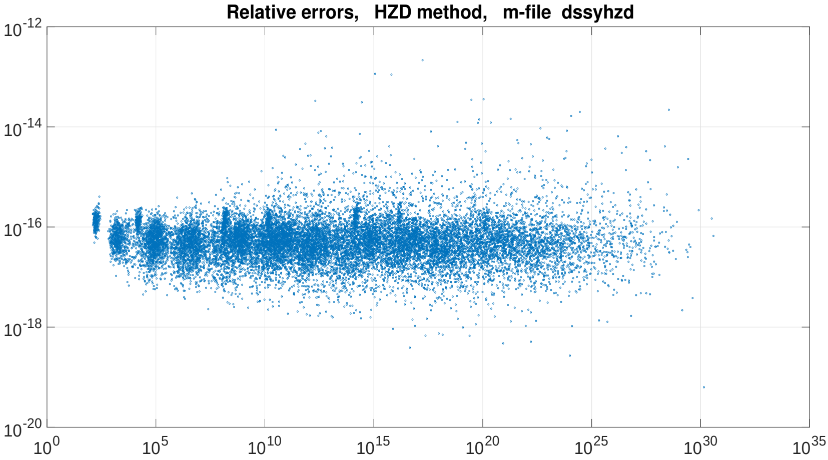
Relative errors: MATLAB eig function



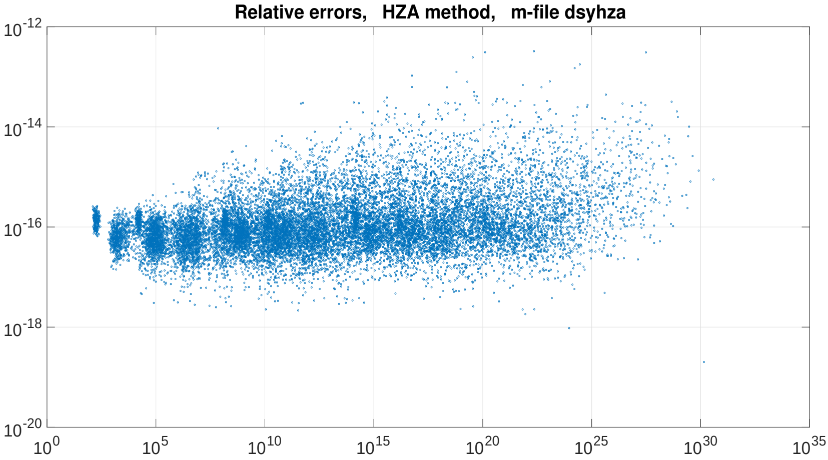
Relative errors: HZ metoda



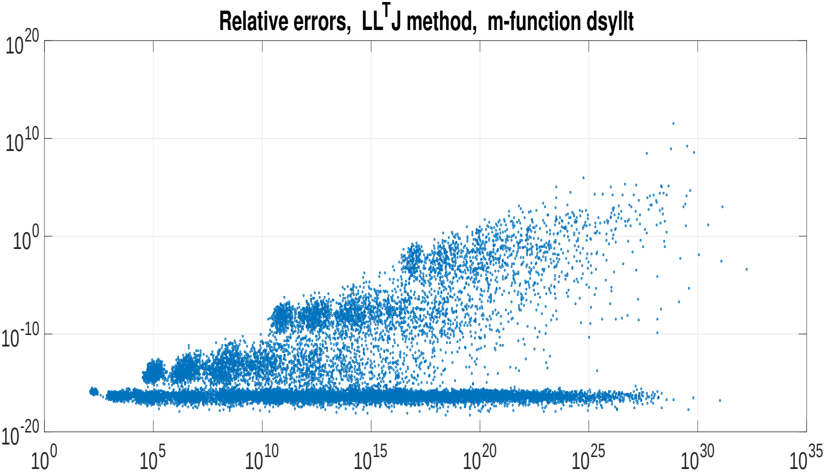
Relative errors: HZD metoda



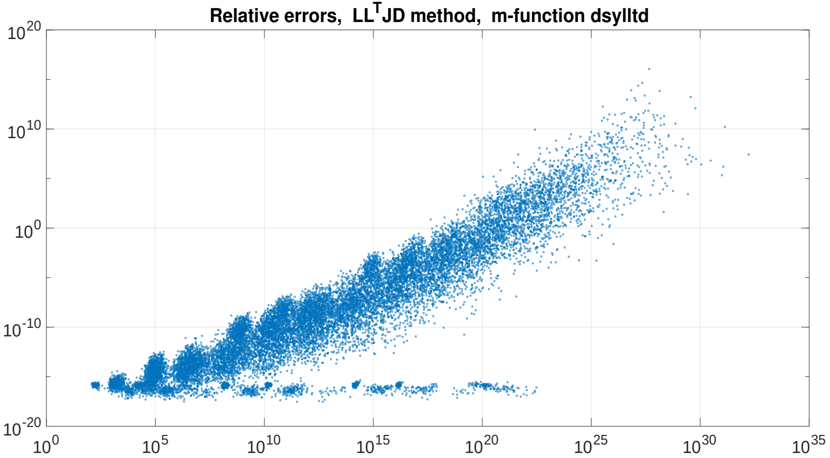
Relative errors: HZA metoda



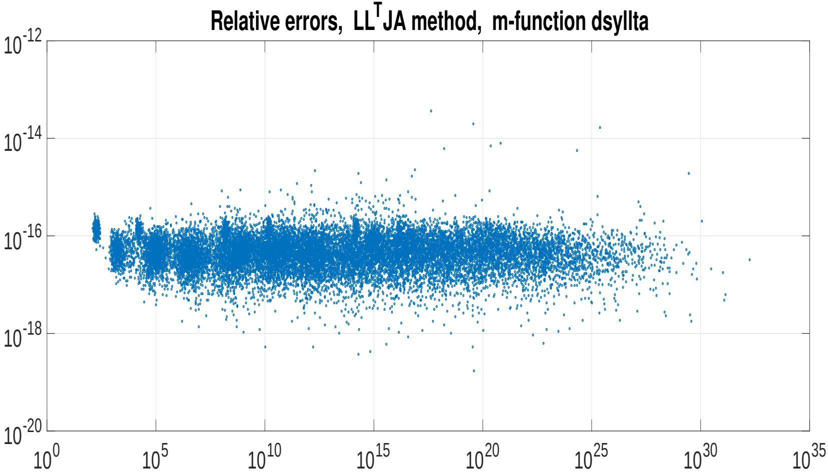
Relative errors: LL^TJ metoda



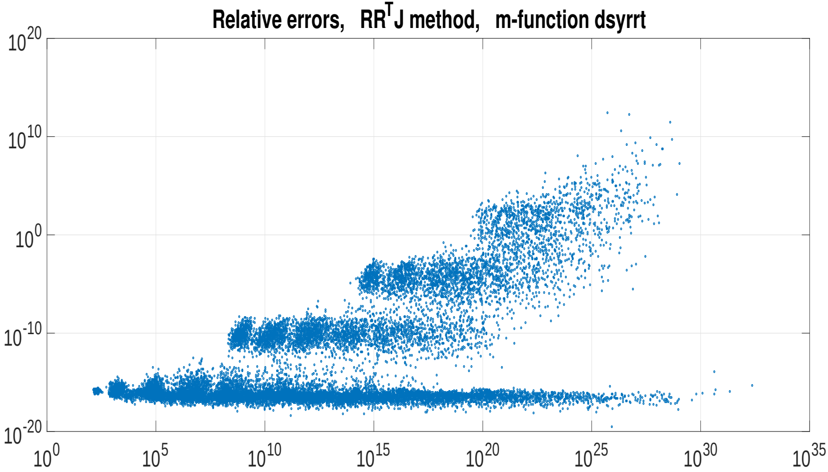
Relative errors: Descending LL^TJ metoda



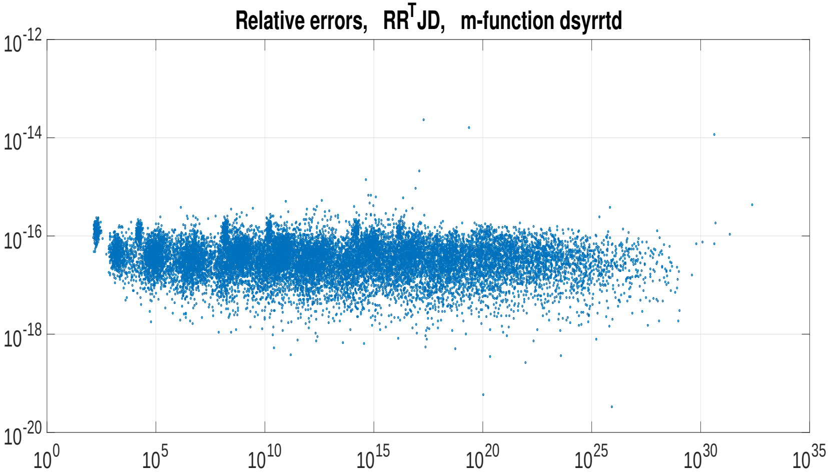
Relative errors: Ascending LL^TJ metoda



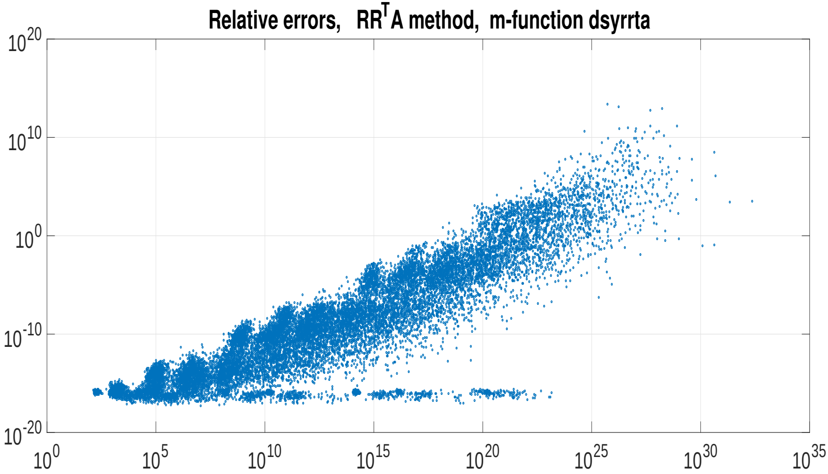
Relative errors: RR^TJ metoda



Relative errors: Descending RR^TJ metoda



Relative errors: Ascending $RR^T J$ metoda



Kako definirati hibridnu metodu?

Vidimo da je samo jedna varijanta LL^TJ metode (LL^TJA) i samo jedna varijanta RR^TJ metode (RR^TJD) indicirana kao relativno točna.

Kako definirati hibridnu metodu?

Vidimo da je samo jedna varijanta $LL^T J$ metode ($LL^T JA$) i samo jedna varijanta $RR^T J$ metode ($RR^T JD$) indicirana kao relativno točna.

To ukazuje kako treba definirati visoko točnu hibridnu metodu, nazovimo ju *Cholesky-Jacobijeva metoda* ili kraće CJ metoda:

Kako definirati hibridnu metodu?

Vidimo da je samo jedna varijanta LL^TJ metode (LL^TJA) i samo jedna varijanta RR^TJ metode (RR^TJD) indicirana kao relativno točna.

To ukazuje kako treba definirati visoko točnu hibridnu metodu, nazovimo ju *Cholesky-Jacobijeva metoda* ili kraće CJ metoda:

%%% Algoritam CJ

odaberi pivotni par (i, j)

if $a_{ii} \geq a_{jj}$ **then** odaberi LL^TJ algoritam

else odaberi RR^TJ algoritam

endif

Kako definirati hibridnu metodu?

Vidimo da je samo jedna varijanta LL^TJ metode (LL^TJA) i samo jedna varijanta RR^TJ metode (RR^TJD) indicirana kao relativno točna.

To ukazuje kako treba definirati visoko točnu hibridnu metodu, nazovimo ju *Cholesky-Jacobijeva metoda* ili kraće CJ metoda:

%%% Algoritam CJ

odaberi pivotni par (i, j)
if $a_{ii} \geq a_{jj}$ **then** odaberi LL^TJ algoritam
else odaberi RR^TJ algoritam
endif

Njena globalna konvergencija je dokazana u prethodnom teoremu.

Kako definirati hibridnu metodu?

Vidimo da je samo jedna varijanta LL^TJ metode (LL^TJA) i samo jedna varijanta RR^TJ metode (RR^TJD) indicirana kao relativno točna.

To ukazuje kako treba definirati visoko točnu hibridnu metodu, nazovimo ju *Cholesky-Jacobijeva metoda* ili kraće CJ metoda:

%%% Algoritam CJ

odaberi pivotni par (i, j)
if $a_{ii} \geq a_{jj}$ **then** odaberi LL^TJ algoritam
else odaberi RR^TJ algoritam
endif

Njena globalna konvergencija je dokazana u prethodnom teoremu.

Prezentaciju završavamo grafom pridruženim CJ metodi.

Relative errors: *CJ* metoda