Najbliža normalna matrica sa zadanom strukturom

Erna Begović Kovač

Zajednički rad s Heike Faßbender i Philipom Saltenbergerom
(TU Braunschweig)

19. 4. 2018.

This work has been supported in part by Croatian Science Foundation under the project 3670.

SADRŽAJ

- Uvod
- Matrične strukture
  i transformacije koje čuvaju strukturu
- Algoritam Jacobijevog tipa
  za traženje najbliže normalne matrice sa zadanom strukturom
- Konvergencija algoritma
- Numerički primjeri

UVOD

- Skup **normalnih** matrica: $\mathcal{N} = \{X \ : \ XX^* = X^*X\}$
- X je normalna ako i samo ako postoji unitarna U takva da je

U^*XU dijagonalna matrica.

- A. Ruhe: *Closest normal matrix finally found!* (1987.)

Ne čuva strukturu!

UVOD

- Skup **normalnih** matrica: $\mathcal{N} = \{X \ : \ XX^* = X^*X\}$
- X je normalna ako i samo ako postoji unitarna U takva da je

  U^*XU dijagonalna matrica.

- A. Ruhe: *Closest normal matrix finally found!* (1987.)

  Ne čuva strukturu!

Pretpostavimo da A ima strukturu $\mathcal{S}$, $A \in \mathcal{S}$.

Minimizacijski problem:

$$\min \left\{ \|A - X\|_F^2 \ : \ X \in \mathcal{N} \cap \mathcal{S} \right\}$$

MAKSIMIZACIJSKI PROBLEM

Teorem (Causey 1964., Gabriel 1979.)

Neka je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Neka je $X = ZDZ^*$, gdje je Z unitarna, a D dijagonalna. Onda je X najbliža normalna matrica matrici A u Frobeniusovoj normi ako i samo ako je

(a) $\|\mathrm{diag}(Z^*AZ)\|_F = \max\limits_{QQ^*=I} \|\mathrm{diag}(Q^*AQ)\|_F$, i

(b) $D = \mathrm{diag}(Z^*AZ)$.

$\rightarrow$ Problem najbliže normalne matrice ekvivalentan je traženju unitarne transformacije koja maksimizira Frobeniusovu normu dijagonale.

$\rightarrow$ Ovaj je teorem potrebno modificirati tako da zahtjev za očuvanjem strukture bude ispunjen.

Matrične strukture

i transformacije koje čuvaju strukturu

MATRICE SA STRUKTUROM

Proučavamo četiri strukture:

- **hamiltonijanska** $\rightarrow (JA)^* = JA$
- **antihamiltonijanska** $\rightarrow (JA)^* = -JA$
- **perhermitska** $\rightarrow (RA)^* = RA$
- **perantihermitska** $\rightarrow (RA)^* = -RA$

pri čemu je $\quad J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad$ i $\quad R = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$

MATRICE SA STRUKTUROM

Proučavamo četiri strukture:

- **hamiltonijanska** (J-hermitska)
- **antihamiltonijanska** (J-antihermitska)
- **perhermitska** (R-hermitska)
- **perantihermitska** (R-antihermitska)

pri čemu je $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ i $R = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

TRANSFORMACIJE KOJE ČUVAJU STRUKTURU

- Za hamiltonijanske i antihamiltonijanske

  $\rightarrow$ J-unitarne

- Za perhermitske i perantihermitske

  $\rightarrow$ R-unitarne

TRANSFORMACIJE KOJE ČUVAJU STRUKTURU

- Za hamiltonijanske i antihamiltonijanske

M je **simplektička** ako je $M^* JM = J$.

- Za perhermitske i perantihermitske

M je **perplektička** ako je $M^* RM = R$.

TRANSFORMACIJE KOJE ČUVAJU STRUKTURU

- Za hamiltonijanske i antihamiltonijanske

$$M \text{ je } \textbf{simplektička} \text{ ako je } M^*JM = J.$$

- Za perhermitske i perantihermitske

$$M \text{ je } \textbf{perplektička} \text{ ako je } M^*RM = R.$$

mnogostrukost	tangencijalni potprostor u I	ortogonalni potprostor u I
simplektičke perplektičke	hamiltonijanske perantihermitske	antihamiltonijanske perhermitske
Liejeva grupa	Liejeva algebra	Jordanova algebra

Tablica: Geometrijska i algebarska interpretacija

HAMILTONIJANSKE I ANTIHAMILTONIJANSKE

- Hamiltonijanska: $(JA)^* = JA$ ili ekvivalentno $A^* = JAJ$

  Ako A zapišemo kao 2×2 blok matricu, vrijedi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11}^* \end{bmatrix}, \qquad A_{12}^* = A_{12},\ A_{21}^* = A_{21}.$$

HAMILTONIJANSKE I ANTIHAMILTONIJANSKE

- Hamiltonijanska: $(JA)^* = JA$ ili ekvivalentno $A^* = JAJ$

  Ako A zapišemo kao 2×2 blok matricu, vrijedi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11}^* \end{bmatrix}, \qquad A_{12}^* = A_{12},\ A_{21}^* = A_{21}.$$

- Antihamiltonijanska: $(JA)^* = -JA$ ili $A^* = -JAJ$

  Ako A zapišemo kao 2×2 blok matricu, vrijedi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11}^* \end{bmatrix}, \qquad A_{12}^* = -A_{12},\ A_{21}^* = -A_{21}.$$

HAMILTONIJANSKE I ANTIHAMILTONIJANSKE

- Hamiltonijanska: $(JA)^* = JA$ ili ekvivalentno $A^* = JAJ$

  Ako A zapišemo kao 2×2 blok matricu, vrijedi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11}^* \end{bmatrix}, \qquad A_{12}^* = A_{12},\ A_{21}^* = A_{21}.$$

- Antihamiltonijanska: $(JA)^* = -JA$ ili $A^* = -JAJ$

  Ako A zapišemo kao 2×2 blok matricu, vrijedi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11}^* \end{bmatrix}, \qquad A_{12}^* = -A_{12},\ A_{21}^* = -A_{21}.$$

- Za svaku antihamiltonijansku matricu W postoji hamiltonijanska H (i obratno) takva da vrijedi

$$W = \imath H.$$

HAMILTONIJANSKE NORMALNE

Teorem

Za svaku normalnu hamiltonijansku matricu $A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ postoji unitarna simplektička matrica U takva da je

$$U^*AU = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & D_3 \\ 0 & 0 & -D_1^* & 0 \\ 0 & -D_3 & 0 & D_2 \end{bmatrix},$$

gdje su D_j, $j = 1, 2, 3$ dijagonalne matrice, $D_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$, $D_2 \in \imath\mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $D_3 \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $n_1 + n_2 = n$.

HAMILTONIJANSKE NORMALNE

Teorem

Za svaku normalnu hamiltonijansku matricu $A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ postoji unitarna simplektička matrica U takva da je

$$U^*AU = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & D_3 \\ 0 & 0 & -D_1^* & 0 \\ 0 & -D_3 & 0 & D_2 \end{bmatrix},$$

gdje su D_j, $j = 1, 2, 3$ dijagonalne matrice, $D_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$, $D_2 \in \imath\mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $D_3 \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$, $n_1 + n_2 = n$.

$\rightarrow$ Kanonska forma za hamiltonijansku normalnu A:

$$U^*AU = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
* & & & * & & \\
& \ddots & & & \ddots & \\
& & \ddots & & & * \\ \hline
* & & & \ddots & & \\
& \ddots & & & \ddots & \\
& & * & & & *
\end{array}\right]$$

MAKSIMIZACIJSKI TEOREM

Teorem

Neka je $A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ **hamiltonijanska** (antihamiltonijanska). Neka je $X = Z\Lambda Z^*$, gdje je Z **simplektička unitarna**. Onda je X najbliža hamiltonijanska (antihamiltonijanska) normalna matrica matrici A u Frobeniusovoj normi ako i samo ako je

(a) $\|\mathrm{diag}(Z^*AZ)\|_F + \|\mathrm{diag}(JZ^*AZ)\|_F = \max_{QQ^*=I,\ Q\in Sp_{2n}(\mathbb{C})} \left(\|\mathrm{diag}(Q^*AQ)\|_F + \|\mathrm{diag}(JQ^*AQ)\|_F\right)$, and

(b) $\Lambda = \mathrm{diag}(Z^*AZ) - J\mathrm{diag}(JZ^*AZ)$.

PERHERMITSKE I PERANTIHERMITSKE

- Perhermitska: hermitska s obzirom na antidijagonalu

PERHERMITSKE I PERANTIHERMITSKE

- Perhermitska: $(RA)^* = RA$ ili $A^* = RAR$

  Ako A zapišemo kao 2×2 blok matricu, vrijedi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & RA_{11}^* R \end{bmatrix}, \qquad A_{12}, A_{21} \text{ perhermitske.}$$

PERHERMITSKE I PERANTIHERMITSKE

- Perhermitska: $(RA)^* = RA$ ili $A^* = RAR$

  Ako A zapišemo kao 2×2 blok matricu, vrijedi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & RA_{11}^* R \end{bmatrix}, \qquad A_{12}, A_{21} \text{ perhermitske.}$$

- Perantihermitska: antihermitska s obzirom na antidijagonalu

PERHERMITSKE I PERANTIHERMITSKE

- Perhermitska: $(RA)^* = RA$ ili $A^* = RAR$

  Ako A zapišemo kao 2×2 blok matricu, vrijedi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & RA_{11}^* R \end{bmatrix}, \qquad A_{12}, A_{21} \text{ perhermitske.}$$

- Perantihermitska: $(RA)^* = -RA$ ili $A^* = -RAR$

  Ako A zapišemo kao 2×2 blok matricu, vrijedi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -RA_{11}^* R \end{bmatrix}, \qquad A_{12}, A_{21} \text{ perantihermitske.}$$

PERHERMITSKE I PERANTIHERMITSKE

- Perhermitska: $(RA)^* = RA$ ili $A^* = RAR$

  Ako A zapišemo kao 2×2 blok matricu, vrijedi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & RA_{11}^* R \end{bmatrix}, \qquad A_{12}, A_{21} \text{ perhermitske.}$$

- Perantihermitska: $(RA)^* = -RA$ ili $A^* = -RAR$

  Ako A zapišemo kao 2×2 blok matricu, vrijedi

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -RA_{11}^* R \end{bmatrix}, \qquad A_{12}, A_{21} \text{ perantihermitske.}$$

- Za svaku perantihermitsku matricu K postoji perhemirtska M (i obratno) takva da vrijedi

$$K = \imath M.$$

PERHERMITSKE NORMALNE

Teorem

Za svaku normalnu perhermitsku matricu $A \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ postoji unitarna perplektička matrica U takva da je

$$U^* A U = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & D_3 & 0 \\ 0 & RD_3R & RD_2R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & RD_1R \end{bmatrix},$$

gdje su D_1 i D_2 dijagonalne, a D_3 antidijagonalna matrica, $D_1 \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $D_3 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $n_1 + n_2 = n$.

$\rightarrow$ Kanonska forma za perhermitsku normalnu A:

$$U^* A U = \left[\begin{array}{ccc|ccc} * & & & & & * \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & \ddots & \iddots & & \\ \hline & & \iddots & \ddots & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ * & & & & & * \end{array}\right]$$

MAKSIMIZACIJSKI TEOREM

Teorem

Neka je $A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ **perhermitska** (perantihermitska). Neka je $X = Z\Lambda Z^*$, gdje je Z **perplektička unitarna**. Onda je X najbliža perhermitska (perantihermitska) normalna matrica matrici A u Frobeniusovoj normi ako i samo ako je

(a) $\|\mathrm{diag}(Z^*AZ)\|_F + \|\mathrm{diag}(RZ^*AZ)\|_F = \max\limits_{QQ^*=I,\ Q\in Pp_{2n}(\mathbb{C})} \left(\|\mathrm{diag}(Q^*AQ)\|_F + \|\mathrm{diag}(RQ^*AQ)\|_F\right)$, and

(b) $\Lambda = \mathrm{diag}(Z^*AZ) + R\,\mathrm{diag}(RZ^*AZ)$.

Algoritam Jacobijevog tipa

za traženje najbliže normalne matrice

sa zadanom strukturom

MAKSIMIZACIJSKI ALGORITAM

$$\max_{ZZ^*=I,\ Z\in Sp_{2n}(\mathbb{C})} \left\{ f_{\mathcal{H}}(Z) := \|\mathrm{diag}(Z^*AZ)\|_F^2 + \|\mathrm{diag}(JZ^*AZ)\|_F^2 \right\}$$
$$\max_{ZZ^*=I,\ Z\in Pp_{2n}(\mathbb{C})} \left\{ f_{\mathcal{P}}(Z) := \|\mathrm{diag}(Z^*AZ)\|_F^2 + \|\mathrm{diag}(RZ^*AZ)\|_F^2 \right\}$$

- Najbliža normalna matrica sa zadanom strukturom dana je relacijom
$$X = Z(\mathrm{diag}(Z^*AZ))Z^*.$$

MAKSIMIZACIJSKI ALGORITAM

$$\max_{ZZ^*=I,\ Z\in Sp_{2n}(\mathbb{C})} \left\{ f_{\mathcal{H}}(Z) := \|\mathrm{diag}(Z^*AZ)\|_F^2 + \|\mathrm{diag}(JZ^*AZ)\|_F^2 \right\}$$

$$\max_{ZZ^*=I,\ Z\in Pp_{2n}(\mathbb{C})} \left\{ f_{\mathcal{P}}(Z) := \|\mathrm{diag}(Z^*AZ)\|_F^2 + \|\mathrm{diag}(RZ^*AZ)\|_F^2 \right\}$$

- Najbliža normalna matrica sa zadanom strukturom dana je relacijom

$$X = Z(\mathrm{diag}(Z^*AZ))Z^*.$$

- Iterativni algoritam oblika

$$A^{(k+1)} = R_k^* A^{(k)} R_k, \quad k \geq 0,$$

gdje su R_k rotacije koje čuvaju strukturu izabrane tako da maksimiziraju

$$\|\mathrm{diag}(A^{(k+1)})\|_F^2 + \|\mathrm{diag}(PA^{(k+1)})\|_F^2, \quad \text{za } P = J \text{ ili } P = R.$$

ROTACIJE

- Dvije **Givensove rotacije** $\begin{bmatrix} \cos\phi & -e^{\imath\alpha}\sin\phi \\ e^{-\imath\alpha}\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$ smještene su u I_{2n}.
- Koristimo dvije vrste simplektičkih i dvije vrste perplektičkih rotacija
$$R(i, j, \phi, \alpha),$$
gdje je (i, j) **pivotni par**.

ALGORITAM

Input: $A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n} \in \mathcal{S}$, $Z_0 = I$
Output: structure-preserving unitary Z
REPEAT
    Select (i_k, j_k).
    Find ϕ_k and α_k.
    Form rotation matrix $R(i_k, j_k, \phi_k, \alpha_k)$.
    $A^{(k+1)} = R_k^* A^{(k)} R_k$
    $Z_{k+1} = Z_k R_k$
UNTIL convergence

SIMPLEKTIČKE ROTACIJE

- Označimo $c = \cos\phi$, $s = e^{\imath\alpha}\sin\phi$. Simplektičke rotacije:

$$R(i,j,\phi,\alpha) = \left[\begin{array}{cc|cc} c & -s & & \\ \bar{s} & c & & \\ \hline & & c & -s \\ & & \bar{s} & c \end{array}\right] \begin{array}{c} i \\ j \\ n+i \\ n+j \end{array}$$

$$R(i,j,\phi,\alpha) = \left[\begin{array}{cc|cc} c & & & -s \\ & c & -\bar{s} & \\ \hline & s & c & \\ \bar{s} & & & c \end{array}\right] \begin{array}{c} i \\ j-n \\ n+i \\ j \end{array}$$

PIVOTNE POZICIJE (ZA SIMPLEKTIČKE)

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \square & \square & \square & \square \\
 & \diamond & \diamond & \diamond & & \square & \square & \square \\
 & & \diamond & \diamond & & & \square & \square \\
 & & & \diamond & & & & \square \\
\hline
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & &
\end{array}\right]
$$

PIVOTNE POZICIJE (ZA SIMPLEKTIČKE)

$$
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & & \square & \square & \square & \square \\
 & & \diamond & \diamond & \diamond & & & \square & \square & \square \\
 & & & \diamond & \diamond & & & & \square & \square \\
 & & & & \diamond & & & & & \square \\
 & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & &
\end{array}\right]
$$

$$\overset{\text{s obzirom da su rotacije dvostruke}}{\rightsquigarrow}$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & & \square & \square & \square & \square \\
 & & \diamond & \diamond & \diamond & \square & & \square & \square & \square \\
 & & & \diamond & \diamond & \square & \square & & \square & \square \\
 & & & & \diamond & \square & \square & \square & & \square \\
 & & & & & \square & \square & \square & \square & \\
\hline
 & & & & & & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \\
 & & & & & & & \diamond & \diamond & \diamond \\
 & & & & & & & & \diamond & \diamond \\
 & & & & & & & & & \diamond \\
 & & & & & & & & &
\end{array}\right]
$$

PERPLEKTIČKE ROTACIJE

- Označimo $c = \cos\phi$, $s = e^{\imath\alpha}\sin\phi$. Perplektičke rotacije:

$$R(i,j,\phi,\alpha) = \left[\begin{array}{cc|cc} c & -s & & \\ \bar{s} & c & & \\ \hline & & c & \bar{s} \\ & & -s & c \end{array}\right] \begin{array}{c} i \\ j \\ 2n-j+1 \\ 2n-i+1 \end{array}$$

$$R(i,j,\phi,\alpha) = \left[\begin{array}{cc|cc} c & & -s & \\ & c & & \bar{s} \\ \hline \bar{s} & & c & \\ & -s & & c \end{array}\right] \begin{array}{c} i \\ 2n-j+1 \\ j \\ 2n-i+1 \end{array}$$

PIVOTNE POZICIJE (ZA PERPLEKTIČKE)

$$
\left[\begin{array}{ccccc|cccc}
 & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \square & \square & \square & \square \\
 & & \diamond & \diamond & \diamond & \square & \square & \square & \\
 & & & \diamond & \diamond & \square & \square & & \\
 & & & & \diamond & \square & & & \\
 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & &
\end{array}\right]
$$

PIVOTNE POZICIJE (ZA PERPLEKTIČKE)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \square & \square & \square & \square \\
 & \diamond & \diamond & \diamond & \square & \square & \square & \\
 & & \diamond & \diamond & \square & \square & & \\
 & & & \diamond & \square & & & \\
\hline
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & &
\end{array}\right]$$

s obzirom da su rotacije dvostruke

$\rightsquigarrow$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc}
\diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \square & \square & \square & \square & \\
 & \diamond & \diamond & \diamond & \square & \square & \square & & \square \\
 & & \diamond & \diamond & \square & \square & & \square & \square \\
 & & & \diamond & \square & & \square & \square & \square \\
 & & & & & \square & \square & \square & \square \\
\hline
 & & & & & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \\
 & & & & & & \diamond & \diamond & \diamond \\
 & & & & & & & \diamond & \diamond \\
 & & & & & & & & \diamond
\end{array}\right]$$

PIVOTNA STRATEGIJA

- Ciklička strategija
- Uvjet na pivotni par:

$$|\langle \mathrm{grad} f(Z), Z\dot{R}(i_k, j_k, 0, \alpha_k)\rangle| \geq \eta \|\mathrm{grad} f(Z)\|_F,$$

gdje je $\dot{R}(i,j,\phi,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \phi} R(i,j,\phi,\alpha)$ i f je funkcija cilja.

Uzimamo $\eta = \frac{4}{\sqrt{4n^2-4n}}$.

KUTEVI ROTACIJE

- U k-tom koraku biramo ϕ_k i α_k takve da $R_k = R(i_k, j_k, \phi_k, \alpha_k)$ maksimizira

$$\|\mathrm{diag}(A^{(k+1)})\|_F + \|P\mathrm{diag}(PA^{(k+1)})\|_F,$$

  za $P = J$ ili $P = R$.

KUTEVI ROTACIJE

- U k-tom koraku biramo ϕ_k i α_k takve da $R_k = R(i_k, j_k, \phi_k, \alpha_k)$ maksimizira
$$\|\mathrm{diag}(A^{(k+1)})\|_F + \|P\mathrm{diag}(PA^{(k+1)})\|_F,$$
za $P = J$ ili $P = R$.
- Označimo $A^{(k+1)} = A'$, $A^{(k)} = A$, $\phi_k = \phi$, $\alpha_k = \alpha$.
- Npr. za hamiltonijansku A kada je simplektička rotacija prvog tipa, dovoljno je promatrati podmatricu
$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{i,n+i} & a_{i,n+j} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{j,n+i} & a_{j,n+j} \\ a_{n+i,i} & a_{n+i,j} & a_{n+i,n+i} & a_{n+i,n+j} \\ a_{n+j,i} & a_{n+j,j} & a_{n+j,n+i} & a_{n+j,n+j} \end{bmatrix}.$$
Imamo
$$A'_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -e^{\imath\alpha}\sin\phi & 0 & 0 \\ e^{-\imath\alpha}\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -e^{\imath\alpha}\sin\phi \\ 0 & 0 & e^{-\imath\alpha}\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^* A_{ij} \begin{bmatrix} \cos\phi & -e^{\imath\alpha}\sin\phi & 0 & 0 \\ e^{-\imath\alpha}\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -e^{\imath\alpha}\sin\phi \\ 0 & 0 & e^{-\imath\alpha}\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

KUTEVI ROTACIJE–cont.

- Trebamo

$$|a'_{ii}|^2 + |a'_{jj}|^2 + |a'_{n+i,n+i}|^2 + |a'_{n+j,n+j}|^2 + \\ + |a'_{i,n+i}|^2 + |a'_{j,n+j}|^2 + |a'_{n+i,i}|^2 + |a'_{n+j,j}|^2 \to \max .$$

- Stavimo $a_{rs} = x_{rs} + y_{rs}\imath$ i iskoristimo svojstva hamiltonijanske matrice. Definiramo funkciju

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{H}}(\phi, \alpha) := {} & 2|x'_{ii}|^2 + 2|y'_{ii}|^2 + 2|x'_{jj}|^2 + 2|y'_{jj}|^2 + \\ & + |x'_{i,n+i}|^2 + |y'_{i,n+i}|^2 + |x'_{j,n+j}|^2 + |y'_{j,n+j}|^2 \\ & + |x'_{n+i,i}|^2 + |y'_{n+i,i}|^2 + |x'_{n+j,j}|^2 + |y'_{n+j,j}|^2 . \end{aligned}$$

- Za kuteve rotacije uzimamo vrijednosti ϕ i α u kojima $g_{\mathcal{H}}(\phi, \alpha)$ poprima maksimum.

Konvergencija

TRI LEME - $f_{\mathcal{H}}$

Lema

Gradijent funkcije $f_{\mathcal{H}}$ je oblika $\mathrm{grad} f_{\mathcal{H}}(Z) = ZX$, gdje je $\mathrm{diag}(X) = 0$, $\mathrm{diag}(JX) = 0$, i X je antihermitska hamiltonijanska.

TRI LEME - $f_{\mathcal{H}}$

Lema

Gradijent funkcije $f_{\mathcal{H}}$ je oblika $\mathrm{grad} f_{\mathcal{H}}(Z) = ZX$, gdje je $\mathrm{diag}(X) = 0$, $\mathrm{diag}(JX) = 0$, i X je antihermitska hamiltonijanska.

Lema

Za svaku unitarnu simplektičku matricu $Z \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ postoji simplektička rotacija $R(i, j, \phi, \alpha)$ takva da vrijedi

$$|\langle \mathrm{grad} f_{\mathcal{H}}(Z), Z\dot{R}(i, j, 0, \alpha)\rangle| \geq \eta \|\mathrm{grad} f_{\mathcal{H}}(Z)\|_F, \quad \eta = \frac{4}{\sqrt{4n^2 - 4n}}.$$

TRI LEME - $f_{\mathcal{H}}$

Lema

Gradijent funkcije $f_{\mathcal{H}}$ je oblika $\mathrm{grad} f_{\mathcal{H}}(Z) = ZX$, gdje je $\mathrm{diag}(X) = 0$, $\mathrm{diag}(JX) = 0$, i X je antihermitska hamiltonijanska.

Lema

Za svaku unitarnu simplektičku matricu $Z \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ postoji simplektička rotacija $R(i, j, \phi, \alpha)$ takva da vrijedi

$$|\langle \mathrm{grad} f_{\mathcal{H}}(Z), Z\dot{R}(i, j, 0, \alpha)\rangle| \geq \eta \|\mathrm{grad} f_{\mathcal{H}}(Z)\|_F, \quad \eta = \frac{4}{\sqrt{4n^2 - 4n}}.$$

Lema

Neka je $\hat{Z} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ simplektička matrica. Neka je $f = f_{\mathcal{H}}$ i neka je $(Z_k,\ k \geq 0)$ niz matrica generiranih algoritmom za najbližu hamiltonijansku matricu. Ako je $\mathrm{grad} f(\hat{Z}) \neq 0$, tada postoje $\epsilon > 0$ i $\delta > 0$ takvi da vrijedi

$$\|Z_k - \hat{Z}\|_F < \epsilon \quad \Rightarrow \quad f(Z_{k+1}) - f(Z_k) \geq \delta.$$

TRI LEME - $f_{\mathcal{P}}$

Lema

Gradijent funkcije $f_{\mathcal{P}}$ je oblika $\mathrm{grad} f_{\mathcal{P}}(Z) = ZX$, gdje je $\mathrm{diag}(X) = 0$, $\mathrm{diag}(RX) = 0$, i X je antihermitska perantihermitska.

Lema

Za svaku unitarnu perplektičku matricu $Z \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ postoji perplektička rotacija $R(i, j, \phi, \alpha)$ takva da vrijedi

$$|\langle \mathrm{grad} f_{\mathcal{P}}(Z), Z\dot{R}(i, j, 0, \alpha)\rangle| \geq \eta \|\mathrm{grad} f_{\mathcal{P}}(Z)\|_F, \quad \eta = \frac{4}{\sqrt{4n^2 - 4n}}.$$

Lema

Neka je $\hat{Z} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ perplektička matrica. Neka je $f = f_{\mathcal{P}}$ i neka je $(Z_k,\ k \geq 0)$ niz matrica generiranih algoritmom za najbližu perhermitsku matricu. Ako je $\mathrm{grad} f(\hat{Z}) \neq 0$, tada postoje $\epsilon > 0$ i $\delta > 0$ takvi da vrijedi

$$\|Z_k - \hat{Z}\|_F < \epsilon \quad \Rightarrow \quad f(Z_{k+1}) - f(Z_k) \geq \delta.$$

KONVERGENCIJA

Teorem ($f_{\mathcal{H}}$)

Neka je $(Z_k,\ k \geq 0)$ niz unitarnih simplektičkih matrica generiranih algoritmom za najbližu hamiltonijansku matricu. Svako gomilište niza $(Z_k,\ k \geq 0)$ je **stacionarna točka** funkcije
$f_{\mathcal{H}}(Z) = \|\mathrm{diag}(Z^* A Z)\|_F^2 + \|\mathrm{diag}(J Z^* A Z)\|_F^2$.

KONVERGENCIJA

Teorem ($f_{\mathcal{H}}$)

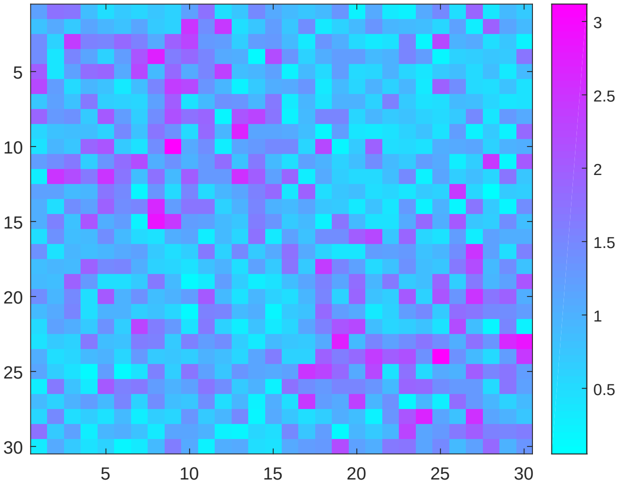
Neka je $(Z_k,\ k \geq 0)$ niz unitarnih simplektičkih matrica generiranih algoritmom za najbližu hamiltonijansku matricu. Svako gomilište niza $(Z_k,\ k \geq 0)$ je **stacionarna točka** funkcije $f_{\mathcal{H}}(Z) = \|\mathrm{diag}(Z^* A Z)\|_F^2 + \|\mathrm{diag}(J Z^* A Z)\|_F^2$.

Teorem ($f_{\mathcal{P}}$)

Neka je $(Z_k,\ k \geq 0)$ niz unitarnih perplektičkih matrica generiranih algoritmom za najbližu perhermitsku matricu. Svako gomilište niza $(Z_k,\ k \geq 0)$ je **stacionarna točka** funkcije $f_{\mathcal{P}}(Z) = \|\mathrm{diag}(Z^* A Z)\|_F^2 + \|\mathrm{diag}(R Z^* A Z)\|_F^2$.

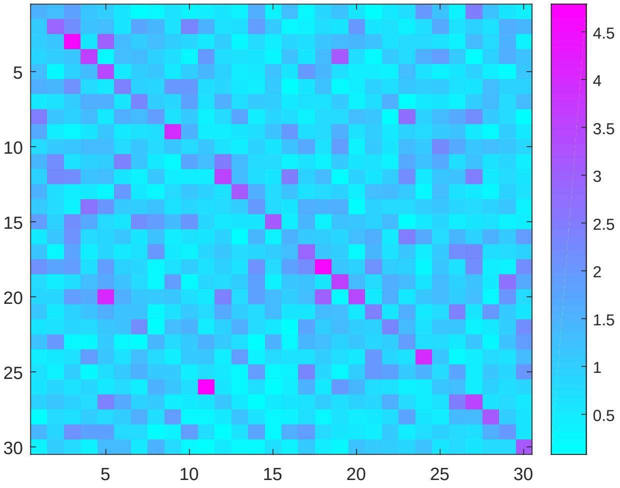
Numerički primjeri

Hamiltonijanska matrica



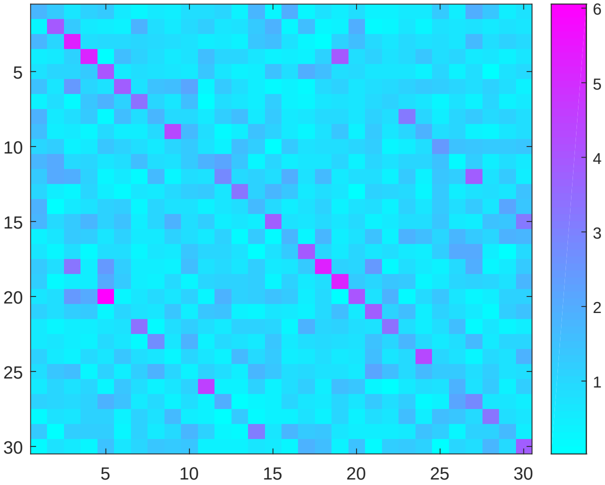
Slika: Slučajna hamiltonijanska 30×30 matrica.

Hamiltonijanska matrica



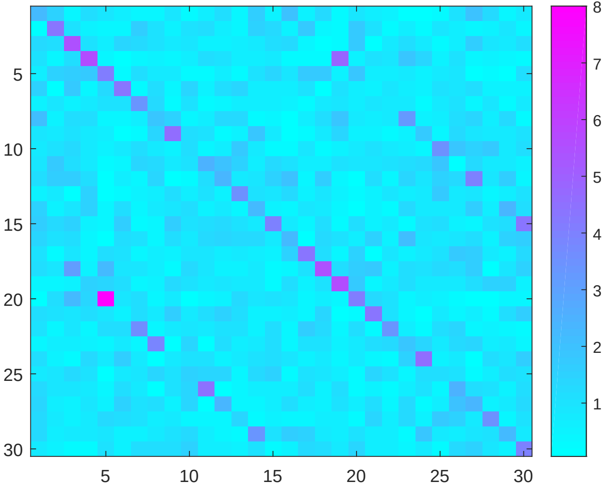
Slika: Slučajna hamiltonijanska 30×30 matrica - nakon 1 ciklusa.

Hamiltonijanska matrica



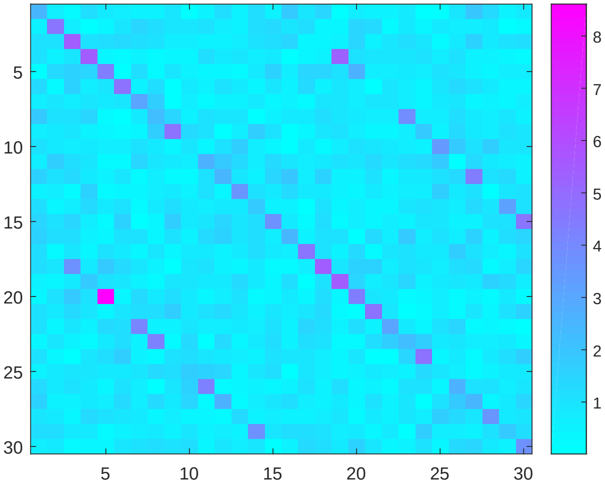
Slika: Slučajna hamiltonijanska 30×30 matrica - nakon 2 ciklusa.

Hamiltonijanska matrica



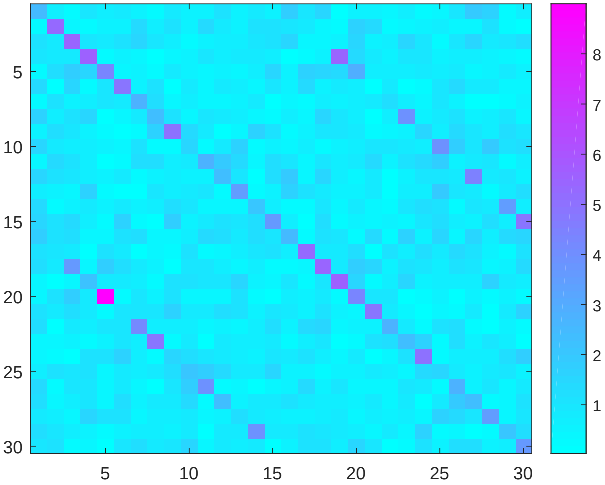
Slika: Slučajna hamiltonijanska 30×30 matrica - nakon 3 ciklusa.

Hamiltonijanska matrica



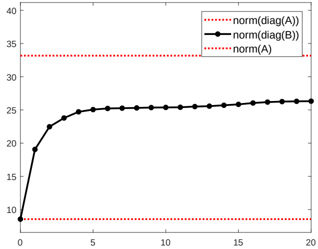
Slika: Slučajna hamiltonijanska 30×30 matrica - nakon 4 ciklusa.

Hamiltonijanska matrica

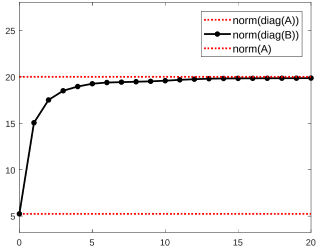


Slika: Slučajna hamiltonijanska 30×30 matrica - nakon 5 ciklusa.

Konvergencija prema kanonskoj formi



(a) Slučajna hamiltonijanska 30×30 matrica

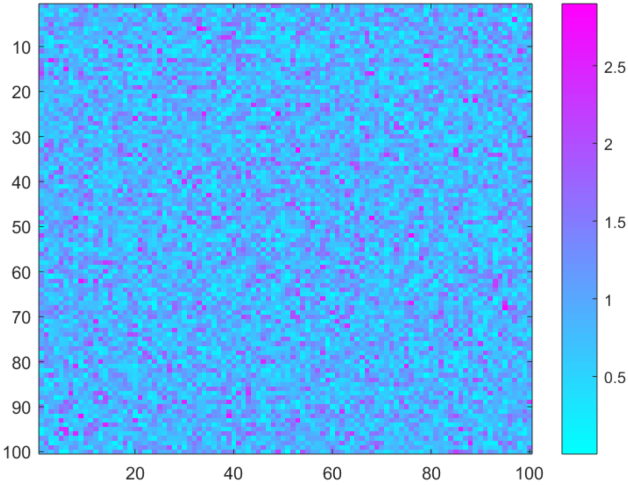


(b) Normalna hamiltonijanska 30×30 matrica

Slika: Frobeniusova norma generalizirane dijagonale.

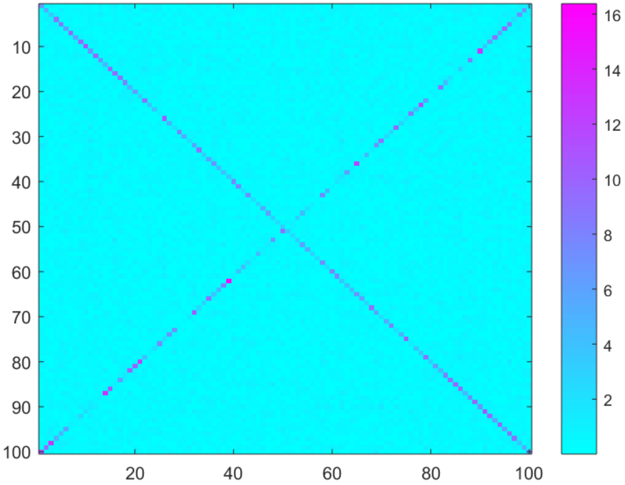
$$A = A^{(0)},\ B = A^{(k)},\ \mathrm{diag}(X) = \|X\|_F + \|JX\|_F$$

Perhermitska matrica



Slika: Slučajna perhermitska 100×100 matrica.

Perhermitska matrica



Slika: Slučajna perhermitska 100×100 matrica - nakon 20 ciklusa.

REFERENCE

- R. Grone, C. R. Johnson, E. M. Sa, H. Wolkowicz: *Normal matrices*.
  Linear Algebra Appl. 87 (1987) 213–225.
- A. Ruhe: *Closest normal matrix finally found!*
  BIT 27 (4) (1987) 585–598.
- N. J. Higham: *Matrix nearness problem and applications*.
  In Applications of Matrix theory 22 (1989) 1–27.
- S. D. Mackey, N. Mackey, F. Tisseur: *Structured tools for structured matrices*.
  Electron. J. Linear Al. 10 (2003) 106–145.
- M. Ishteva, P.-A. Absil, P. Van Dooren: *Jacobi algorithm for the best low multilinear rank approximation of symmetric tensors*.
  SIAM J. Matrix Anal. Appl. 34 (2) (2013) 651–672.