Dr. ing. Danilo Blanuša, Zagreb:

PROBLEM ČETIRIJU BOJA*)

Moderna matematika stvara svoje probleme najviše u visoko razvijenim svojim dijelovima, na krajnjim granicama dosada postignute spoznaje. Takvi su problemi razumljivi samo stručnjaku matematičaru, pa katkada čak samo užem specijalistu za dotičnu matematičku disciplinu. No osim toga u matematici susrećemo neke probleme, koji se daju lako i jednostavno formulirati, pa ih shvaća svaki obrazovan čovjek, a ipak su vanredno teški. Neki su od tih problema riješeni poslije stoljetnih, pa i tisućljetnih napora matematičara, često vrlo kompliciranim matematičkim sredstvima. Neki su i do danas neriješeni. Jedan od novijih takvih problema je problem četiriju boja, koji spada u t. zv. topologiju ili analysis situs.

Zamislimo na kugli (globusu) ili u ravnini[1]) narisanu neku zemljopisnu kartu, kojom je sva površina razdijeljena u stanovit konačan broj područja (zemlje, jezera, mora). Tu kartu želimo obojiti tako, da područja sa zajedničkom granicom budu raznobojna. Dopušta se, da se područja iste boje sastaju u pojedinim točkama (na pr. četveromeđama i t. d.). Pita se, koliki je najmanji broj boja, kojima se to u svakom slučaju može postići.

Može se pokazati, da je pet boja u svakom slučaju dosta[2]). Slutnju, da već četiri boje dostaju u svakom slučaju, nije do danas uspjelo dokazati, pa odatle problemu ime.

Prvi puta spominje taj problem u literaturi matematičar Cayley god. 1878[3]). Kempe[4]) i Tait[5]) dali su dokaze, da su četiri boje dostatne, no Heawood[6]) je pokazao, da su ti dokazi pogrešni. Kasnije su mnogi matematičari u brojnim istraživanjima dokazali razne zanimljive teoreme, koji nas znatno približavaju rješenju, ali do samog rješenja ipak još nije uspjelo doći.

---

*) Predavanje održano u kolokviju matematičko-fizičke i astronomske sekcije dne 26. IX. 1945.

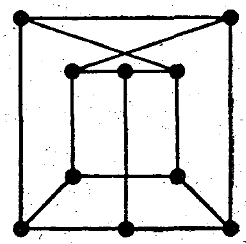
Čudnovato je, da analogni problem na kompliciranijim plohama, nego što je kugla, ne pruža tolike poteškoće. Tako se zna, da za obojenje neke razdiobe u područja na torusu (prstenastoj plohi) uvijek dostaje sedam boja, a i treba toliko, jer se ploha torusa može razdijeliti na sedam područja, koja graniče svako sa svakim. Slično je uspjelo riješiti problem za cio niz još kompliciranijih ploha, a baš na najjednostavnijoj, na kugli, poteškoće su tolike, da ih ne umijemo svladati[7]).

Da se rješenje problema olakša, nastoji ga se svesti na što jednostavniji oblik. Prvi korak je taj, da pretpostavimo, da se u jednoj točci ne sastaje više od triju zemalja, t. j. da nema četveromeđa, peteromeđa i t. d. Takva pretpostavka ne smanjuje općenitost, jer se točke, u kojima se sastaje više od triju zemalja, mogu prekriti poligonima dotičnog reda, kao što se lako vidi. Može li se tako nastala razdioba obojiti sa četiri boje na željeni način, to ove poligone opet stegnemo na točku. Pri tom ne nastaje novih granica, već se samo neke granice produžuju, pa dobijemo ispravno obojenje prvotno zadane razdiobe. Ako se dakle mogu sa četiri boje obojiti sve razdiobe s tromeđama, tada se daju obojiti i sve ostale razdiobe.

Promatramo li sve granice i sve točke, u kojima se granice sastaju (t. j. tromeđe), to možemo reći, da one tvore stanovitu *mrežu*. Tromeđe ćemo zvati *čvorištima* te mreže, same granice *bridovima*, dok područja na kugli tvore *oka* te mreže. Mreža je razapeta na kugli tako, da se bridovi nigdje ne križaju. Bridovi se dakle sastaju samo u čvorištima, i to u svakom čvorištu po tri brida, pa stoga kažemo, da je mreža trećeg stepena. Odsada ćemo promatrati samo mreže trećeg stepena, pa to ne ćemo više posebno isticati. Mreža, koja se može ovako razapeti na kugli (pri čemu bridove zamišljamo po potrebi rastezljivim), zove se sferna mreža. Promatramo li prostornu mrežu, t. j. stanovit broj točaka, koje su na neki način povezane bridovima tako, da se po tri brida sastaju u svakoj od tih točaka, onda ne smatramo, da ima oka, dok tu mrežu nismo razapeli na nekoj plohi (bez križanja bridova). Može se pokazati, da se uvijek može naći takva ploha, ali to ne mora biti kugla. Ako se mreža ne može razapeti na kugli, zvat ćemo je nesfernom.

Važan korak k rješenju sastoji se u tome, da se problem četiriju boja za oka neke sferne mreže nadomjesti problemom triju boja za bridove takve mreže, t. j. da se pita, mogu li se b r i d o v i takve mreže obojiti trima bojama tako, da se ni u kojem čvorištu ne sastaju bridovi iste boje.

Isprva se mislilo, da je to moguće za svaku (i nesfernu) mrežu, pa se ta tvrdnja zvala Taitov teorem[8]). Međutim, Petersen[9]) je oborio tu tvrdnju davši primjer jedne nesferne mreže, kod koje takvo obojenje nije provedivo ili, kako ćemo reći, koja nije »rješiva«. Sl. 1 pokazuje Petersenovu mrežu, a sustavnim pokušavanjem lako je provjeriti, da je nerješiva.



Sl. 1.

Za sferne mreže može se pokazati, da je problem njihove rješivosti, t. j. obojenja njihovih bridova sa tri boje, ekvivalentan problemu obojenja njihovih oka sa četiri boje, dakle problemu četiriju boja[10]). Ako je odgovor na problem četiriju boja jestan, onda su rješive sve sferne mreže, koje nemaju »mostova«. Pod »mostom« se pri tom misli na brid, koji spaja dva dijela mreže tako, da bi se mreža raspala u ta dva dijela, ako dotični brid presiječemo. Uzduž takvog mosta sferne mreže neko bi područje (oko) graničilo samim sobom, što je za zemljopisnu kartu besmisleno.

Rješivost sfernih mreža je pristupačniji problem, koji se može tretirati drukčijim sredstvima, nego li problem četiriju boja, pa je stoga ekvivalencija tih dvaju problema zanimljiva i važna činjenica, koju ćemo ovdje potanje raspraviti. Potrebne su nam za to neke pripreme.

Uzmimo, da je neka mreža riješena, t. j. bridovi su obojeni trima bojama, recimo crvenom, bijelom i plavom, tako, da se ni u kojem čvorištu ne sastaju bridovi iste boje. Pođimo od nekog čvorišta po crvenom bridu do susjednog, od ovog po bijelom bridu do trećeg čvorišta, onda opet po crvenom i tako naizmjence. Dobijemo lanac bridova, u kojem alterniraju crvena i bijela boja. Takav lanac mora završiti najkasnije onda, kada su sva čvorišta dodirnuta. Mora završiti time, da se dođe do nekog već dodirnutog čvorišta, a to može biti samo polazno čvorište, jer su kod ostalih dodirnutih čvorišta i crveni i bijeli brid već upotrijebljeni, dok polazno čvorište još ima slobodan bijeli brid. Lanac se dakle zatvara, pa ga zovemo »izmjeničnim krugom«. Ako još nisu sva čvorišta dodirnuta, započnemo jednim od preostalih čvorišta nov lanac, koji se opet mora zatvoriti. Nastavljamo tako, dok nisu sva čvorišta dodirnuta, čime je proces završen. Možemo dakle sva čvorišta i njihove crvene i bijele bridove obuhvatiti konačnim brojem »izmjeničnih krugova«. Jasno je, da svaki krug ima tâk (paran) broj bridova, jer očito ima isto toliko crvenih kao i bijelih bridova. Krugovi se ne sijeku međusobno i ne sijeku sami sebe, jer nemaju zajedničkih čvorišta, a za bridove pretpostavljamo, da se sastaju samo u čvorištima (dakle, ako je mreža sferna, da se ne križaju). Da smo odabrali druge dvije boje, dobili bismo drugi sustav izmjeničnih krugova. Razmatranje ovakvih krugova je važno sredstvo istraživanja i mnogo se upotrebljava.

Za naša razlaganja trebat će nam pojam poznate Kleinove četvorne grupe. Elementi te grupe mogu imati razno značenje, t. j. grupa se može na razne načine »realizirati«. Neka na pr. elementi e, a, b, c te grupe znače ove transformacije koordinata u ravnini:

$$\begin{matrix} x = x' \\ y = y' \end{matrix} \;;\quad \begin{matrix} x = -x' \\ y = -y' \end{matrix} \;;\quad \begin{matrix} x = x' \\ y = -y' \end{matrix} \;;\quad \begin{matrix} x = -x' \\ y = y' \end{matrix} \qquad (1)$$

Prema tome jedinični elemenat e znači identičnu transformaciju, a znači vrtnju koordinatnog sustava za 180^0, b je zrcaljenje sustava na osi X, a c zrcaljenje sustava na osi Y. Razumijevamo li pod množenjem dvaju elemenata grupe uzastopno izvođenje dotičnih transformacija, to je lako provjeriti, da vrijede relacije

$$a^2 = b^2 = c^2 = e \quad (2) \quad ; \quad ab = ba = c \quad (3) \;; \; ac = ca = b \quad (4) \;;$$
$$bc = cb = a \quad (5).$$

Iz (3) se množenjem sa c i upotrebom (2) dobije lako

$$abc = e, \qquad (6)$$

a iz (2) izlazi množenjem sa a^{-1}, da je

$$a = a^{-1} \quad , \quad b = b^{-1} \quad , \quad c = c^{-1} \qquad (7)$$

t. j., da je svaki elemenat jednak svome inverznom elementu (svaka od transformacija (1) jednaka je svojoj inverznoj transformaciji). Ako su s, s_1 i s_2 bilo koja tri elementa te grupe to iz

$$s_1 s = s_2 \qquad (8)$$

izlazi množenjem sa s zbog $s^2 = e$

$$s_2 s = s_1 . \qquad (9)$$

Druga je jedna mogućnost realizacije ove grupe, da njezine elemente smatramo permutacijama, a produkt dvaju elemenata onom permutacijom, koja odgovara uzastopnom izvođenju dotičnih dviju permutacija. Neka dakle elementi e, a, b, c grupe znače stanovite permutacije četiriju brojaka 1, 2, 3, 4, i to:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix} \qquad (10)$$

ili, ako permutacije rastavimo u cikle:

$$(1)\,(2)\,(3)\,(4)\ ;\ (12)\,(34)\ ;\ (13)\,(24)\ ;\ (14)\,(23)\,. \qquad (11)$$

Jediničnom elementu odgovara identična permutacija. I ovdje možemo lako provjeriti ispravnost relacija (2) do (9).

Za naše svrhe nam ne treba nikakva realizacija grupe, nego ćemo se služiti apstraktnom četvornom grupom s elementima e, a, b, c, koji zadovoljavaju relacije (2) do (9).

Razmotrimo sad neku mrežu, koja je razapeta (bez križanja bridova) na nekoj plohi, i pretpostavimo, da joj se oka daju obojiti sa četiri boje. Nazovimo te boje slovima e, a, b, c, t. j. nadomjestimo ih elementima naše grupe, a pridajmo svakom bridu onaj elemenat, koji je produkt elemenata susjednih oka. U svakom čvorištu sastaju se tri oka, koja očito moraju biti raznobojna, jer svako graniči sa svakim. Za njihove boje postoje četiri mogućnosti: e, a, b; e, a, c; e, b, c; a, b, c. Tvorimo li u svakoj od tih mogućnosti sve produkte od po dva elementa, dobijemo prema (3), (4), (5) svaki puta elemente a, b, c. Na bridovima se dakle javljaju samo tri elementa i to na bridovima svakog čvorišta tri razna. Time je obojenje bridova trima bojama provedeno. Iz rješivosti problema četiriju boja za oka slijedi dakle rješivost problema triju boja za bridove, dakle »rješivost« mreže, i to na bilo kakvoj plohi, ne samo na kugli.

Obrat je teže dokazati i vrijedi samo na plohama s topološkim svojstvima kugle, dok na pr. na torusu općenito ne vrijedi. Iznosimo najprije vrlo elegantni dokaz, koji je Errera dao u svojoj tezi[11]).

Tipično je topološko svojstvo kugle, da zatvorena krivulja, koja sama sebe ne siječe, rastavlja tu plohu u dva zasebna dijela (na torusu to primjerice ne vrijedi uvijek). Ako zamislimo na kugli n takvih zatvorenih krivulja, koje se ne sijeku ni međusobno ni same sebe, onda se cijela kuglina ploha može obojiti dvjema bojama, recimo žutom i zelenom, tako, da se uz svaku krivulju nalaze područja razne boje. To se uviđa lako potpunom indukcijom. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi zbog spomenutog svojstva kugle. Ako je obojenje provedeno za n krivulja, pa dodamo $(n + 1)$-tu krivulju, koja se sva nalazi u području jedne boje, jer ne siječe nijednu drugu krivulju, onda ta krivulja cijelu kuglu rastavlja u dva područja. U jednom od tih područja permutiramo boje, t. j. stavimo zelenu, gdje je bila žuta, i obrnuto. Time je očito postignuto traženo obojenje za $n + 1$ krivulja, i potpuna indukcija je provedena.

U riješenoj sfernoj mreži tvore crveno-bijeli izmjenični krugovi zatvorene krivulje, koje se ne sijeku, pa možemo kuglu obojiti dvjema bojama A i B. Crveno-plavi izmjenični krugovi rastavljaju kuglu na neka druga područja, koja obojimo bojama C i D. Time se svagdje na kugli nalaze dva sloja boje jedan iznad drugoga. Oka mreže su dakle obojena kombinacijama AC, BC, AD i BD. Ni uz koji brid ne može se s obih strana nalaziti ista kombinacija boja, jer svaki brid pripada ili crveno-bijelom ili crveno-plavom izmjeničnom krugu, ili, ako je crven, jednom i drugom takvom krugu. U prvom slučaju su prve boje u kombinacijama različite, u drugom slučaju druge, a u trećem i prve i druge. Smatramo li te četiri kombinacije boja novim bojama, to je traženo obojenje oka provedeno. Vidi se, da u dokaz bitno ulazi tipično topološko svojstvo kugle.

Dajemo još jedan drugi dokaz, koji je srodan dokazu, što ga je dao Wernicke[12]). Za to trebamo najprije jedan pomoćni stavak.

Presijecimo neku riješenu prostornu mrežu zatvorenom plohom, koja prostor dijeli u dva zasebna dijela. Ta ploha ne mora imati topološka svojstva kugle. Može to biti na pr. i torus. Pretpostavljamo, da ploha ne prolazi nijednim čvorištem i da s bridovima ima konačan broj zajedničkih točaka, u kojima bridovi tu plohu probadaju, t. j. susjedne točke sjecišta na bridu nisu sve s iste strane plohe. Ta sjecišta neka su obojena bojom brida, na kojemu leže. Neka je n_1 broj crvenih, n_2 broj bijelih i n_3 broj plavih sjecišta. Zatvorena krivulja sjeći će plohu u tâkom broju točaka, jer polazeći s jedne točke na krivulji izvan plohe moramo obilazeći krivulju poslije svakog ulaska u unutrašnjost plohe opet iz nje izaći, da se konačno vratimo k toj polaznoj točki izvan plohe. Sjecišta ovako tvore parove i njihov je broj tak. Ako krivulja uopće ne siječe plohu, broj sjecišta je nula, što možemo također smatrati takim brojem. Razmatramo li sad crveno-bijele izmjenične krugove naše mreže, to je broj sjecišta svakog pojedinog, dakle i svih takvih krugova s plohom tak. No to su baš sva crvena i bijela sjecišta, dakle

$$n_1 + n_2 \equiv 0 \pmod 2) . \tag{12}$$

Analogno je

$$n_2 + n_3 \equiv 0 \pmod 2) . \tag{13}$$

$$n_1 + n_3 \equiv 0 \pmod 2) . \tag{14}$$

Tvorimo li razlike od po dvije takve kongruencije, izlazi lako

$$n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \pmod 2), \tag{15}$$

a dodavši $n_3 = n_3$ kongruenciji (12) dobijemo konačno

$$n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \equiv N \pmod 2) , \tag{16}$$

ako je $N = n_1 + n_2 + n_3$ ukupni broj svih sjecišta. Riječima to znači: Prema tome, da li je ukupni broj N svih sjecišta tak ili lih, sva su tri broja n_1, n_2, n_3 crvenih, bijelih i plavih sjecišta taka, odnosno liha.

Za slučaj sferne mreže možemo zatvorenu plohu nadomjestiti zatvorenom krivuljom na kugli, koja kuglinu plohu, na kojoj je mreža razapeta, dijeli u dva zasebna dijela.

Neka je sad zadana rješiva sferna mreža s bridovima obojenim bojama a, b, c, koje ujedno smatramo elementima naše grupe od četiri elementa. Da se oboje oka, počnemo jednim okom i damo mu po volji jednu od četiriju boja e, a, b, c. Od toga oka prelazimo postepeno na druga oka i prelazeći brid množimo elemenat (boju) s_1 dotičnog oka elementom s toga brida. Dobiveni produkt s_2 smatramo bojom susjednog oka, na koje smo došli. Taj je elemenat uvijek različit od s_1, jer je s različit od jediničnog elementa e, kojega na bridovima nema. Dobijemo dakle s obih strana nekog brida razne elemente (boje) oka. Relacije (8) i (9) kazuju, da je svejedno u kojem se smjeru neki brid prekorači. Ovako možemo postepeno dobiti boje svih oka, samo treba još istražiti, da li ne može doći do kontradikcije, ako do nekog oka dođemo dvjema raznim putovima, t. j. da li neko oko dobije isti elemenat (boju) bez obzira na to, kojim smo putem do njega došli.

Neka je dakle polazno oko P_1 spojeno s nekim drugim okom P dvjema raznim putovima, koji ne prolaze čvorištima, a zajedno tvore zatvorenu krivulju. Pretpostavljamo, da se putovi ne sijeku, jer ih inače možemo rastaviti u više zatvorenih krivulja i na svaku primijeniti ovaj dokaz. Idući od oka P_1 prvim putom do oka P prekoračili smo stanovit broj bridova i množili elemenat s_1 oka P_1 elementima tih bridova. Njihov produkt neka je p_1, tako da bi oko P dobilo elemenat

$$s_I = s_1 p_1 \tag{17}$$

Po drugom putu neka je produkt elemenata bridova p_2, tako da bi sad oko P dobilo elemenat

$$s_{II} = s_1 p_2 \tag{18}$$

Neka zatvorena krivulja tvorena od tih dvaju putova siječe svega n_1 bridova s elementom a, n_2 bridova s elementom b, a n_3 bridova s elementom c. Onda je

$$p_1 p_2 = a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} \tag{19}$$

Ako je ukupni broj siječenih bridova tak, onda su prema prije izvedenom stavku sva tri eksponenta n_1, n_2, n_3 taka, a tâka potencija bilo kojeg elementa grupe daje prema (2) jedinični elemenat e, dakle je u tom slučaju

$$p_1 p_2 = e\ . \tag{20}$$

Ako je ukupni broj sjecišta lih, sva su tri broja n_1, n_2 n_3 liha, t. j.

$$n_1 = 2m_1+1,\ n_2 = 2m_2+1,\ n_3 = 2m_3+1. \tag{21}$$

Dakle, uzevši u obzir ispravnost komutativnog zakona prema (3), (4), (5),

$$\begin{aligned} p_1\ p_2 &= a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} = a^{2m_1+1}\ b^{2m_2+1}\ c^{2m_3+1} = \\ &= a^{2m_1}\ b^{2m_2}\ c^{2m_3}\ abc = abc \end{aligned} \tag{22}$$

a to zbog (6) opet daje relaciju (20), koja prema tomu vrijedi u svakom slučaju. Množenjem (17) i (18) dobijemo s obzirom na (2) i (20)

$$s_I\, s_{II} = e, \tag{23}$$

a množenjem ove relacije sa s_{II} izlazi s obzirom na (2)

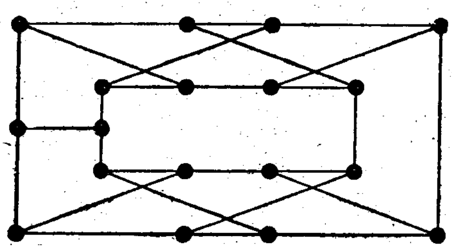
$$s_I = s_{II}\ , \tag{24}$$

čime je dokaz proveden.

Spomenuti dokaz Wernickeov razlikuje se od našeg po tom, što Wernicke zatvorenu krivulju, tvorenu dvjema putovima, kontinuiranom deformacijom steže na jednu točku, oslobađajući se tako eventualnih čvorova unutar krivulje, dok smo mi tome izbjegli služeći se stavkom izraženim relacijom (15), koji će biti od važnosti i za druga istraživanja, osobito za ispitivanje rješivosti prostornih mreža. I Wernicke se služi Kleinovom grupom, ali njezine elemente interpretira kao permutacije (11). — Boje oka, nazvane brojkama 1, 2, 3, 4, podvrgava kod prijelaza preko bridova permutacijama, koje su umjesto boja pridružene pojedinim bridovima.

Usporedi li se Errerin dokaz s našim, to se vidi, da je prvi dokaz kraći i jednostavniji, dok se u našem dokazu jasnije očituje značenje, koje ima karakteristično topološko svojstvo kugle za provedivost obojenja oka sa četiri boje.[13])

Na kraju još nekoliko riječi o nerješivim mrežama. Može se pokazati, da se nerješiva mreža, u kojoj se pojavljuju dvokuti, trokuti i četverokuti (dvostruko spojena čvorišta tvore dvokute, a trokuti i četverokuti su trojke odnosno četvorke čvorišta, koja su ciklički vezana bridovima) može reducirati, t. j. ispuštanjem jedne stranice (brida) tih likova dobije se jednostavnija mreža, koja je također nerješiva. No ima i nerješivih mreža, koje nemaju dvokuta, trokuta i četverokuta, ne daju se presjecanjem jednoga, dvaju ili triju bridova rastaviti u dva dijela, a kompliciranije su od Petersenove mreže (sl. 1). Dajemo u sl. 2 primjer takve mreže sa 18 čvorišta, koja je dobivena spajanjem dviju Petersenovih mreža uz izbacivanje dvaju čvorišta. Dokaz, da je ta mreža zaista nerješiva, prepuštamo čitaocu.*)



Sl. 2.

Dosada su razni autori u glavnom istraživali samo sferne mreže, nastojeći dokazati, da su rješive. Za nesferne mreže su na temelju Petersenovog primjera već znali, da nisu sve rješive. No bilo bi zanimljivo istražiti i nerješive mreže. Kad bi uspjelo te mreže potpuno obuhvatiti i klasificirati, možda bi se dalo ustanoviti, da li među njima ima sfernih, pa bi onda tim putom bio riješen problem četiriju boja.

[1]) Stereografska projekcija daje mogućnost prijelaza od kugle na ravninu i obrnuto, pa su za naš problem te dvije plohe istog značenja.

[2]) Kempe: On the geographical problem of the four colours, Am. J. of Math., II, (3), 1879, str. 193—200.

Heawood: Map Colour Theorem, Quart. J. of Math. 1890, str. 332—338. — On the 4-colour Map theorem, Quart. J. of. Math. 1898, str. 270—285.

*) Ako koji od naših čitalaca uspije to spretno dokazati, neka nam pošalje dokaz, pa ćemo ga objelodaniti. (Op. ur.).

Rademacher - Töplitz: Von Zahlen und Figuren, Springer, Berlin, 1933, str. 62—70.

[3]) Cayley: On the colouring of maps, Proc. of the London Math. Soc., 1878, str. 148. — Proc. of the Royal Geogr. Soc. 1879, str. 259—261.

[4]) Vidi pod [2]).

[5]) Tait: Note on a Theorem in Geometry of Position, Trans. of the R. Soc. Edinburgh, XXIX, 1880, str. 657—660. — On the colouring of maps, Proc. of the R. Soc. Edinburgh, X, 1880, str. 501—503.

[6]) Heawood: Map Colour Theorem, vidi pod [2]).

[7]) Pobliže o tom na pr. u Hilbert — Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie, Springer, Berlin 1932, str. 294—300.

[8]) Tait: Note on a Theorem in Geometry of Position, vidi pod [5]).

[9]) Petersen: Sur le théorème de Tait, Intermédiaire des Mathématiciens, 1898, str. 225—227.

[10]) Tu ekvivalenciju je ustvrdio Tait: On the colouring of maps, vidi pod [5]).

[11]) Errera: Du coloriage des cartes et de quelques questions d'analysis situs, Thèse, Paris 1921, str. 50.

[12]) Wernicke: Über den kartographischen Vierfarbensatz, Math. Annalen, 58, 1904, str. 413—426, navlastito 415, 416.

[13]) Autor je svoj dokaz našao neovisno i tek naknadno upoznao Errerin i Wernickeov dokaz.

Čitaocima, koji se zanimaju za taj krug problema, preporučamo ovu literaturu:

Errera, vidi pod [11]).

Sainte-Laguë: Les réseaux (ou graphes), Mémorial des sc. math. XVIII, Paris, 1926.

Sainte-Laguë: Géométrie de situation et jeux, Mém. sc. math. XLI, Paris 1929.

König: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe) Leipzig, Akad. Verlagsges. 1936.

Reidemeister: Einführung in die kombinatorische Topologie, Vieweg, Braunschweig 1932 (»Die Wissenschaft« Bd. 86).

Dehn u. Heegard: Analysis situs, Enz. d. math. Wiss. III: Bd.: Geometrie I. Teil, 1. Hälfte, 1907.

Résumé

LE PROBLÈME DES QUATRE COULEURS*)

Par

Danilo Blanuša, Zagreb

Après les généralités et un coup d'oeil historique l'attention est portée sur l'équivalence connue du problème des quatre couleurs pour les faces d'un réseau cubique sphérique et du problème des trois couleurs pour les arêtes d'un tel réseau. L'auteur donne une démonstration de cette équivalence, basée sur la considération du groupe de Klein (Vierergruppe), et la

compare avec les démonstrations du même théorème d'Errera et de Wernicke.

Étant donné un réseau dont les arêtes sont coloriées à l'aide des trois couleurs *a, b, c,* on peut colorier les faces du réseau en leur donnant lès quatre couleurs *e, a, b, c* que nous considérons comme éléments d'un groupe abstrait (le groupe connu de Klein) satisfaisant aux relations (2) à (9), *e* étant l'élément unité qui n'est pas utilisé pour le coloriage des arêtes. Ayant choisi l'élément (la couleur) d'une face initiale, nous passons à une face voisine en multipliant cet élément par l'élément de l'arête franchie qui diffère de l'élément unité; donc la couleur obtenue n'est pas la même et les faces ont reçu des couleurs différentes. En continuant ce procédé nous pouvons colorier toutes les faces. Il faut montrer qu'il n'y a pas de contradiction si l'on parvient à une certaine face par deux chemins différents. Il est aisé de voir qu'il n'y aura pas de contradiction si le produit de tous les éléments *a, b, c* des arêtes coupées par les deux chemins est égal à l'unité *e* et que cette condition est nécessaire.

Afin d'établir cette égalité, nous nous appuyons sur le lemme suivant:

Étant donné un réseau cubique résoluble (c'est-à-dire admettant le coloriage de ses arêtes par trois couleurs), nous le coupons par une surface fermée qui divise l'espace en deux parties séparées et nous supposons que la surface ne passe par aucun sommet du réseau. Aux points d'intersection nous attribuons les couleurs des arêtes coupées. Soient n_1, n_2, n_3 les nombres des points d'intersection de trois couleurs différentes et N leur somme. Alors, les trois nombres n_1, n_2, n_3 sont pairs ou impairs selon que leur somme N est paire ou impaire.

Pour démontrer ce lemme, il suffit de remarquer que les cycles alternatifs formés par les arêtes de deux couleurs coupent la surface en nombres pairs de points, ce qui donne les congruences (12), (13) et (14), d'où s'en suit la relation (15) et finalement (16), ce qui équivaut à notre lemme.

Lorsqu'il s'agit d'un réseau sphérique, on peut remplacer la surface fermée par une courbe fermée sur la sphère qui divise le réseau déployé sur la sphère en deux parties séparées.

Les deux chemins dont nous avons parlé forment une telle courbe, pourvu que les chemins ne se coupent pas. S'il se coupent, on pourra les décomposer en plusieurs courbes fermées sans points doubles. La démonstration cherchée est maintenant immédiate, car les arêtes coupées par les deux chemins auront les couleurs *a, b, c* et en vertu du lemme démontré les nombres des facteurs *a, b, c* du produit des éléments de ces arêtes seront tous pairs ou tous impairs, ce qui donne toujours l'unité *e* en vertu des relations (2), (6), (22).

Quant à la démonstration de Wernicke, elle est effectuée à l'aide d'un groupe de permutations qui est une réalisation du groupe abstrait que nous utilisons. Le lemme démontré nous a permis d'éviter le procédé de déformation continue qu'emploie Wernicke pour resserrer successivement la courbe fermée à un point. Ce lemme pourra être employé aussi dans d'autres recherches dans ce domaine.

La démonstration élégante d'Errera est plus courte et plus simple, mais nous croyons que notre procédé éclaircit mieux le rôle de la propriété topologique fondamentale de la sphère, à savoir qu'une courbe fermée divise la sphère en deux parties séparées.**)

Quant aux réseaux irrésolubles, nous donnons — hors de l'exemple connu de Petersen (fig. 1) — l'exemple d'un réseau irrésoluble à 18 sommets qui ne contient ni digones, ni triangles, ni quadrilatères et qu'on on ne peut pas décomposer en deux parties séparées en coupant une, deux ou trois arêtes (fig. 2).

---

*) Colloque mathématico-physique du 26 septembre 1945.

**) L'auteur a trouvé sa démonstration avant de connaître celles de Wernicke et d'Errera.