

IN MEMORIAM DOC. DR. SC. ANTE MIMICA
(SPLIT, 20. 1. 1981. – MIMICE 9. 6. 2016.)



Nakon izuzetno hrabre dvogodišnje borbe sa zloćudnim tumorom, napustio nas je 9. lipnja 2016. naš dragi kolega i prijatelj doc. dr. sc. Ante Mimica. I u razdoblju bolesti Ante je s velikom energijom nastavio znanstveni i nastavni rad, te svojom vedrinom i optimizmom davao nadu svima koji su ga poznavali.

Ante Mimica je rođen 20. siječnja 1981. godine u Splitu. Osnovnu školu Josipa Pupačića u Omišu pohađao je od 1987.-1995., a III. Gimnaziju u Splitu od 1995.-1999. Također je završio srednju glazbenu školu Josipa Hatzea u Splitu, smjer klavir. U rujnu 1999. godine upisao je studij matematike na PMF-MO u Zagrebu. Diplomirao je 2003. godine na smjeru Matematička statistika i računarstvo diplomskim radom *Slučajne varijable u globalnim NPC prostorima* pod mojim mentorstvom. Rad je napisan po članku K.-T. Sturm, *Nonlinear martingale theory for processes with values in metric spaces with nonpositive curvature*, Ann. Probab. (2002) 1195–1222. Već tada, kao student, Ante je pokazao sposobnost čitanja, razumijevanja i interpretiranja vrlo recentnih i složenih znanstvenih rezultata.

2004. godine Ante Mimica se zaposlio na PMF-MO kao znanstveni novak i iste godine upisao doktorski studij. Nastavio je raditi sa mnom te je doktorirao 15. prosinca 2009. godine disertacijom *Harnack inequality for some Lévy processes*. U povjerenstvu za ocjenu i obranu bili su profesori Hrvoje Šikić sa

PMF-MO i Renming Song sa University of Illinois. Područje Antine disertacije pripada teoriji vjerojatnosti, odnosno preciznije vjerojatnosnoj teoriji potencijala. Ante je prvenstveno bio zainteresiran za harmonijske funkcije raznih Markovljevih procesa, te je proučavao Harnackovu nejednakost za takve funkcije i njihovu regularnost. Činjenica da su infinitezimalni generatori promatranih slučajnih procesa integro-diferencijalni operatori svrstalo je Antin rad i u područje matematičke analize te djelomično i u područje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Također je studirao Greenovu funkciju i prijelazne vjerojatnosti, ili drugim jezikom, toplinske jezgre, tih procesa. Iz disertacije su proizašla tri rada, [1], [2] i [4]. Rezultati koje je dobio privukli su pažnju raznih istraživača, posebno profesora Moritza Kassmanna sa Universität Bielefeld u Njemačkoj i profesora Panki Kima sa Seoul National University, Južna Koreja, s kojima je ubrzo počeo suradnju.

Početak 2011. godine Ante Mimica je otišao na Sveučilište u Bielefeldu kao postdoktorand u International Graduate College *Stochastics and Real World Models*, zajednički program Akademije znanosti u Pekingu i Matematičkog fakulteta u Bielefeldu. Mentor mu je bio Moritz Kassmann. Ante je u Bielefeldu proveo dvije godine i ostavio neizbrisiv trag u srcima suradnika. Osim što je intenzivno nastavio istraživački rad i napisao utjecajan rad [5] s Kassmanom, pomagao je doktorskim studentima, pjevao u sveučilišnom zboru u Bielefeldu, te se pridružio i trenirao trkački tim fakulteta koji je za vrijeme Antinog boravka dva puta pobijedio na tradicionalnoj godišnjoj sveučilišnoj utrci. Za vrijeme boravka u Bielefeldu, Ante je po prvi put posjetio Seul, Južna Koreja, i započeo važnu suradnju s Panki Kimom koja je rezultirala radovima [3] i [7].

U prosincu 2012. godine Ante se vratio u Zagreb gdje je nastavio raditi na PMF-MO, prvo kao viši asistent, a u travnju 2013. izabran je u znanstveno-nastavno zvanje docenta kao jedan od 20 najizvrsnijih znanstvenih novaka u Hrvatskoj. Tokom 2013. godine po prvi put smo surađivali na zajedničkom istraživanju iz čega su proizašli radovi [8] i [9].

Za svoj znanstveni rad Ante Mimica dobio je 2013. godine Nagradu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Osim znanstvenog rada, Ante je sve vrijeme koje je proveo na PMF-MO veliku važnost polagao i u nastavne aktivnosti. Svake godine je bio jedan od najbolje ocijenjenih asistenata, te bi za svaki novi kolegij iz kojeg bi dobio vježbe odmah napisao interna skripta. Tako su nastali rukopisi [a]-[d] koje studenti i sada koriste.

Potkraj 2013. godine Ante se učlanio u Akademski zbor Ivan Goran Kovačić u kojem je s velikim entuzijazmom pjevao dvije sezone.

Ante Mimica obolio je u veljači 2014. godine. Dijagnoza zloćudnog tumora bio je šok za sve nas koji smo ga poznavali, a sigurno najveći šok za njega samog. No, Ante to nikad nije pokazivao. Nakon operacije hrabro je podnio kemoterapiju i radijaciju, te se brzo vratio na posao i nastavio raditi još jačim

tempom nego prije. U ljeto 2014. završio je prvu verziju rada s Moritzom Kassmannom o intrinzičnim svojstvima skaliranja. Taj rad je imao vjerojatnosni pristup. Praktički iste rezultate dobili su neposredno nakon toga i analitičkim pristupom. Oba pristupa su na sugestiju urednika časopisa u koji je poslana prva verzija rada, ujedinjena, te je nastao rad [12], *Intrinsic scaling properties for nonlocal operators*, objavljen u jednom od najprestižnijih svjetskih časopisa *Journal of the European Mathematical Society*. To je svakako jedan od dva Antina najznačajnija rada. Drugi najznačajniji rad je [11], *Heat kernel estimates for subordinate Brownian motions*, u kojem je uspješno riješio problem koji ga je okupirao još od doktorata. Također je započeo nova istraživanja koja su rezultirala radovima [10] i [13]. I dalje je surađivao s Panki Kimom, počeo suradnju s N. Sandrićem i R. Schillingom, te pomagao doktorskom studentu S. Šebeku. Te aktivnosti rezultirale su radovima [14]-[16] koji su predani na objavljivanje nakon njegove smrti.

Nažalost, bolest je išla svojim neumitnim tokom. U rujnu 2015. Ante je imao drugu operaciju, a u veljači 2016. i treću. Tada se tumor razbuktao, te je Ante posljednje mjesece proveo u roditeljskoj kući u Mimicama, uz neprestanu brigu i njegu majke i oca. Nekoliko dana prije smrti saznalo se da je Ante dobitnik nagrade Hrvatskog matematičkog društva mladom matematičaru. Nagrada mu je dodijeljena za znanstveni doprinos teoriji potencijala Markovljevih procesa sa skokovima i teoriji integro-diferencijalnih operatora s naglaskom na jezgre kritično niske, odnosno kritično visoke singularnosti.

Opišimo ukratko glavne ideje i doprinose Antinog znanstvenog opusa. Promatramo integro-diferencijalni operator \mathcal{A} definiran na $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ s

$$(1) \quad \mathcal{A}u(x) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} (u(x+h) - u(x) - \langle \nabla u(x), h \rangle \mathbf{1}_{|h| \leq 1}) K(x, h) dh$$

gdje je $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow [0, \infty)$ jezgra simetrična u drugoj varijabli, $K(x, h) = K(x, -h)$. Uz neke uvjete na jezgru, dobro je definiran martingalni problem za \mathcal{A} , te postoji (čisto prekidan) Markovljev proces $X = (X_t, \mathbb{P}_x)$ kojem je \mathcal{A} infinitezimalni generator. U slučaju da K ne ovisi o x , pripadajući proces X je prostorno homogen, tj. Lévyjev. Uobičajene pretpostavke na jezgru K su tipa $K(x, h) \asymp |h|^{-d-\alpha}$, $\alpha \in (0, 2)$, ili općenitije, $c_1|h|^{-d-\alpha_1} \leq K(x, h) \leq c_2|h|^{-d-\alpha_2}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 2)$ za $|h| \leq 1$ ili za sve $h \in \mathbb{R}^d$. Uz takve pretpostavke operator \mathcal{A} (ili, ekvivalentno, proces X) ima red diferencijabilnosti α , te posjeduje jaka ili slaba svojstva skaliranja koja su izuzetno važna u dokazivanju raznih rezultata vezanih uz teoriju potencijala procesa X , odnosno rezultata vezanih uz rješenja integro-diferencijalnih jednadžbi. Primjeri takvih rezultata su Harnackova nejednakost i granična Harnackova nejednakost za nenenegativne harmonijske funkcije procesa X (tj. rješenja jednadžbe $\mathcal{A}u = 0$), ocjene Greenove funkcije i prijelazne vjerojatnosti (tj. toplinske jezgre) procesa X , te apriorne ocjene regularnosti harmonijskih funkcija.

Glavni znanstveni doprinos Ante Mimice sastoji se u proširenju takvih rezultata na integro-diferencijalne operatore čiji je red diferencijabilnosti manji (odnosno veći) od α za sve $\alpha \in (0, 2)$, tj. na jezgre $K(x, h)$ sa kritično niskom singularnosti (blizu $|h|^{-d}$) odnosno kritično visokom singularnosti (blizu $|h|^{-d-2}$). U slučaju simetričnih Lévyjevih procesa s regularno varirajućim karakterističnim eksponentom (u ∞), uobičajeni indeks $\alpha \in (0, 2)$ zamijenjen je s $\alpha = 0$ (kritično niska), odnosno s $\alpha = 2$ (kritično visoka singularnost).

U radovima [3] i [7] s Panki Kimom promatraju se subordinirana Brownova gibanja. Osnovna pretpostavka na Laplaceov eksponent ϕ subordinatora je određeni uvjet skaliranja na ϕ' (za razliku od uobičajenih uvjeta skaliranja na ϕ). Primjeri subordinatora koji zadovoljavaju dane pretpostavke su (iterirani) geometrijski stabilni subordinatori i relativistički geometrijski stabilni subordinatori kod kojih Lévyjeva mjera pripadajućih subordiniranih Brownovih gibanja ima kritično nisku singularnost, te također uobičajeni α -stabilni, $\alpha \in (0, 2)$ i njima bliski subordinatori. Glavni rezultat u [3] je Harnackova nejednakost invarijantna na skaliranje. Klasični dokaz Harnackove nejednakosti (za lokalne i nelokalne operatore) koristi Krylov-Safonovljevu nejednakost koja daje donju ocjenu vjerojatnosti pogađanja nekog skupa prije izlaska iz kugle koja ga sadrži pomoću Lebesgueove mjere tog skupa. Za operatore s kritično niskom singularnosti takva nejednakost ne vrijedi, te je Ante Mimica pronašao alternativni dokaz zasnovan na ocjeni Greenove funkcije $G_{B(0,1)}(x, y)$ za y blizu granice kugle. Vrlo važan rad [7] nastavlja i značajno proširuje [3]. Dane su oštre ocjene Greenove funkcije za $C^{1,1}$ otvorene skupove te je dokazana uniformna, invarijantna na skaliranje, granična Harnackova nejednakost s eksplicitnom stopom pada u $C^{1,1}$ otvorenim skupovima. To je definitivan rezultat koji u potpunosti i eksplicitno odgovara na pitanje brzine pada harmonijskih funkcija na granici skupa.

U radu [6] promatraju se subordinirana Brownova gibanja za koje je pripadajući Laplaceov eksponent sporo varirajući u beskonačnosti. Za takve procese ne vrijedi klasična Krylov-Safonovljeva nejednakost te stoga nije moguće dobiti apriorne ocjene za Hölder neprekidnost harmonijskih funkcija. Koristeći reprezentaciju harmonijskih funkcija pomoću Poissonove jezgre, te asimptotske ocjene Poissonove jezgre dobivene de Haanovom teorijom regularno varirajućih funkcija, Ante Mimica zaobilazi Krylov-Safonova i dokazuje apriorne ocjene regularnosti harmonijskih funkcija u terminima Laplaceovog eksponenta. Ideje iz tog rada nastavljaju se i kulminiraju u radu [12] u koautorstvu s Moritzom Kassmannom. Operatori koji se promatraju u tom radu su tipa (1), gdje je jezgra $K(x, h) \asymp |x|^{-d} \ell(|h|)$ (s konstantama koje mogu ovisiti o x), a funkcija ℓ zadovoljava neka slaba svojstva skaliranja. Najzanimljiviji primjeri takvih jezgri su jezgre s kritično niskom singularnosti. Autori izvode apriorne ocjene regularnosti harmonijskih funkcija klasičnim metodama parcijalnih diferencijalnih operadora i alternativno vjerojatnosnim metodama.

Ključan korak u dokazu je modificirana Krylov-Safonovljeva nejednakost u kojoj je Lebesgueova mjera zamijenjena mjerom koja ovisi o funkciji ℓ i dobro je prilagođena intrinzičnoj skali pripadajućeg Markovljevog procesa. Dobivene apriorne ocjene sadrže klasične ocjene za Hölder neprekidnost harmonijskih funkcija te ih značajno proširuju.

Radovi [1], [4] i [11] bave se operatorima kod kojih jezgra ima kritično visoku singularnost. Tipičan primjer je infinitezimalni generator Lévyjevog procesa s karakterističnim eksponentom

$$\Phi(x) = \frac{|x|^2}{\log(1 + |x|^2)} - 1$$

iz rada [4] gdje je dokazana Harnackova nejednakost (invarijantna na skaliranje) i apriorne ocjene Hölder neprekidnosti za pripadajuće harmonijske funkcije. Dokazi se zasnivaju na Krylov-Safonovljevoj nejednakosti kod koje je Lebesgueova mjera zamijenjena kapacitetom. U radu [1] promatraju se operatori tipa (1) gdje je $K(x, h) \asymp |h|^{-d-2} \log(2/|h|)^{-1-\beta}$, $|h| \leq 1$, $\beta \in (0, 1]$, te se daje gornja ocjena prijelaznih vjerojatnosti $p(t, x, y)$ za $|x - y| \leq 1$. Dijagonalna ocjena zasniva se na odgovarajućoj Nashovoj nejednakosti, a vandiagonalna na Davis-Carlen-Kusuoka-Stroockovoj metodi. Pitanje odgovarajuće donje ocjene bilo je otvoreno nekoliko godina. U slučaju subordiniranih Brownovih gibanja Ante Mimica je dao odgovor na to pitanje u radu [11] za subordinatore čiji Laplaceov eksponent zadovoljava slabe uvjete skaliranja u beskonačnosti. Dobivene su oštre ocjene prijelazne vjerojatnosti u terminima Laplaceovog eksponenta i Pruittove funkcije. Osim novih ocjena za jezgre kritično visoke singularnosti, rad daje alternativne dokaze otprije poznatih ocjena za slučaj klasičnog singulariteta tipa $|h|^{-d-\alpha}$, $\alpha \in (0, 2)$.

Opisani znanstveni doprinos Ante Mimice imao je velik odjek među istraživačima koji se bave vjerojatnosnom teorijom potencijala kao i među istraživačima u području parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. To se može vidjeti i iz citiranosti – u relativno kratkom razdoblju nakon objavljivanja radovi [3] i [7] citirani su 24 puta na MathSciNet-u i 48 puta na Google Scholar-u; poseban odjek imao je rad [12] koji je već prije objavljivanja na Google Scholar-u citiran 18 puta. O kvaliteti znanstvenog rada Ante Mimice govori i podatak da je bio pozvani predavač na četiri znanstvene konferencije (Koreja, Njemačka, Poljska), te je o rezultatima svog istraživanja govorio na još desetak znanstvenih skupova i sedam znanstvenih seminara u SAD-u, Kini, Njemačkoj, Poljskoj i Hrvatskoj.

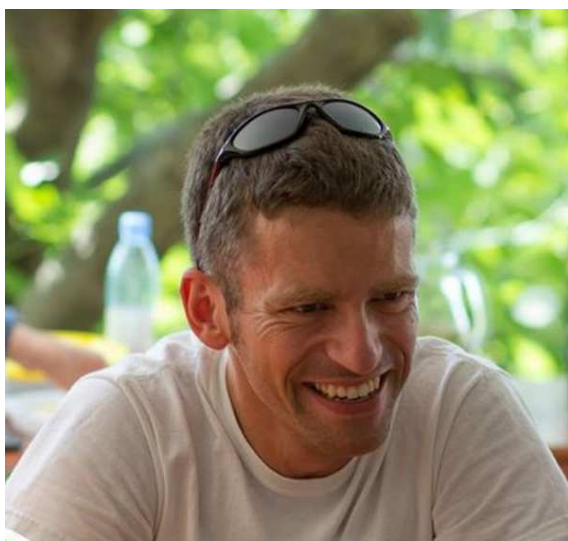
Ante je bio rado viđen sudionik konferencija. Osim što je držao odlična predavanja i često razgovarao o matematičkim problemima, navečer bi znao sjesti za klavir i svirati. Iako se uvijek žalio da baš nije u formi, razina njegovog sviranja jasno je ukazivala na njegovo klasično obrazovanje.

Osim matematike i glazbe, Antina velika ljubav bilo je trčanje. Počeo je rekreativno trčati negdje pri kraju ili po završetku fakulteta. Kao i svemu, i

trčanju je pristupio vrlo ozbiljno, te je kroz godine sve više napredovao. Trenirao je svakodnevno, trčeći po deset, petnaest, dvadeset kilometara dnevno. Trenirao je i na konferencijama, gdje bi se dizao prije svih kako bi već prije doručka stigao otrčati sat vremena. Od 2010. do 2013. trčao je na nekoliko maratona u Europi – u Berlinu, Amsterdamu, Beču, Hamburgu. Zadnji maraton koji je otrčao prije bolesti bio je u Ljubljani 27. listopada 2013. gdje je postigao svoj najbolji rezultat - 2:45:48. Tim rezultatom Ante se uvrstio na peto mjesto rang-liste maratonaca u Hrvatskoj za tu godinu.

Ante je bio prekrasno ljudsko biće – uvijek s osmijehom na licu i uvijek spreman pomoći. Njegov odlazak neizmjeriv je gubitak za hrvatsku i svjetsku matematičku zajednicu, a pogotovo za sve nas koji smo ga poznavali.

Zoran Vondraček



ZNANSTVENI RADOVI

- [1] A. Mimica. *Harnack inequalities for some Lévy processes*. Potential Anal. **32** (2010), 275–303.
- [2] A. Mimica. *Heat kernel estimates for jump processes with small jumps of high intensity*. Potential Anal. **36** (2012), 203–222.
- [3] P. Kim, A. Mimica. *Harnack inequalities for subordinate Brownian motions*. Electron. J. Probab. **17** (2012), no. 37, 1–23.
- [4] A. Mimica. *Harnack inequality and Hölder regularity estimates for a Lévy process with small jumps of high intensity*. J. Theor. Probab. **26** (2013), 329–348.
- [5] M. Kassmann, A. Mimica. *Analysis of jump processes with nondegenerate jumping kernels*. Stoch. Process. Appl. **123** (2013), 629–650.
- [6] A. Mimica. *On harmonic functions of symmetric Lévy processes*. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **50** (2014), 214–235.

- [7] P. Kim, A. Mimica. *Green function estimates for subordinate Brownian motions: stable and beyond*. Trans. Amer. Math. Soc. **366**(8) (2014), 4383–4422.
- [8] A. Mimica, Z. Vondraček. *Unavoidable collections of balls for isotropic Lévy processes*. Stoch. Process. Appl. **124** (2014), 1303–1334.
- [9] A. Mimica, Z. Vondraček. *Unavoidable collections of balls for censored stable processes*. J. Math. Anal. Appl. **419** (2014), 938–958.
- [10] A. Mimica. *Exponential decay of measures and Tauberian theorems*. J. Math. Anal. Appl. **440** (2016), 266–285.
- [11] A. Mimica. *Heat kernel estimates for subordinate Brownian motions*. Proc. London Math. Soc. **113**(5) (2016), 627–648.
- [12] M. Kassmann, A. Mimica. *Intrinsic scaling properties for nonlocal operators*. J. Eur. Math. Soc. **19** (2017), 983–1011.
- [13] A. Mimica. *On subordinate random walks*. Prihvaceno za objavljivanje u Forum Math. (2016).

PREDPUBLIKACIJE

- [14] P. Kim, A. Mimica. *Asymptotical properties of distributions of isotropic Lévy processes* (2016).
- [15] A. Mimica, N. Sandrić, R. Schilling. *Markov chain approximation of pure jump processes* (2016).
- [16] A. Mimica, S. Šebek, *Harnack inequality for subordinate random walks* (2017).

SKRIPTA

- [a] I. Geček Tuđen, A. Mimica, A. Tafro. *Vjerojatnost; primjeri i zadaci*, 70 str. (2009).
- [b] A. Mimica, M. Ninčević. *Statistika; primjeri i zadaci*, 144 str. (2009).
- [c] A. Mimica. *Matematička analiza I; primjeri i zadaci*, 49 str. (2010).
- [d] I. Gogić, A. Mimica. *Matematička analiza II; primjeri i zadaci*, 157 str. (2010).

POZVANA PREDAVANJA

- [1] *Continuity properties of harmonic functions for jump processes*, 5th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications, 5.-9. rujna 2011, Bonn, Njemačka
- [2] *Continuity properties of harmonic functions for jump processes*, Nonlocal Operators: Analysis, Probability, Geometry and Applications, 9.-14. srpnja 2012, Bielefeld, Njemačka
- [3] *Intrinsic scaling for nonlocal operators*, 7th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications, 6.-11. kolovoza 2014, Seul, Južna Koreja
- [4] *Heat kernel estimates for subordinate Brownian motions*, Probability and Analysis, 4.-8. svibnja 2015, Bedlewo, Poljska