IN MEMORIAM: STANKO BILINSKI (22.4.1909.—6.4.1998.)

Dana 8. travnja 1988. godine oprostili smo se na Mirogoju od dragog nam akademika Stanka Bilinskog, redovnog profesora Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u miru, koji je umro u Varaždinu 6. travnja.

Stanko Bilinski rođen je 22 travnja 1909. godine u Našicama. Klasičnu gimnaziju polazio je u Vinkovcima i Zagrebu. Diplomirao je 1932. g. na Filozofskom fakultetu u Zagrebu na grupi za teorijsku matematiku. Na istom je fakultetu stekao 1943. i doktorat iz filozofije iz područja matematičkih znanosti. Kao srednjoškolski profesor služio je od 1934. do 1940. g. na Franjevačkoj klasičnoj gimnaziji u Varaždinu i na gimnazijama u Skopju i Sušaku, a od 1940. g. do 1946. g. kao asistent na Geofizičkom zavodu u Zagrebu. 1946. g. izabran je na novoosnovanom Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu za asistenta Geometrijskog zavoda. Tu je 1948. g. postao docent, 1952. g. izvanredni, a 1956. g. redovni profesor. tijekom trideset godina obavljao je dužnost predstojnika Geometrijskog zavoda, dvije godine dužnost dekana fakulteta i osam godina dužnost direktora Instituta za matematiku Sveučilišta u Zagrebu. Godine 1963. izabran je za izvanrednog člana Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, a 1985. g. za redovnog člana. Od 1980. g. je dopisni član Matematičko-prirodoslovnog razreda Austrijske akademije znanosti. Dobitnik je dviju znanstvenih nagrada i to nagrade "Ruđer Bošković" za znanstveni rad iz područja prirodnih znanosti, a 1990. g. dodijeljena mu je "Nagrada za životno djelo". Od njegovih društvenih djelatnosti svakako treba istaći da je bio jedan od osnivača Društva matematičara, fizičara i astronoma Hrvatske i prvi tajnik tog Društva, a 1961. i 1962. g. i njegov predsjednik. Od 1952. do 1968. g. bio je član upravnog odbora Saveza društava matematičara i fizičara Jugoslavije. Godine 1954. i 1961. bio je jedan od članova u Internacionalnoj matematičkoj uniji, a 1964. g. u Uniji matematičara Balkana. Stanko Bilinski bio je i dugogodišnji (18 godina) glavni i odgovorni urednik časopisa "Glasnik matematički, fizički i astronomski". Tijekom 1967. i 1968. g. bio je član Republičkog Savjeta za znanstveni rad SRH. Svojim je radom i neposredno i posredno dao vidan doprinos razvoju i organizaciji znanstvenih djelatnosti i institucija u SRH i SFRJ.

Nakon što je 1946. g. bio izabran za asistenta Geometrijskog zavoda na kojem tada nije bilo popunjeno ni jedno radno mjesto, kao jedini nastavnik tog Zavoda vršio je sve dužnosti kako asistenta tako i predavača. Tako je u prvo vrijeme držao predavanja i vodio vježbe iz svih geometrijskih kolegija sve dok nisu bili izabrani novi asistenti, a kasnije i nastavnici. Njegovi ga se učenici sjećaju kao odličnog predavača, koji se isticao ne samo minucioznošću izlaganja, sistematičnošću već i odabirom interesantnih sadržaja svojih kolegija, koje je u ono vrijeme morao sam formirati. Tu je dolazila do izražaja njegova originalnost i kreativne sposobnosti. Uvijek je nastojao biti što razumljiviji, a posebno su njegove slušače fascinirale njegove ilustracije i crteži na ploči. To je bila prava škola zorne nastave. Njegova predavanja su za mnoge njegove učenike bila razlog što su zavoljeli geometriju i odlučili se za znanstveni rad baš u tom području. Bilinski je predavao i na ondašnjem postdiplomskom studiju, pa je kod njega magistrirao veći broj postdiplomanada, a doktoriralo je i šest doktoranada kojima je bio mentor.

Nemoguće je nabrojiti sve znanstvene skupove na kojima je Bilinski sudjelovao kao aktivni predavač. Među inim sudjelovao je referatima na Internacionalnim kongresima matematičara u Amsterdamu (1954), Edinbourghu (1958), Stockholmu (1962), Moskvi (1966) i Nici (1970). Osim toga bio je redoviti učesnik Austrijskih kongresa matematičara, koji uvijek imaju internacionalni karakter, te nacionalnih matematičkih kongresa pojedinih zemalja kao i mnogobrojnih simpozija u "Matematičkom istraživačkom institutu Oberwolfach". Od 1948. g. je redoviti učesnik Kongresa matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije. Kao predavač gostovao je na mnogim evropskim i domaćim univerzitetima.

Bilinski je objavio 53 rada (navedena u priloženom popisu radova), u domaćim i inozemnim publikacijama, a o njegovim radovima objavljeno je preko stotinu referativnih prikaza u svim najvažnijim referativnim žurnalima. U tim prikazima njegovi su radovi vrlo povoljno ocjenjivani i u mnogima od njih su recenzenti isticali njihov značaj za razvoj geometrije i na osnovi njih je S. Bilinski stekao visoka internacionalna priznanja.

Prema tematici njegovi se radovi mogu svrstati u ovih sedam skupina:

1 Teorija mreža i poliedara.
2 Primjene kinematičko-geometrijskih razmatranja na fizičke i geofizičke pojave.
3 Elementarna geometrija i primjena Ptolemejskih matrica u elementarnoj geometriji.
4 Neeuklidska geometrija.
5 Diferencijalna geometrija.
6 Pravčasta geometrija.
7 Primjene funkcionalnih jednadžbi i teorije invarijanata na geometrijske probleme.

Iz navedenog je očito da je ovako bogatu znanstvenu aktivnost S. Bilinskog na ovom mjestu nemoguće analizirati. Ne radi se ovdje samo o bogatstvu njegova opusa već i o dubini ideja prisutnih u njegovim radovima.

1. Prvoj skupini pripadaju radovi [2], [6], [9], [12], [23], [25] i [49]–[53]. Ne može se ovdje govoriti o svakom od tih radova. Stoga kažimo nešto više o radovima [6] i [25].

Rad [6] je doktorska disertacija S. Bilinskog. U njemu se istražuju homogene mreže ravnine. Treba svakako istaći da su do tada problemi homogenih razdioba ravnine s metričko-euklidskog i kristalografskog stanovišta bili riješeni, ali u drugim, metričkim ravninama i s općeg topološkog stanovišta, koje u sam problem dublje ulazi, rješenje nije bilo potpuno pa zapravo ni započeto. U dotadašnjim radovima bili su postavljeni samo neki nužni uvjeti egzistencije, a dovoljnih uvjeta kao i dokaza egzistencije nije bilo. Ovaj rad je prilog konačnom rješenju tog problema. Tu se mogućnostima egzistencije homogenih mreža pristupa s jednog jedinstvenog i općenitijeg stanovišta. Pri tome je autor aksiomatizacijom i aritmetizacijom problema razvio jednu opću metodu, koja se pokazala primjenjivom u svim neeuklidskim geometrijama pa i u kombinatornoj geometriji ploha, pa tako i u generaliziranoj teoriji poliedara. Ta je metoda dakle dozvolila da se odrede sve pravilne homogene mreže metričkih ravnina kao i sve kombinatorički pravilne homogene mreže.

Svakako valja istaći da iz rezultata u ovoj disertaciji izlazi da postoji svega 14 polupravilnih (Arhimedovih) poliedara. Nažalost, S. Bilinski je mislio da je to već davno poznati rezultat i nije ga jasno istakao. Stoga se danas postojanje četrnaestog Arhimedovog poliedra nepravedno pripisuje sovjetskom matematičaru V. G. Aškinuzeu. L. A. Ljusternik u svojoj monografiji *Выпуклые фигуры и многогранники*, ГИТТЛ, Москва, 1956. na str. 184 piše: "Značajno je da je u teoriji polupravilnih poliedara više od 2000 godina postojao defekt kojeg je tek nedavno uočio sovjetski matematičar V. G. Aškinuze, tj. da postoji četrnaesti polupravilni poliedar, koji se razlikuje od rombokubooktaedra samo time da mu je gornji dio koji se sastoji od 5 kvadrata i 4 jednakostranična trokuta zaokrenut za $\pi/4$. Upravo to je i bio razlog da se ta dva polupravilna poliedra geometrijski nisu razlikovali".

S. Bilinski je očito dakle bio prvi, koji je našao četrnaesti polupravilni poliedar i ne samo to već je dao i strogi dokaz da su to svi takvi poliedri.

Iz ove skupine svakako posebno treba istaći rad [25] o rombskim izoedrima. To je jedan od najvažnijih radova S. Bilinskog. Objasnimo potanje o čemu se ovdje radi. Naime izoedri su poliedri kojima su sve stranice međusobno kongruentni poligoni. U ovom se radu rješava problem određenja svih rombskih izoedara. Smatramo da dobiveni rezultat zaslužuje da skiciramo ideju koja je dovela do rješenja problema.

Da bi riješio taj problem S. Bilinski promatra poliedre jedne šire klase tzv. paralelogramske poliedre. To su oni poliedri kod kojih su plohe bilo kakvi paralelogrami. Oni pripadaju još jednoj široj klasi, koju je istraživao ruski geometar i kristalograf E. S. Fedorov i nazvao ih zonoedrima, jer su im plohe raspoređene u zone.

Kontrakcijom ili dilatacijom pojedinih zona moguće je svaki paralelogramski poliedar pretvoriti u njemu izomorfni rombski poliedar i obrnuto. Prema tome da se odrede svi rombski izoedri potrebno je najprije odrediti sve izogonalne sisteme pravaca, tj. takve skupove pravaca istog snopa kod kojih svaki pravac sa svakim drugim pravcem tog skupa zatvara jednaki kut. Pokazuje se da u euklidskom 3-dimenzionalnom prostoru postoje tri potpuna izogonalna sistema pravaca, tj. takvih sistema, kojima nije moguće dodati još jedan daljnji pravac, a da se izogonalnost ne naruši. Na ovim potpuno izogonalnim sistemima zasniva se egzistencija triju porodica rombskih izoedara. U svakoj od tih porodica, pošavši od poliedra s najvećim brojem ploha, svaki daljnji poliedar se dobiva iz prethodnoga eliminacijom pojedine zone. Očito je da su na taj način nađeni svi mogući rombski izoedri. Ne treba posebno istaći da je ovaj rezultat odmah bio zapažen u svijetu geometara, jer se 70 godina mislilo da su kod Fedorova navedeni svi rombski izoedri što je i on sam tvrdio. Taj rad S. Bilinskog je pokazao da osim već davno poznatog rombskog dodekaedra postoji još jedan, koji je od prvog metrički bitno različit i ne samo to, već je tu i dokazano da drugih rombskih izoedara ne može biti.

Da se ilustrira važnost ovog rada bit će najbolje da se poslužimo nekim citatima. U predgovoru Coxetera monografiji M. J. Wenninger, *Polyhedron models*, Cambridge Univ. Press, 1978, u kojem se ukratko skiciraju osnovne ideje klasične teorije poliedara, stoji (u slobodnom prijevodu): "Od vremena Descartesa mnogi veliki matematičari doprinijeli su razvoju ovog područja. Euler je otkrio i dokazao čuvenu formulu, koja povezuje broj vrhova, bridova i stranica konveksnog poliedra. Gauss je koristio nepravilni sferni peterokut (pentagrama mirificum) da objasni Napierovo pravilo iz sferne trigonometrije. Cauchy je dokazao da je svaki konveksni poliedar sa krutim stranicama, koji je gibljiv duž bridova, i sam krut. Hamilton je otkrio ikosijansku igru. Von Staudt je dao novi dokaz Eulerove formule. Schläfii je poopćio teoriju poliedara na n-dimenzionalni prostor. Klein je napisao monografiju *Vorlesungen über das Ikosaeder*, koja je bila od bitnog utjecaja na daljnji razvoj teorije poliedara. Fedorov se vratio Keplerovom problemu određivanja izozonoedara otkrivši jedan čudan spljošteni rombski ikozaedar, a tek nedavno je *Bilinski (1960 g.) kompletirao spisak našavši drugi rombski dodekaedar.*

Ovaj nam citat pokazuje u kakvom se "dobrom društvu" nailazi na ime profesora Bilinskog.

Evo citata i iz poznate monografije H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, (New York, 1973, str. 31):

"Rombski dodekaedar i triakontaedar otkrio je Kepler oko 1611. g. Prvi od ovih poliedara pojavljuje se u prirodi kao kristal granata. Točnije rečeno trebalo bi ga zvati "prvi rombski dodekaedar" jer je 1960. g. Bilinski otkrio da se jedan "drugi rombski dodekaedar" (čije stranice su istog oblika kao i one rombskog triakontaedra) može izvesti iz rombskog ikozaedra".

U članku K. Miyazaki-I. Takada, *Uniform Ant-hills in the World of Golden Isozonohedra*, Structural Topology 4 (1980), 21–30, su tzv. "zlatni izozonoedri" (kako ih je nazvao Coxeter, a otkrili su ih Bilinski, Fedorov i Kepler). U njihovu čast označeni su redom B_{12}, F_{20} i K_{30}.

Ovaj isti rad profesora Bilinskog citiran je i u poznatoj monografiji B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, Interscience Publ., London, New York, Sydney, 1967.

Nema danas monografije o poliedrima, gdje se ne spominju rezultati S. Bilinskog.

U ostalim radovima iz ovog područja S. Bilinski se bavi problemima morfoloških tipova Eulerovih poliedara. Daje jedno uređenje Eulerovih klasa tih poliedara i to dovodi u vezu s problemom bojenja ploha.

U novijim radovima [49]–[51] iz ove skupine S. Bilinski daje afino i topološko proširenje klasične ekviformne teorije poliedara pa se tako u tim radovima razmatraju neke važnije klase tih poliedara, tako napose klase kvaziregularnih i klase vitoperih generaliziranih arhimedovih poliedara, a radi se na izučavanju još nekih drugih klasa takvih poliedara. No cilj svih ovih razmatranja je rješavanje "Osnovnog problema arhimedovih poliedara", koji se može ovako formulirati: Koji su dovoljni uvjeti za ciklus C i za rod p da bi par $\{C; p\}$ određivao barem jedan Arhimedov poliedar". Do sada su nađena dva nužna uvjeta egzistencije Arhimedovog poliedra $\{C; p\}$, no još nije dokazana slutnja da ta dva nužna uvjeta zajedno čine i dovoljni uvjet njegove egzistencije.

2. U ovu skupinu pripadaju radovi [7], [8] i [14]. U radu [7] dano je jedno dinamičko tumačenje neobičnog oblika krivulje tlaka kod prolaza kumulonimbusa. U radu [8] se daje kinematičko objašnjenje pojave frontogeneze.

3. U ovu skupinu pripadaju radovi [10], [11], [18], [26], [29], [38], [39] i [40].

Najznačajniji u ovoj skupini je svakako rad [38]. Dobiveni lijepi rezultati zaslužuju da se sadržaj ovog rada malo detaljnije razmotri. U radu se promatra n-dimenzionalni prostor P_n sa pripadnom grupom transformacija G_n. Neka je dalje Q_m m-dimenzionalna mnogostrukost točaka, krivulja, ploha itd. smještena u P_n. Dakako da Q_m može biti i čitav prostor P_n. Označimo sa Γ_m grupu transformacija od Q_m induciranu grupom G_n.

Svaki konačan skup $\{e_1, \ldots, e_n\}$ elemenata ("točaka") skupa Q_m zove se figura. Uvode se dvije vrste figura, tzv. "D-figure" i "S-figure". D-figura $\Phi[i,j]$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant b$ dobije se iz osnovne figure $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_b\}$, $b \geqslant 4$ tako da se iz G isključi par $\{g_i, g_j\}$, tj.

$$\Phi[i,j] = G \setminus \{g_i, g_j\}.$$

S-figura $\psi[i,j]$, $i < j$ dobije se polazeći od osnovne figure G tako da se njezine točke rastave u dva podskupa

$$F = \{g_{\mu_1}, g_{\mu_2}, \ldots, g_{\mu_c}\}, \quad c \geqslant 0$$

kojega se elementi smatraju fiksnim i podskup

$$V = \{g_{\nu_1}, g_{\nu_2}, \ldots, g_{\nu_d}\}, \quad d \geqslant 4$$

koji se sastoji iz varijabilnih elemenata. Dakle je,

$$\psi[i,j] = F \cup \{g_i, g_j\}.$$

Dalje se uvodi pojam Ptolomejske funkcije kao realne funkcije $a_{ij} = f(i,j)$ definirane na skupu $N_1 \times N_1$, gdje je $N_1 = \{1, 2, \ldots, b\}$, $b \geqslant 4$, takve da za sve $i, j, k, l \in N_1$ vrijedi tzv. Ptolomejska relacija

$$a_{ij}a_{kl} + a_{ik}a_{lj} + a_{il}a_{jk} = 0$$

i koja u svojem području definicije ne iščezava identički.

Svaki element od Q_m određen je sa m nehomogenih koordinata, pa je D-figura $\Phi[i,j]$ određena nizom

$$u_1^1, \ldots, u_m^1, u_1^2, \ldots, u_m^2, \ldots, u_1^b, \ldots, u_m^b$$

svojih koordinata, Dakako da u ovom nizu nema koordinata kojima je jedan od gornjih indeksa i ili j. Ako je osnovna figura fiksirana onda je taj niz posve određen. Neka je

$$a_{ij} = f(u_1^1, \ldots, u_m^1, u_1^2, \ldots, u_m^2, \ldots, u_1^b, \ldots, u_m^b)$$

realna funkcija. Za a_{ij} se kaže da je Ptolomejska funkcija ako su zadovoljeni ovi uvjeti

a) a_{ij} je invarijanta grupe transformacija Γ_m,

b) a_{ij} je relativna invarijanta permutacije gornjih indeksa $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, b$,

c) a_{ij} je Ptolemejska relacija.

Analogno se (sa nekim modifikacijama) definira Ptolomejska funkcija S-figure $\psi[i,j]$. Dokazuje se da ako je a_{ij} Ptolemejska funkcija neke D-figure, onda je ona takođe Ptolemejska funkcija figure koja se dobije kada se ona shvati kao S-figura i obratno. To onda omogućuje da se naprosto govori o Ptolemejskoj funkciji figure. Kososimetrične matrice ranga 2 zovu se Ptolomejske matrice.

Veza između Ptolemejskih matrice i funkcija dana je ovim teoremom:

Realna funkcija $a_{ij} = f(i,j)$ definirana na skupu $N_1 \times N_1$, gdje je $N_1 = \{1, 2, \ldots, b\}$, $b \geqslant 4$ je Ptolemejska funkcija onda i samo onda ako je matrica (a_{ij}) kososimetrična i ima rang 2.

Razvija se teorija takvih matrica i bitno koristi u daljnjem tijeku rada.

Relativni volumen simpleksa euklidskog ili ekviafinog prostora dimenzije $n \geqslant 1$ je Ptolemejska funkcija figure koja se sastoji iz njegovih vrhova.

Iz ovog teorema i njegovih ekvivalenata za D-figure i S-figure sada se kao specijalni slučajevi dobivaju mnogi već prije poznati teoremi elementarne geometrije.

Za $n = 1$ dobiva se da za četiri točke A, B, C, D orijentiranog pravca vrijedi

$$AB \cdot CD + AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0,$$

a to je dobro poznati Eulerov teorem.

Za $n = 2$ dobiva se ovaj teorem Mongea:

Ako za pet točaka $T_1, T_2, \ldots, T_5$ ravnine označimo sa F_{ij} orijentiranu površinu trokuta $T_iT_jT_5$, $i,j \in \{1, 2, 3, 4\}$, onda vrijedi

$$P_{12}P_{34} + P_{13}P_{42} + P_{14}P_{23} = 0.$$

Za $n = 3$ dobiva se poznati Möbiusov teorem:

Ako za šest točaka A, B, C, D, E i F, trodimenzionalnog prostora, označimo sa $ABCD$ orijentirani volumen tetraedra razapetog točkama A, B, C i D, onda vrijedi

$$ABEF \cdot CDEF + ACEF \cdot DBEF + ADEF \cdot BCEF = 0.$$

Za $n = 4$ dobiva se proširenje i poopćenje jednog teorema Laptjeve.

Svaki teorem u kojemu se govori o postojanju neke Ptolemejske funkcije zovemo Ptolomejskim teoremom.

Prvi u povijesti poznati Ptolemejski teorem je sigurno Ptolemejev teorem o tetivnom četverokutu. Ako naime za osnovnu figuru uzmemo četiri točke M_1, M_2, M_3, M_4 kružnice u izvjesnom cikličkom poretku i promotrimo D-figuru $\Phi[i,j]$, onda je relativna udaljenost a_{ij}, ($a_i \gtreqless 0$ za $i \gtreqless j$) točaka M_i, M_j Ptolemejska funkcija. Ovaj pristup onda omogućuje da se teorem Ptolemeja generalizira na tetivni n-terokut, što je i učinjeno u radu [18].

Iz svega što je rečeno slijedi da je tu izgrađena jedna općenita Ptolemejska teorija u kojoj su mnogi, prividno posve neovisni teoremi, podređeni jednom vrlo općenitom stajalištu.

Na taj se rad nadovezuje rad [39] u kojem se dokazuje jedan teorem o specijalnim Ptolomejskim matricama pomoću kojeg se dobivaju novi Ptolemejski teoremi. U radu [40] razmatraju se Ptolemejski teoremi u prostoru Minkowskoga.

U radovima [26] i [27] govori se o stavku o četiri tjemena. U svojoj klasičnoj formulaciji to je stavak globalne diferencijalne geometrije. U novije vrijeme je pokazano da je bit tog teorema mnogo dublja jer je to teorem topološkog karaktera. U ovim radovima dana je diferencijsko geometrijska primitivizacija tog teorema na konveksne poligone i tako je ukazano na njegovu suštinu.

4. Radovi ove skupine jesu [1], [20], [21], [30], [31], [32], [33], [34] i [36].

U radu [1] su dane neke primjene polarnog koordinatnog sistema hiperboličke ravnine na probleme diferencijalne geometrije u toj ravnini. Diskutirana je i prednost tog sistema pred mnogim drugim koordinatnim sistemima.

U radu [21] promatraju se evolute krivulja u hiperboličkoj ravnini i pokazano je da se na standarni način evoluta može definirati samo za one krivulje kojima je zakrivljenost veća od 1. Ako je ta zakrivljenost manja onda u standarnom smislu evoluta ne postoji. No tada je moguće uspostaviti jedno drugo pridruženje dviju krivulja koje vodi do pojmova bazoide i ekvidistantoide i u ovom se radu detaljno istražuje to proširenje. Te krivulje koje su ovdje prvi put definirane kasnije se istražuju i u radu G. M. M. Kallenberg, *Aequidistantoids and Basoids in plane hyperbolic Geometry*, Nieuf Archief voor Wiskunde (3) 10 (1962), 165–169.

U radu [33] S. Bilinski uvodi nove pravčaste koordinate u hiperboličkoj ravnini. Najbolje da se poslužimo citatom W. Szmielew iz Math. Rev. 37 (1969), No 3, str. 63; "In term of Bilinski's coordinates the fundamental analytic formulas of hyperbolic geometry assume a simple elegant form which is uniform with respect to both coordinates. The connections between Bilinski's coordinates and Hesse's or Hilbert's coordinates one established precisely".

U radu [34] daje se jedan novi model hiperboličke geometrije u torusnoj ravnini. Taj je model izgrađen na slijedeći način. Poznato je da je euklidsku ravninu moguće na više različitih načina nadopuniti nepravim elementima. Ako se ona upotpuni nepravim elementima tako da se dobije suvislost torusa, onda nastaje torusna ravnina. U toj torusnoj ravnini definira se H-geometrija za koju se pokazuje da je izomorfna geometriji hiperboličke ravnine. Osnovni elementi ove H-geometrije jesu orijentirani H-pravci, koji su predočeni onim točkama torusne ravnine, koje leže izvan jednog istaknutog fundamentalnog pravca. Pri tome je H-točka takva jednakostrana hiperbola, kojoj je fundamentalni pravac imaginarna os. Definiraju se i ostali osnovni pojmovi H-geometrije u torusnoj ravnini i uvodi metrika u tako definiranu geometriju. Izvode se neki teoremi i neke osnovne konstrukcije u H-geometriji.

Na ovaj rad nadovezuje se rad Б. А. Розенфельд, *О связи модели Билинского плоскости Лобачевского на торовој плоскости с двојнымы числами*, Glasnik matematički 5 (1970), 307–308. U tom se radu pokazuje zanimljiva veza modela Bilinskog i interpretacije trodimenzionalnog hiperboličkog prostora na proširenoj ravnini dvojne varijable $a + be$, $e^2 = +1$.

Na rad Bilinskog nadovezuje se i istraživanje tog modela u radu W. Wunderlich, *Über das Bilinskische Modell der hyperbolischen Ebene*, Glasnik matematički 7 (1972), 83–86. U ovom radu je između modela Bilinskog i konformnog modela Poincaréa uspostavljena veza posredstvom ciklografskog preslikavanja. Time su dobivena i karakteristična svojstva cikala, horicikala i hipercikala u ravnini Bilinskog.

Spomenimo još i članak O. Giering, *Eine Variante des Bilinski Modells der ebenen hyperbolischen Geometrie*, Journal of Geometry, 31 (1988), 79–88, u kojem je konstruirana jedna varijanta modela Bilinskog pomoću kongruencije bisekanata prostorne krivulje 3. reda. Ta se varijanta pokazala plodotvornom za rješavanje izvjesnih problema hiperboličke geometrije.

Model Bilinskog našao je odjeka i u suvremenim monografijama o neeuklidskim geometrijama. Tako ga na primjer nalazimo citiranog i u monografiji. Neumann-Salló–Toró, *A semmiből egy új világot teremtettem*, FACLA, Temesvár 1974.

Rad [36] sadrži strogo aksiomatsko zasnivanje teorije mjerenja površina u hiperboličkoj ravnini kakvo do tada još nije bilo poznato.

5. Radovi ove skupine jesu [13], [15], [16], [17], [22], [28], [35]. Iz ove skupine radova na najviše odjeka naišli su radovi [17], i [28].

Osnovna ideja u ovim radovima sastoji se u tome da se krivulji u trodimenzionalnom prostoru osim fleksije κ i torzije τ pridruže dva niza skalarnih invarijanata κ_i, τ_i, $i = 1, 2, \ldots$ rekurzivnim formulama

$$\kappa_1 = \kappa, \quad \tau_1 = \tau, \quad \kappa_{i+1} = \sqrt{\kappa_i^2 + \tau_i^2}, \quad \tau_{i+1} = \frac{\kappa_i \tau_i' - \kappa_i' \tau_i}{\kappa_i^2 + \tau_i^2}.$$

Invarijante κ_i, τ_i zovu se redom i-ta fleksija, i-ta torzija krivulje. Nadalje se svakoj točki krivulje osim Frenetovog trobrida $D \equiv \{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ pridružuje niz trobrida $D_i \equiv \{\vec{t}_i, \vec{n}_i, \vec{b}_i\}$ rekurzivnim formulama

$$\vec{t}_i = \vec{t}, \quad \vec{n}_1 = \vec{n}, \quad \vec{b}_1 = \vec{b},$$
$$\vec{t}_{i+1} = \vec{n}_i, \quad \vec{n}_{i+1} = \vec{b}_{i+1} \times \vec{t}_{i+1}, \quad \vec{b}_{i+1} = \frac{\kappa_i}{\kappa_{i+1}} \vec{b}_i + \frac{\tau_i}{\tau_{i+1}} \vec{t}_i.$$

Pri tome derivacione formule glase

$$\begin{aligned} \vec{t}_i' &= \kappa_i \vec{n}_i, \\ \vec{n}_i' &= -\kappa_i \vec{t}_i + \tau_i \vec{b}_i, \\ \vec{b}_i' &= -\tau \vec{n}_i, \end{aligned}$$

dakle one su sasvim iste kao i Frenetove formule.

Odavde onda slijedi da će svaki teorem teorije krivulja koji se može dokazati samo pomoću Frenetovih formula vrijediti ako u njemu elemente D, κ, τ zamijenimo elementima D_i, κ_i, τ_i.

Tako na primjer ako je C zatvorena prostorna krivulja, onda za nju vrijedi Jacobijev teorem koji kaže da njezina sferna slika glavnih normala $\vec{n}$ dijeli sferu na kojoj ona leži na dva dijela iste površine. Iz svega rečenog odmah slijedi da to nije istina samo za sfernu sliku glavnih normala, već i za sferne slike svih vektora $\vec{n}_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Dakle postoji čitav niz vektora za koje je to istina.

U radu [28] Bilinski dalje razrađuje tu ideju i generalizira pojam Bertrandovih krivulja, pa B_2-krivuljama zove one krivulje koje u korespondentnim točkama imaju iste druge normale n_2 i detaljno istražuje svojstva tih krivulja.

Upravo ovi radovi su dali poticaj i ideje mnogim drugim geometričarima koji ih plodotvorno koriste, dalje razvijaju i prenose na druge prostore. Spomenimo samo neke od tih radova: J. Hoschek, *Eine Erweiterung der natürlichen Geometrie der Strahlflächen*, Österr. Akad. Wiss. Math. Naturw. Kl. S. B. II, 176 (1967), 73–92.

Evo što K. Strubecker, referent u Math. Rev. o ovom radu Hoscheka među ostalim piše: "S. Bilinski ... hat durch eine rekursive Definition einer Folge von begleitenden Dreibeinen eine sehr bemerkenswerte Erweiterung der Theorie der Raumkurven aufgestellt ... "

Na kraju rada: J. Hoschek, *Eine Verallgemeinerung der Böschungsflächen*, Math. Ann. 179 (1969), 275–284, Hoschek kaže: "Abschliessend kann bemerkt werden, dass sich durch die hier aufgezeigten Ergebnisse wieder erwiesen hat, dass die von Bilinski angegebene Erweiterung der Kurventheorie sehr sinnvoll und weitreichend ist. Allgemein gesehen, lassen sich gemäss (5a) zweifach unendlich viele Erweiterungssysteme (A) ableiten. Das von Bilinski angegebene kinematisch begründete System scheint aber das bei weitem ergiebigste zu sein". Daljni radovi Hoscheka na tu temu jesu: J. Hoschek, *Eine Verallgemeinerung der Cesàro Kurven*, Österr. Akad. Wiss. Math. Naturw. Kl. S. B. II, 177 (1969), 481–490; J. Hoschek, *Eine Verallgemeineruqg der Bertrand und Mannheim Kurven*, Österr. Akad. Wiss., Math. Naturw. Kl. S. B. II, 177 (1969), 79–93; J. Hoscheck, *Eine Erweiterurg der Streifentheorie und Verallgemeinerung von Cesàrostreifen*, Arch. Math. 20 (1969), 88–93; Ch. Lübbert, *Verallgemeinerte Begleittetraeder von Regelflächen und Kurven im elliptischen Raum*, Österr. Akad. Wiss., Math. Natur. Kl. S. B. II, 185 (1976), 153–166.

U ovim se radovima J. Hoscheka ideja S. Bilinskog bitno koristi i dovodi do poopćenja prirodne geometrije pravčastih ploha i do poopćenja zavojnih ploha, Bertrandovih, Mannheimovih i Cesàrovih krivulja i ploha. U radu Ch. Lübberta ta se ideja prenosi na pravčaste plohe eliptičkog prostora.

Ova ideja S. Bilinskog koristi se i u radovima sovjetskog geometričara V. G. Koppa. Tako on u radu Б. Г. Копп, *Об одном обобщении линиј откоса*, Уч. Зап. Гос. Пед. Ин-та 10 (1955), 137–154, uvodi i pojam "цепочка Билинского". On je također te ideje prenio i na pravčaste plohe.

Na ova tri rada S. Bilinskog nadovezuju se i mnogi radovi njegovih učenika.

6. U ovoj je skupini samo rad [27]. U ovom se radu na osnovi pojma Ptolemejske matrice izgrađuje analitički model jedne teorije za koju se pokazuje da je izomorfna projektivnoj pravčastoj geometriji.

7. Ovoj skupini pripadaju radovi [41]–[48]. U ovim se radovima promatraju izvjesni tipovi funkcionalnih jednadžbi i u nekima od njih primijenjuju na geometrijske probleme i generaliziraju neki već od prije poznatih teorema.

No S. Bilinski nikada nije zaboravljao i na nastavnike srednjih škola i autor je više članaka iz područja metodike elementarne geometrije, koji su bili publicirani u "Nastavnom vjesniku", "Nastavi matematike i fizike" i "Matematičkoj čitanci", Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1947, koja je izašla u redakciji M. Sevdića

Na kraju kažimo da je profesor Bilinski bio omiljen među svojim učenicima i suradnicima jer je uvijek bio smiren i imao vremena za njih i njihove probleme. Uvijek je bio spreman da pomogne savjetom i podstakne svoje suradnike koji su se bavili problematikom iz njegovog djelokruga rada. Stoga smo zahvalni da je ovakav čovjek i znanstveni radnik toliki niz godina djelovao među nama.

B. Pavković i V. Volenec

Popis publikacija Stanka Bilinskog

[1] Bilinski,-Stanko: *Odnos kuta paralelnosti i pripadne distance*, Nastavni Vjesnik **49** (1940/41), 417–422.

[2] Bilinski,-Stanko: *O Eulerovim poliedarskim relacijama*, Nastavni Vjesnik **51** (1942/43), 281–285.

[3] Bilinski,-Stanko: *Problem parketiranja*, Matematička čitanka (1947), 99–106.

[4] Bilinski,-Stanko: *O jednadžbi pravca i hiperbole kod Fermata*, Matematička čitanka (1947), 112–115.

[5] Bilinski,-S.; Sevdić,-M.: *Problem jedra*, Matematička čitanka (1947), 136–140.

[6] Bilinski,-Stanko: *Homogene mreže ravnine*, Rad-Jugoslav.-Akad.-Znanosti i Umjetnosti **271** (1948), 145–255.
Bilinski,-Stanko: *Homogene Netze der Ebene*, Bull.-Internat.-Acad. Yougoslave.-Cl.-Sci.-Math.-Phys.-Tech. (N.S.) **2** (1949) 63–111.

[7] Bilinski,-Stanko: *Prilog dinamici kumulonimbusa*, Glasnik Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. **3** (1948), 29–51.

[8] Bilinski,-Stanko: *O kinematičkim uvjetima frontogeneze*, Rad Geofizičkog zavoda u Zagrebu, II Ser. **2** (1948), 5–16.

[9] Bilinski,-S.; Blanuša,-D.: *Dokaz nerješivosti jedne mreže*, Glasnik Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. **4** (1949), 78–80.

[10] Bilinski,-Stanko: *O jednom teoremu G. Mongea*, Glasnik Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. **5** (1950), 49–55.

[11] Bilinski,-Stanko: *Generalizacija jednog Mongeovog teorema*, Glasnik-Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. **5** (1950) 175–177.

[12] Bilinski,-Stanko: *Homogene mreže zatvorenih orijentabilnih ploha*, Rad Jugoslav.-Akad.-Znan.-Umjet.-Odjel-Mat.-Fiz.-Tehn.-Nauke **277** (1950) 129–164.
Homogene Netze geschlossener orientierbarer Flächen, Bull.-Internat, Acad.-Yougoslave-Sci.-Beaux-Arts (N.S.) **6** (1952) 59–75.

[13] Bilinski,-Stanko: *Über sphärische Evolventoiden der Raumkurven*, Glasnik Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. **6** (1951) 106–114.

[14] Bilinski,-Stanko: *Diracova funkcija i jedan elementarni problem hidrostatike*, Glasnik Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. **7** (1952), 219–227.

[15] Bilinski,-Stanko: *Dokaz Jakobijevog teorema o sfernoj slici glavnih normala zatvorene krivulje*, Srpska Akad.-Nauka.-Zbornik-Radova-Matematički-Inst. **18(2)** (1952), 143–146.

[16] Bilinski,-Stanko: *Einige Eigenschaften sphärischer Evoluten und sphärischer Evolventen*, Glasnik Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. **9** (1954), 109–114.

[17] Bilinski,-Stanko: Eine *Verallgemeinerung des Satzes von Ptolemaios*, Simon-Stevin **30** (1954), 90–93.

[18] Bilinski,-Stanko: *Eine Verallgemeinerung der Formeln von Frenet und eine Isomorphie gewisser Teile der Differentialgeometrie der Raumkurven*, Glasnik Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. **10** (1955), 175–180; Proc. internat.congr.math., Amsterdam 1954, II, 200–201.

[19] Bilinski,-Stanko: *O osnovama aksiomatike*, Nastava matematike i fizike **5** (1956), 83–87.

[20] Bilinski,-Stanko: *Einige Anwendungen der Polarkoordinaten in der hyperbolischen Geometrie*, Glasnik Mat.-Fiz.-Astr.- Ser. II. **11** (1956), 25–35.

[21] Bilinski,-Stanko: *Über eine gewisse Kurvenzuordnung in der hyperbolischen Ebene*, Comment.-Math.-Helv. **32**(1957), 1–12.

[22] Bilinski,-Stanko: *A note on the fundamental equations of the theory of surfaces*, Glasnik Mat.-Fiz.-Astr.-Ser. II. **13** (1958), 121–124.

[23] Bilinski,-Stanko: *Über die Ordnungszahl der Klassen Eulerscher Polyeder*, Arch.-Math. **10** (1959), 180–186.

[24] Bilinski,-Stanko: *Ekonomsko i kulturno značenje matematike*, Glasnik Mat.-Fiz.-Astronom.-Ser. II **15** (1960), 69–72.

[25] Bilinski,-Stanko: *Über die Rhombenisoeder*, Glasnik Mat,-Fiz.-Astronom. Ser. II **15** (1960), 251–263.

[26] Bilinski,-Stanko: *"Der Vierscheitelsatz" für gleichseitige Polygone*, Glasnik Mat.-Fiz.-Astronom.-Ser. II **16** (1961), 195–201.

[27] Bilinski,-Stanko: *Utjecaj otkrića neeuklidske geometrije na suvremeni razvoj nauke*, Glasnik Mat.-Fiz.-Astronom.-Ser. II **16** (1962), 143–146.

[28] Bilinski,-Stanko: *Über eine Erweiterungsmoglichkeit der Kurventheorie*, Monatsh.-Math. **67**(1963), 289–304.

[29] Bilinski,-Stanko: *Die primitivste Form des Vierscheitelsatzes*, Glasnik-Mat.-Fiz.-Astronom.-Ser. II **18**(1963), 85–93.

[30] Bilinski,-Stanko: *Vektoren in der hyperbolichen Ebene*, Glasnik Mat.-Fiz.-Astronom.-Ser. II **19** (1964), 37–52.

[31] Bilinski,-Stanko: *Eine Interpretation der ebenen hyperbolischen Geometrie in der projektiven Geometrie der Geraden*, Glasnik-Mat.-Fiz.-Astronom.-Ser. II **20** (1965), 99–135.

[32] Bilinski,-Stanko: *Einige Betrachtungen über Koordinatensysteme und Modelle der Lobatschewskischen Geometrie*, Glasnik-Mat.-Ser. III **1(21)** (1966), 177–198.

[33] Bilinski,-Stanko: *Einige Betrachtungen über Geradenkoordinaten in der hyperbolischen Ebene*, Glasnik-Mat.-Ser. III **2(22)** (1967), 179–190.

[34] Bilinski,-Stanko: *Über ein Modell der zweidimensionalen hyperbolischen Geometrie in der Torusebene*, Glasnik-Mat.-Ser. III **2(22)** (1967), 191–200.

[35] Bilinski,-Stanko: *Uber einen kurventheoretischen Satz von N. Abramescu*, Glasnik Mat. Ser. III **3(23)** (1968), 253–256.

[36] Bilinski,-Stanko: *Zur Begründung der elementaren Inhaltslehre in der hyperbolishchen Ebene*, Math.-Ann. **180** (1969), 256–268.

[37] Bilinski,-Stanko: *Ein analytisches Modell der projektiven Liniengeometrie*, Monatsh.-Math. **74** (1970), 193–210.

[38] Bilinski,-Stanko: *Über Ptolemaische Satze*, Monatsh.-Math. **77**(1973), 193–205.

[39] Bilinski,-Stanko: *Eine Eigenschaft der $(n+2,n)$-Matrizen und Ptolemäische Funktionen von Dreigeradenfiguren, Collection of articles dedicated to Stanislaw Golab on his 70th birthday*, II. Demonstratio-Math. **6**(1973), 471–481.

[40] Bilinski,-Stanko: *Ein Ptolemäischer Satz für isotropen Kegel des Minkowskischen Raumes*, Mathematical Structures — Computational Mathematics – Mathematical Modelling, Sofia (1975), 183–185.

[41] Bilinski,-Stanko: *Ein Satz von Brahmagupta und seine Verallgemeinerungen*, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. **370** (1975), 47–55.

[42] Bilinski,-Stanko: *Die linearadditiven Zweiindizesfunktionen*, Aequationes Math. **14** (1976), no. 1/2, 95–104.

[43] Bilinski,-Stanko: *Ein Symmetriemass von Vierecken der affinen Ebene*, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. **382** (1978), 109–114.

[44] Bilinski,-Stanko: *Funktionale von primitiven Polygonen Kleinscher Ebenen*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 288–303.

[45] Bilinski,-Stanko: *Ein Regularitätsmasse von Figuren in Kleinschen Räumen*, Österreich. Akad. Wiss. Math. Natur. Kl. Sitzungsber. II. **188** (1979), 167–177.

[46] Bilinski,-Stanko: *Die Invarianten einer diskreten Transformationsgruppe endlicher Ordnung*, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. **386** (1980), 89–93.

[47] Bilinski,-Stanko: *Die zu einer Gruppe gehörenden Funktionalgleichungen*, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. **403** (1983), 55–67.

[48] Bilinski,-Stanko: *Zur Charakterisierung des Doppelverhaltnissbegriffes durch Funktionalgleichungen*, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet. **403** (1983), 69–75.

[49] Bilinski,-Stanko: *Die quasiregulären Polyeder vom Geschlecht* 2, Österreich. Akad. Wiss. Math. Natur. Kl. Sitzungsber, II. **194** (1985), 63–78.

[50] Bilinski,-Stanko: *Die quasiregulären Polyeder zweiter Stufe*, Österreich. Akad. Wiss. Math. Natur. Kl. Sitzungsber. II. **196** (1987), 1–12.

[51] Bilinski,-Stanko: *Die windschiefen Archimedischen Polyeder höheren Geschlechtes*, Österreich. Akad. Wiss. Math. Natur. Kl. Sitzungsber. II. **197**(1988), 315–326.

[52] Bilinski,-Stanko: *Ein Beitrag zur Polyedertheorie der Rhombokubooktaeder-Familie*, Österreich. Akad. Wiss. Math. Natur. Kl. Sitzungsber. II. **201** (1992), 117–129.

[53] Bilinski,-S.: *Die Familie der abgestumpften quasiregularen Polyeder*, Österreich. Akad. Wiss. Math. Natur. Kl. Sitzungsber. II. **204** (1995), 145–150.