Konstrukcija dizajna metodom taktičke dekompozicije

Filip Martinović veljača, 2023.

Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva

rad podržan HRZZ projektom IP-2020-02-9752

Uvod

Definicija

- dizajn
- točke dizajna
- blokovi dizajna
- jednostavni dizajn

Osnovni pojmovi

Definicija

Uređeni par $(P, \mathcal{B})$ zovemo <u>(v, k, λ)-dizajn</u>, ako je $(P, \mathcal{B})$ dizajn i ako su v, k, $\lambda \in \mathbb{N}$ prirodni brojevi takvi da je:

- $|P| = v$,
- $(\forall l \in \mathcal{B})\ |l| = k$,
- $(\forall p, q \in P, p \neq q)\ |\{l \in \mathcal{B} \mid p, q \in l\}| = \lambda$,

gdje je $k \geq 2$ i $v > k$.

Teorem

Svaka točka (v, k, λ)-dizajna se nalazi u točno $r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$ blokova, a blokova ima točno $b = \frac{vr}{k} = \frac{\lambda(v^2-v)}{k^2-k}$.

Taktička dekompozicija

Definicija

Neka je $D = (P, \mathcal{B})$ jedan (v, k, λ)-dizajn. Za particiju $\{P_1, \ldots, P_c\}$ skupa točaka P i particiju $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_d\}$ skupa blokova $\mathcal{B}$ kažemo da čine <u>taktičku dekompoziciju dizajna D</u>, ako $(\forall i = 1, \ldots, c)(\forall j = 1, \ldots, d)(\exists \rho_{ji}, \kappa_{ji} \in \mathbb{N})$

$$(\forall l \in \mathcal{B}_j)\ |\{p \in P_i | p \in l\}| = \rho_{ji} \text{ i}$$
$$(\forall p \in P_i)\ |\{l \in \mathcal{B}_j | p \in l\}| = \kappa_{ji}.$$

Osnovni pojmovi

Definicija

- izomorfni dizajni, izomorfizam dizajna
- automorfizam dizajna,
- puna grupa automorfizama dizajna, $\mathrm{Aut}(D)$
- grupa automorfizama dizajna

- djelovanje grupe automorfizama na skup točka i na skup blokova

Taktička dekompozicija i automorfizmi

Napomena

G grupa automorfizama dizajna D, tada G-orbite na skupu točaka i G-orbite na skupu blokova čine taktičku dekompoziciju dizajna D.

Ukoliko je dizajn D simetrični dizajn, tada možemo reći i nešto više.

Osnovni pojmovi

Definicija

Simetrični (v, k, λ)-dizajn je (v, k, λ)-dizajn koji ima točno v blokova.

Teorem

Neka je $(P, \mathcal{B})$ simetrični (v, k, λ)-dizajn i označimo pripadne blokove s $\mathcal{B} = \{l_1, \ldots, l_v\}$. Tada je

$$(\forall i \neq j)\ |l_i \cap l_j| = \lambda.$$

Definicija

- fiksna točka automorfizma dizajna,
- fiksni blok automorfizma dizajna.

Osnovne tvrdnje

Propozicija

Ako je σ automorfizam simetričnog dizajna D, tada

$$|\{\text{fiksne točke od } \sigma\}| = |\{\text{fiksni blokovi od } \sigma\}|.$$

Teorem

Ako je G grupa automorfizama dizajna $(P, \mathcal{B})$, tada

$$|\{G\text{-orbita od } P\}| = |\{G\text{-orbita od } \mathcal{B}\}|.$$

Taktička dekompozicija simetričnog dizajna

Teorem

Neka je $D = (P, \mathcal{B})$ simetrični (v, k, λ)-dizajn i neka je G njegova grupa automorfizama. Označimo s $P_1, \ldots, P_m$ sve G-orbite na skupu točaka P i s $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ sve G-orbite na skupu blokova $\mathcal{B}$. Tada te particije čine taktičku dekompoziciju dizajna D, dakle
$(\forall i, j = 1, \ldots, m)(\exists \rho_{ji}, \kappa_{ji} \in \mathbb{N})$

$$(\forall l \in \mathcal{B}_j)\, |\{p \in P_i \,|\, p \in l\}| = \rho_{ji} \text{ i}$$
$$(\forall p \in P_i)\, |\{l \in \mathcal{B}_j \,|\, p \in l\}| = \kappa_{ji},$$

te prirodni brojevi brojevi ρ_{ji} i κ_{ji} zadovoljavaju sljedeće jednadžbe:

$$(\forall i = 1, \ldots, m) \sum_{j=1}^{m} \kappa_{ji} = k,$$

$$(\forall j = 1, \ldots, m) \sum_{i=1}^{m} \rho_{ji} = k,$$

$$(\forall i, j = 1, \ldots, m)\, \kappa_{ji}|P_i| = \rho_{ji}|\mathcal{B}_j|,$$

$$(\forall i = 1, \ldots, m) \sum_{j=1}^{m} \kappa_{ji}\rho_{ji} = \lambda(|P_i| - 1) + k,$$

$$(\forall j = 1, \ldots, m) \sum_{i=1}^{m} \kappa_{ji}\rho_{ji} = \lambda(|\mathcal{B}_j| - 1) + k,$$

$$(\forall i \neq h) \sum_{j=1}^{m} \kappa_{ji}\rho_{jh} = \lambda|P_h|,$$

$$(\forall j \neq h) \sum_{i=1}^{m} \kappa_{ji}\rho_{hi} = \lambda|\mathcal{B}_h|.$$

Konstrukcija

- $D = (P, \mathcal{B})$ simetrični $(78, 22, 6)$-dizajn
- $G = \langle \rho \rangle$ reda 13
- pretpostavimo da ρ nema fiksnih točaka
- taktička dekompozicija dizajna D
- $(\forall i, j = 1, \ldots, m)\, |P_i| = 13 \quad \text{i} \quad |\mathcal{B}_j| = 13$
- $(\forall i, j = 1, \ldots, m)\, \rho_{ji} = \kappa_{ji}$
- $m = 6$
- skica
- oznaka točaka u particijama
- $\rho = \{(I_0, I_1, \ldots, I_{12}), I = 1, 2, \ldots, 6\}$

Konstrukcija

Jednadžbe dekompozicije:

$$(\forall i = 1, \ldots, 6)\ \rho_{1i} + \rho_{2i} + \rho_{3i} + \rho_{4i} + \rho_{5i} + \rho_{6i} = 22,$$

$$(\forall j = 1, \ldots, 6)\ \rho_{j1} + \rho_{j2} + \rho_{j3} + \rho_{j4} + \rho_{j5} + \rho_{j6} = 22,$$

$$(\forall i = 1, \ldots, 6)\ \rho_{1i}^2 + \rho_{2i}^2 + \rho_{3i}^2 + \rho_{4i}^2 + \rho_{5i}^2 + \rho_{6i}^2 = 94,$$

$$(\forall j = 1, \ldots, 6)\ \rho_{j1}^2 + \rho_{j2}^2 + \rho_{j3}^2 + \rho_{j4}^2 + \rho_{j5}^2 + \rho_{j6}^2 = 94,$$

$$(\forall i \neq h)\ \rho_{1i}\rho_{1h} + \rho_{2i}\rho_{2h} + \rho_{3i}\rho_{3h} + \rho_{4i}\rho_{4h} + \rho_{5i}\rho_{5h} + \rho_{6i}\rho_{6h} = 78,$$

$$(\forall j \neq h)\ \rho_{j1}\rho_{h1} + \rho_{j2}\rho_{h2} + \rho_{j3}\rho_{h3} + \rho_{j4}\rho_{h4} + \rho_{j5}\rho_{h5} + \rho_{j6}\rho_{h6} = 78.$$

Konstrukcija

Označimo li $R = [\rho_{ji}]$, tada jednadžbe možemo zapisati kao

$$R \cdot R^{\mathrm{T}} = 78[1] + 16I = 13\lambda[1] + (k - \lambda)I \quad \text{i}$$
$$R^{\mathrm{T}} \cdot R = 78[1] + 16I = 13\lambda[1] + (k - \lambda)I,$$

pri čemu je zbroj koeficijenata u svakom retku i u svakom stupcu matrice R jednak 22.

Konstrukcija

$$R = \begin{bmatrix} 7 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 7 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 7 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Jedinstveno rješenje do na permutaciju orbita pretpostavimo li da je $\rho_{ji} \not\equiv 2 \mod 3$.

Konstrukcija

Uz tu pretpostavku blokovi orbita $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_6$ redom izgledaju kao

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccccccccccc}
l_1 = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 2 & 2 & 2 & & 3 & 3 & 3 & & 4 & 4 & 4 & & 5 & 5 & 5 & & 6 & 6 & 6 \\
l_2 = & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & & 1 & 1 & 1 & & 3 & 3 & 3 & & 4 & 4 & 4 & & 5 & 5 & 5 & & 6 & 6 & 6 \\
l_3 = & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & & 1 & 1 & 1 & & 2 & 2 & 2 & & 4 & 4 & 4 & & 5 & 5 & 5 & & 6 & 6 & 6 \\
l_4 = & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & & 1 & 1 & 1 & & 2 & 2 & 2 & & 3 & 3 & 3 & & 5 & 5 & 5 & & 6 & 6 & 6 \\
l_5 = & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & & 1 & 1 & 1 & & 2 & 2 & 2 & & 3 & 3 & 3 & & 4 & 4 & 4 & & 6 & 6 & 6 \\
l_6 = & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & & 1 & 1 & 1 & & 2 & 2 & 2 & & 3 & 3 & 3 & & 4 & 4 & 4 & & 5 & 5 & 5
\end{array}
$$

Konstrukcija

- $\mu = \{(I_0)(I_1, I_3, I_9)(I_2, I_6, I_5)(I_4, I_{12}, I_{10})(I_7, I_8, I_{11}), I = 1, \ldots, 6\}$
- $\langle \rho, \mu \mid \rho^{13} = \mathrm{id}, \mu^3 = \mathrm{id}, \mu^{-1}\rho\mu = \rho^3 \rangle$

  Frobeniusova grupa reda 39
- $\rho_{ji} \not\equiv 2 \mod 3$
- $l_1, \ldots, l_6$ fiksni blokovi automorfizma μ

Konstrukcija

Indeksacija tih blokova:

- $l_1 = 1_0 1_x 1_{3x} 1_{9x} 1_a 1_{3a} 1_{9a}\ \ 2_b 2_{3b} 2_{9b}\ \ 3_c 3_{3c} 3_{9c}\ \ 4_d 4_{3d} 4_{9d}$
  $5_e 5_{3e} 5_{9e}\ \ 6_f 6_{3f} 6_{9f}$,
- $x, a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, 4, 7\}$
- $x = 1$ i $a \in \{2, 4\}$
- $(\forall i = 1, \ldots, 12)\ |l_1 \cap \rho^i\, l_1| = 6$
- među indeksima b, c, d, e, f dva indeksa moraju biti iz $\{2, 7\}$ i tri indeksa moraju biti iz $\{1, 4\}$

	0	1	3	9	4	12	10	7
ρ^1	1	2	4	10	5	0	11	4
ρ^2	2	3	5	11	6	1	12	3
ρ^3	3	4	6	12	7	2	0	4
ρ^4	4	5	7	0	8	3	1	4
ρ^5	5	6	8	1	9	4	2	3
ρ^6	6	7	9	2	10	5	3	3
ρ^7	7	8	10	3	11	6	4	3
ρ^8	8	9	11	4	12	7	5	3
ρ^9	9	10	12	5	0	8	6	4
ρ^{10}	10	11	0	6	1	9	7	4
ρ^{11}	11	12	1	7	2	10	8	3
ρ^{12}	12	0	2	8	3	11	9	4

	0	1	3	9	2	6	5	7
ρ^1	1	2	4	10	3	7	6	4
ρ^2	2	3	5	11	4	8	7	3
ρ^3	3	4	6	12	5	9	8	4
ρ^4	4	5	7	0	6	10	9	4
ρ^5	5	6	8	1	7	11	10	3
ρ^6	6	7	9	2	8	12	11	3
ρ^7	7	8	10	3	9	0	12	3
ρ^8	8	9	11	4	10	1	0	3
ρ^9	9	10	12	5	11	2	1	4
ρ^{10}	10	11	0	6	12	3	2	4
ρ^{11}	11	12	1	7	0	4	3	3
ρ^{12}	12	0	2	8	1	5	4	4

	1	3	9	3
ρ^1	2	4	10	0
ρ^2	3	5	11	1
ρ^3	4	6	12	0
ρ^4	5	7	0	0
ρ^5	6	8	1	1
ρ^6	7	9	2	1
ρ^7	8	10	3	1
ρ^8	9	11	4	1
ρ^9	10	12	5	0
ρ^{10}	11	0	6	0
ρ^{11}	12	1	7	1
ρ^{12}	0	2	8	0

,

	2	6	5	3
ρ^1	3	7	6	1
ρ^2	4	8	7	0
ρ^3	5	9	8	1
ρ^4	6	10	9	1
ρ^5	7	11	10	0
ρ^6	8	12	11	0
ρ^7	9	0	12	0
ρ^8	10	1	0	0
ρ^9	11	2	1	1
ρ^{10}	12	3	2	1
ρ^{11}	0	4	3	0
ρ^{12}	1	5	4	1

	4	12	10	3
ρ^1	5	0	11	0
ρ^2	6	1	12	1
ρ^3	7	2	0	0
ρ^4	8	3	1	0
ρ^5	9	4	2	1
ρ^6	10	5	3	1
ρ^7	11	6	4	1
ρ^8	12	7	5	1
ρ^9	0	8	6	0
ρ^{10}	1	9	7	0
ρ^{11}	2	10	8	1
ρ^{12}	3	11	9	0

,

	7	8	11	3
ρ^1	8	9	12	1
ρ^2	9	10	0	0
ρ^3	10	11	1	1
ρ^4	11	12	2	1
ρ^5	12	0	3	0
ρ^6	0	1	4	0
ρ^7	1	2	5	0
ρ^8	2	3	6	0
ρ^9	3	4	7	1
ρ^{10}	4	5	8	1
ρ^{11}	5	6	9	0
ρ^{12}	6	7	10	1

	sedam	$1,3,9$	$2,6,5$	$4,12,10$	$7,8,11$	$\Sigma = 6$
ρ^1	4	0	1	0	1	$4+1+1$
ρ^2	3	1	0	1	0	$3+1+1+1$
ρ^3	4	0	1	0	1	$4+1+1$
ρ^4	4	0	1	0	1	$4+1+1$
ρ^5	3	1	0	1	0	$3+1+1+1$
ρ^6	3	1	0	1	0	$3+1+1+1$
ρ^7	3	1	0	1	0	$3+1+1+1$
ρ^8	3	1	0	1	0	$3+1+1+1$
ρ^9	4	0	1	0	1	$4+1+1$
ρ^{10}	4	0	1	0	1	$4+1+1$
ρ^{11}	3	1	0	1	0	$3+1+1+1$
ρ^{12}	4	0	1	0	1	$4+1+1$

Konstrukcija

- indeksiramo ostale blokove l_2, l_3, l_4, l_5 i l_6
- $(\forall \beta, \gamma = 1, \ldots, 6)(\forall i, j = 0, \ldots, 12)\, |\rho^i\, l_\beta \cap \rho^j\, l_\gamma| = 6$
- računalo nalazi deset mogućnosti za indeksaciju blokova l_j, pokazuje se da oni daju međusobno izomofne dizajne permutacijom orbita

$$l_1 = 1_0 1_1 1_3 1_9 1_4 1_{12} 1_{10}\ 2_2 2_6 2_5\ 3_2 3_6 3_5\ 4_4 4_{12} 4_{10}\ 5_4 5_{12} 5_{10}\ 6_4 6_{12} 6_{10}$$

$$l_2 = 2_0 2_2 2_6 2_5 2_7 2_8 2_{11}\ 1_1 1_3 1_9\ 3_4 3_{12} 3_{10}\ 4_2 4_6 4_5\ 5_7 5_8 5_{11}\ 6_7 6_8 6_{11}$$

$$l_3 = 3_0 3_2 3_6 3_5 3_7 3_8 3_{11}\ 1_1 1_3 1_9\ 2_4 2_{12} 2_{10}\ 4_7 4_8 4_{11}\ 5_2 5_6 5_5\ 6_7 6_8 6_{11}$$

$$l_4 = 4_0 4_2 4_6 4_5 4_7 4_8 4_{11}\ 1_7 1_8 1_{11}\ 2_2 2_6 2_5\ 3_7 3_8 3_{11}\ 5_1 5_3 5_9\ 6_4 6_{12} 6_{10}$$

$$l_5 = 5_0 5_2 5_6 5_5 5_7 5_8 5_{11}\ 1_7 1_8 1_{11}\ 2_7 2_8 2_{11}\ 3_2 3_6 3_5\ 4_1 4_3 4_9\ 6_4 6_{12} 6_{10}$$

$$l_6 = 6_0 6_1 6_3 6_9 6_4 6_{12} 6_{10}\ 1_1 1_3 1_9\ 2_1 2_3 2_9\ 3_1 3_3 3_9\ 4_2 4_6 4_5\ 5_2 5_6 5_5.$$

Konstrukcija

Teorem

Postoji do na izomorfizam jedinstveni simetrični $(78, 22, 6)$-dizajn koji ima kao grupu automorfizama Frobeniusovu grupu $\langle \rho, \mu \rangle$ reda 39 koja djeluje na način da automorfizam ρ reda 13 djeluje bez fiksnih točaka i da automorfizam μ reda 3 fiksira ρ-orbite točaka. Posebno, taj dizajn je samodualan.

Puna grupa automorfizama H

- $\tau = \{(1_i)(6_i)(2_i, 3_i)(4_i, 5_i), i = 0, \ldots, 12\}$
- presjeci $\binom{78}{3}$ trojki blokova

Teorem

Simetrični $(78, 22, 6)$-dizajn D iz prethodnom Teorema ima

$$H = \langle \rho, \mu \rangle \times \langle \tau \rangle$$

kao punu grupu automorfizama. Dakle, H je direktan produkt Frobeniusove grupe reda 39 i grupe reda 2 i $|H| = 78$.

Izvori

- Ionin, Yury J. i Mohan S. Shrikhande: *Combinatorics of symmetric designs.*
  New mathematical monographs 5. Cambridge University Press, 2006.
- Janko, Zvonimir i Tran van Trung: *Construction of a new symmetric block design for (78, 22, 6) with the help of tactical decompositions.*
  Journal of Combinatorial Theory, Series A, 40:451–455, 1985.
- Stinson, Douglas R.: *Combinatorial designs: constructions and analysis.*
  Springer, 1. izdanje, 2004.

Hvala na pažnji