

Jako regularne konfiguracije od projektivnih ravnina*

Vedran Krčadinac

PMF-MO

24.5.2021.

* This work was fully supported by the Croatian Science Foundation under the project 9752.

Eliptične poluravnine

P. Dembowski, *Finite geometries*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44, Springer-Verlag, 1968.

Eliptične poluravnine

P. Dembowski, *Finite geometries*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44, Springer-Verlag, 1968.

Konačna poluravnina je konačna incidencijska struktura koja zadovoljava:

- kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac,

Eliptične poluravnine

P. Dembowski, *Finite geometries*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44, Springer-Verlag, 1968.

Konačna poluravnina je konačna incidencijska struktura koja zadovoljava:

- kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac,
- (svaka dva pravca sijeku se najviše u jednoj točki),

Eliptične poluravnine

P. Dembowski, *Finite geometries*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44, Springer-Verlag, 1968.

Konačna poluravnina je konačna incidencijska struktura koja zadovoljava:

- kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac,
- (svaka dva pravca sijeku se najviše u jednoj točki),
- stupanj svake točke i pravca je bar 3,

Eliptične poluravnine

P. Dembowski, *Finite geometries*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44, Springer-Verlag, 1968.

Konačna poluravnina je konačna incidencijska struktura koja zadovoljava:

- kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac,
- (svaka dva pravca sijeku se najviše u jednoj točki),
- stupanj svake točke i pravca je bar 3,
- paralelnost pravaca i nekolinearnost točaka su relacije ekvivalencije.

Eliptične poluravnine

P. Dembowski, *Finite geometries*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44, Springer-Verlag, 1968.

Konačna poluravnina je konačna incidencijska struktura koja zadovoljava:

- kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac,
- (svaka dva pravca sijeku se najviše u jednoj točki),
- stupanj svake točke i pravca je bar 3,
- paralelnost pravaca i nekolinearnost točaka su relacije ekvivalencije.

Zadnji aksiom ekvivalentan je s istovremenom generalizacijom i dualizacijom Playfairova aksioma:

- za svaki neincidentni par (P, ℓ) , postoji najviše jedan pravac kroz P paralelan s ℓ i najviše jedna točka na ℓ nekolinearna s P .

Eliptične poluravnine

P. Dembowski, *Finite geometries*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44, Springer-Verlag, 1968.

Konačna poluravnina je konačna incidencijska struktura koja zadovoljava:

- kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac,
- (svaka dva pravca sijeku se najviše u jednoj točki),
- stupanj svake točke i pravca je bar 3,
- paralelnost pravaca i nekolinearnost točaka su relacije ekvivalencije.

Zadnji aksiom ekvivalentan je s istovremenom generalizacijom i dualizacijom Playfairova aksioma:

- za svaki neincidentni par (P, ℓ) , postoji najviše jedan pravac kroz P paralelan s ℓ i najviše jedna točka na ℓ nekolinearna s P .

Poluravnina je reda n ako je najveći stupanj točke ili pravca $n + 1$.

Teorem.

U poluravnini reda n , skup svih stupnjeva točaka i pravaca je

- (a) $\{n - 1, n, n + 1\} \rightsquigarrow$ hiperbolična poluravnina,
- (b) $\{n, n + 1\} \rightsquigarrow$ parabolična poluravnina,
- (c) $\{n + 1\} \rightsquigarrow$ eliptična poluravnina.

Eliptične poluravnine

Teorem.

U poluravnini reda n , skup svih stupnjeva točaka i pravaca je

- (a) $\{n - 1, n, n + 1\} \rightsquigarrow$ hiperbolična poluravnina,
- (b) $\{n, n + 1\} \rightsquigarrow$ parabolična poluravnina,
- (c) $\{n + 1\} \rightsquigarrow$ eliptična poluravnina.

Eliptične poluravnine su **simetrične (v_k) konfiguracije**, za $k = n + 1$.

Hiperbolične i parabolične poluravnine nisu konfiguracije jer stupnjevi točaka i pravaca nisu konstantni.

Eliptične poluravnine

Teorem.

U poluravnini reda n , skup svih stupnjeva točaka i pravaca je

- (a) $\{n - 1, n, n + 1\} \rightsquigarrow$ hiperbolična poluravnina,
- (b) $\{n, n + 1\} \rightsquigarrow$ parabolična poluravnina,
- (c) $\{n + 1\} \rightsquigarrow$ eliptična poluravnina.

Eliptične poluravnine su **simetrične (v_k) konfiguracije**, za $k = n + 1$.

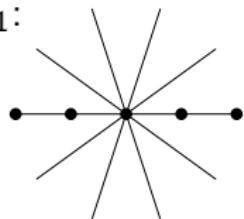
Hiperbolične i parabolične poluravnine nisu konfiguracije jer stupnjevi točaka i pravaca nisu konstantni.

Hiperbolične i parabolične poluravnine uvijek se mogu proširiti do projektivne ravnine. Eliptične poluravnine također se mogu konstruirati brisanjem podskupova projektivne ravnine, ali to nisu jedini primjeri.

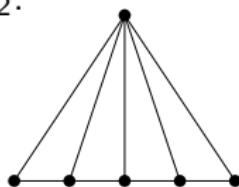
Eliptične poluravnine

Neka je \mathcal{P} projektivna ravnina reda n , a B zatvoren Baerov podskup:

B_1 :



B_2 :



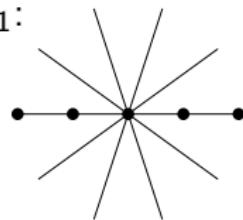
B_3 :

Baerova podravnina
(reda \sqrt{n})

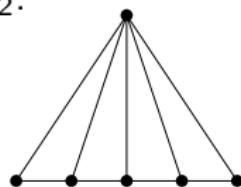
Eliptične poluravnine

Neka je \mathcal{P} projektivna ravnina reda n , a B zatvoren Baerov podskup:

B_1 :



B_2 :



B_3 :

Baerova podravnina
(reda \sqrt{n})

Tada je $\mathcal{P} - B$ eliptična poluravnina s parametrima...

$$v = n^2, k = n$$

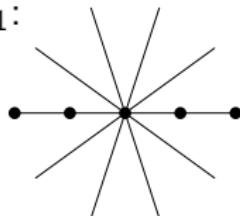
$$v = n^2 - 1, k = n$$

$$v = n^2 - \sqrt{n}, k = n$$

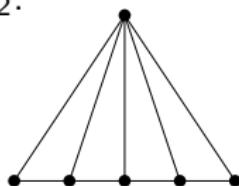
Eliptične poluravnine

Neka je \mathcal{P} projektivna ravnina reda n , a B zatvoren Baerov podskup:

B_1 :



B_2 :



B_3 :

Baerova podravnina
(reda \sqrt{n})

Tada je $\mathcal{P} - B$ eliptična poluravnina s parametrima...

$$v = n^2, k = n$$

$$v = n^2 - 1, k = n$$

$$v = n^2 - \sqrt{n}, k = n$$

Deficijencija konfiguracije je broj točaka nekolinearnih s danom točkom:
 $d = v - k(k - 1) - 1$. Eliptična poluravnina $\mathcal{P} - B$ ima deficijenciju...

$$d = k - 1$$

$$d = k - 2$$

$$d = k - \sqrt{k} - 1$$

Eliptične poluravnine

Teorem.

Deficijencija eliptične poluravnine je $d = 0$, $d = k - 1$, $d = k - 2$ ili vrijedi nejednakost $d \leq k - \sqrt{k} - 1$. U prva tri slučaja i ako vrijedi jednakost $d = k - \sqrt{k} - 1$, eliptična poluravnina je oblika $\mathcal{P} - B$. Ako vrijedi $d = 0$ ili $d \leq k - \sqrt{k} - 1$, onda klase nekolinearnih točaka i paralelnih pravaca tvore simetrični dizajn s parametrima $(v/(d+1), k, d+1)$.

Teorem.

Deficijencija eliptične poluravnine je $d = 0$, $d = k - 1$, $d = k - 2$ ili vrijedi nejednakost $d \leq k - \sqrt{k} - 1$. U prva tri slučaja i ako vrijedi jednakost $d = k - \sqrt{k} - 1$, eliptična poluravnina je oblika $\mathcal{P} - B$. Ako vrijedi $d = 0$ ili $d \leq k - \sqrt{k} - 1$, onda klase nekolinearnih točaka i paralelnih pravaca tvore simetrični dizajn s parametrima $(v/(d+1), k, d+1)$.

Poznata su samo dva primjera koja nisu oblika $\mathcal{P} - B$:

- ① (45_7) , $d = 2 \rightsquigarrow$ SBIBD $(15, 7, 3)$

R. D. Baker, *An elliptic semiplane*, J. Combin. Theory Ser. A **25** (1978), 193–195.

Teorem.

Deficijencija eliptične poluravnine je $d = 0$, $d = k - 1$, $d = k - 2$ ili vrijedi nejednakost $d \leq k - \sqrt{k} - 1$. U prva tri slučaja i ako vrijedi jednakost $d = k - \sqrt{k} - 1$, eliptična poluravnina je oblika $\mathcal{P} - B$. Ako vrijedi $d = 0$ ili $d \leq k - \sqrt{k} - 1$, onda klase nekolinearnih točaka i paralelnih pravaca tvore simetrični dizajn s parametrima $(v/(d+1), k, d+1)$.

Poznata su samo dva primjera koja nisu oblika $\mathcal{P} - B$:

- ① (45_7) , $d = 2 \rightsquigarrow$ SBIBD $(15, 7, 3)$

R. D. Baker, *An elliptic semiplane*, J. Combin. Theory Ser. A **25** (1978), 193–195.

- ② (135_{12}) , $d = 2 \rightsquigarrow$ SBIBD $(45, 12, 3)$

R. Mathon, *Divisible semiplanes*, in: *Handbook of combinatorial designs. Second edition*, Chapman & Hall/CRC, 2007, pp. 729–731.

Ulaganje u projektivnu ravninu

Ulaganje (eliptične) poluravnine \mathcal{S} u projektivnu ravninu podsjeća na proširivanje afine ravnine “pravcem u beskonačnosti”. Ključno svojstvo: paralelnost točaka i nekolinearnost pravaca su relacije ekvivalencije.

Ulaganje u projektivnu ravninu

Ulaganje (eliptične) poluravnine \mathcal{S} u projektivnu ravninu podsjeća na proširivanje afine ravnine “pravcem u beskonačnosti”. Ključno svojstvo: paralelnost točaka i nekolinearnost pravaca su relacije ekvivalencije.

- Klase paralelnih pravaca veličine bar 2 \rightsquigarrow idealne točke

Ulaganje u projektivnu ravninu

Ulaganje (eliptične) poluravnine \mathcal{S} u projektivnu ravninu podsjeća na proširivanje afine ravnine “pravcem u beskonačnosti”. Ključno svojstvo: paralelnost točaka i nekolinearnost pravaca su relacije ekvivalencije.

- Klase paralelnih pravaca veličine bar 2 \rightsquigarrow idealne točke
- Klase nekolinearnih točaka veličine bar 2 \rightsquigarrow idealni pravci

Ulaganje u projektivnu ravninu

Ulaganje (eliptične) poluravnine \mathcal{S} u projektivnu ravninu podsjeća na proširivanje afine ravnine “pravcem u beskonačnosti”. Ključno svojstvo: paralelnost točaka i nekolinearnost pravaca su relacije ekvivalencije.

- Klase paralelnih pravaca veličine bar 2 \rightsquigarrow idealne točke
- Klase nekolinearnih točaka veličine bar 2 \rightsquigarrow idealni pravci
- Incidencija idealnih elemenata sa starim elementima: idealni pravac / točka je incidentan sa svim starim točkama / pravcima koje sadrži

Ulaganje u projektivnu ravninu

Ulaganje (eliptične) poluravnine \mathcal{S} u projektivnu ravninu podsjeća na proširivanje afine ravnine “pravcem u beskonačnosti”. Ključno svojstvo: paralelnost točaka i nekolinearnost pravaca su relacije ekvivalencije.

- Klase paralelnih pravaca veličine bar 2 \rightsquigarrow idealne točke
- Klase nekolinearnih točaka veličine bar 2 \rightsquigarrow idealni pravci
- Incidencija idealnih elemenata sa starim elementima: idealni pravac / točka je incidentan sa svim starim točkama / pravcima koje sadrži
- Međusobna incidencija idealnih elemenata: idealna točka \mathfrak{T} i pravac \mathfrak{p} su incidentni ako pravci iz \mathfrak{T} nisu incidentni s točkama iz \mathfrak{p}

Ulaganje u projektivnu ravninu

Ulaganje (eliptične) poluravnine \mathcal{S} u projektivnu ravninu podsjeća na proširivanje afine ravnine “pravcem u beskonačnosti”. Ključno svojstvo: paralelnost točaka i nekolinearnost pravaca su relacije ekvivalencije.

- Klase paralelnih pravaca veličine bar 2 \rightsquigarrow idealne točke
- Klase nekolinearnih točaka veličine bar 2 \rightsquigarrow idealni pravci
- Incidencija idealnih elemenata sa starim elementima: idealni pravac / točka je incidentan sa svim starim točkama / pravcima koje sadrži
- Međusobna incidencija idealnih elemenata: idealna točka \mathfrak{T} i pravac \mathfrak{p} su incidentni ako pravci iz \mathfrak{T} nisu incidentni s točkama iz \mathfrak{p}

Poluravninu proširenu idealnim točkama i pravcima označavamo \mathcal{S}^+ . To ne mora biti projektivna ravnina, ali često bude nova poluravnina. Ponavljanjem konstrukcije dolazimo do projektivne ravnine \mathcal{S}^{++} .

Ulaganje u projektivnu ravninu

Primjer: $\mathcal{P} = PG(2, 4)$

To je 2-(21, 5, 1) dizajn ili (21_5) konfiguracija deficijencije $d = 0$.

Ulaganje u projektivnu ravninu

Primjer: $\mathcal{P} = PG(2, 4)$

To je 2-(21, 5, 1) dizajn ili (21_5) konfiguracija deficijencije $d = 0$.

$\mathcal{E}_1 = \mathcal{P} -$  \rightsquigarrow eliptična poluravnina (16_4) , $d = 3$

Ulaganje u projektivnu ravninu

Primjer: $\mathcal{P} = PG(2, 4)$

To je 2-(21, 5, 1) dizajn ili (21_5) konfiguracija deficijencije $d = 0$.

$\mathcal{E}_1 = \mathcal{P} -$  \rightsquigarrow eliptična poluravnina (16_4) , $d = 3$

$\mathcal{E}_1^+ =$ parabolična poluravnina s 20 točaka i pravaca, stupnjevi $\{4^4, 5^{16}\}$

Ulaganje u projektivnu ravninu

Primjer: $\mathcal{P} = PG(2, 4)$

To je 2-(21, 5, 1) dizajn ili (21_5) konfiguracija deficijencije $d = 0$.

$\mathcal{E}_1 = \mathcal{P} -$  \rightsquigarrow eliptična poluravnina (16_4) , $d = 3$

$\mathcal{E}_1^+ =$ parabolična poluravnina s 20 točaka i pravaca, stupnjevi $\{4^4, 5^{16}\}$

$\mathcal{E}_1^{++} = PG(2, 4)$

Ulaganje u projektivnu ravnicu

Primjer: $\mathcal{P} = PG(2, 4)$

To je 2-(21, 5, 1) dizajn ili (21_5) konfiguracija deficijencije $d = 0$.

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{P} - \text{Diagram} \rightsquigarrow \text{eliptična poluravnina } (16_4), d = 3$$
A diagram showing a central point connected by lines to 15 other points arranged in a circle. There are 5 lines connecting the center to the outer points, and 15 lines connecting adjacent outer points.

$\mathcal{E}_1^+ = \text{parabolična poluravnina s } 20 \text{ točaka i pravaca, stupnjevi } \{4^4, 5^{16}\}$

$$\mathcal{E}_1^{++} = PG(2, 4)$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{P} - \text{Diagram} \rightsquigarrow \text{eliptična poluravnina } (15_4), d = 2$$
A diagram showing a triangle with vertices and midpoints of its sides. Lines connect the top vertex to the midpoints of the bottom two sides, and the bottom vertex to the midpoints of the top two sides. This creates a total of 5 lines and 15 points.

Ulaganje u projektivnu ravninu

Primjer: $\mathcal{P} = PG(2, 4)$

To je 2-(21, 5, 1) dizajn ili (21_5) konfiguracija deficijencije $d = 0$.

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{P} - \text{ [Diagram of a circle with 12 points on the circumference and 1 center point]} \rightsquigarrow \text{eliptična poluravnina } (16_4), d = 3$$

$\mathcal{E}_1^+ = \text{parabolična poluravnina s } 20 \text{ točaka i pravaca, stupnjevi } \{4^4, 5^{16}\}$

$$\mathcal{E}_1^{++} = PG(2, 4)$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{P} - \text{ [Diagram of a triangle with 12 points on the sides and 1 center point]} \rightsquigarrow \text{eliptična poluravnina } (15_4), d = 2$$

$\mathcal{E}_2^+ = \text{parabolična poluravnina s } 20 \text{ točaka i pravaca, stupnjevi } \{4^5, 5^{15}\}$

Ulaganje u projektivnu ravninu

Primjer: $\mathcal{P} = PG(2, 4)$

To je 2-(21, 5, 1) dizajn ili (21_5) konfiguracija deficijencije $d = 0$.

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{P} - \text{ [Diagram of a star-like configuration of points and lines]} \rightsquigarrow \text{eliptična poluravnina } (16_4), d = 3$$

$\mathcal{E}_1^+ = \text{parabolična poluravnina s } 20 \text{ točaka i pravaca, stupnjevi } \{4^4, 5^{16}\}$

$$\mathcal{E}_1^{++} = PG(2, 4)$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{P} - \text{ [Diagram of a triangular configuration of points and lines]} \rightsquigarrow \text{eliptična poluravnina } (15_4), d = 2$$

$\mathcal{E}_2^+ = \text{parabolična poluravnina s } 20 \text{ točaka i pravaca, stupnjevi } \{4^5, 5^{15}\}$

$$\mathcal{E}_2^{++} = PG(2, 4)$$

Ulaganje u projektivnu ravnicu

Primjer: $\mathcal{P} = PG(2, 4)$

To je 2-(21, 5, 1) dizajn ili (21_5) konfiguracija deficijencije $d = 0$.

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{P} - \text{ [Diagram of a star-like configuration of points and lines]} \rightsquigarrow \text{eliptična poluravnina } (16_4), d = 3$$

$\mathcal{E}_1^+ = \text{parabolična poluravnina s } 20 \text{ točaka i pravaca, stupnjevi } \{4^4, 5^{16}\}$

$$\mathcal{E}_1^{++} = PG(2, 4)$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{P} - \text{ [Diagram of a triangle with internal lines]} \rightsquigarrow \text{eliptična poluravnina } (15_4), d = 2$$

$\mathcal{E}_2^+ = \text{parabolična poluravnina s } 20 \text{ točaka i pravaca, stupnjevi } \{4^5, 5^{15}\}$

$$\mathcal{E}_2^{++} = PG(2, 4)$$

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{P} - \text{ [Diagram of a triangle with internal lines forming a hexagon-like structure]} \rightsquigarrow \text{eliptična poluravnina } (14_4), d = 1$$

Ulaganje u projektivnu ravnicu

Primjer: $\mathcal{P} = PG(2, 4)$

To je 2-(21, 5, 1) dizajn ili (21_5) konfiguracija deficijencije $d = 0$.

$\mathcal{E}_1 = \mathcal{P} -$  \rightsquigarrow eliptična poluravnina (16_4) , $d = 3$

$\mathcal{E}_1^+ =$ parabolična poluravnina s 20 točaka i pravaca, stupnjevi $\{4^4, 5^{16}\}$

$\mathcal{E}_1^{++} = PG(2, 4)$

$\mathcal{E}_2 = \mathcal{P} -$  \rightsquigarrow eliptična poluravnina (15_4) , $d = 2$

$\mathcal{E}_2^+ =$ parabolična poluravnina s 20 točaka i pravaca, stupnjevi $\{4^5, 5^{15}\}$

$\mathcal{E}_2^{++} = PG(2, 4)$

$\mathcal{E}_3 = \mathcal{P} -$  \rightsquigarrow eliptična poluravnina (14_4) , $d = 1$

$\mathcal{E}_3^+ = PG(2, 4)$

Ulaganje u projektivnu ravninu

Ako je deficijencija $0 < d < k - \sqrt{k} - 1$, proširivanje idealnim elementima ne daje projektivnu ravninu.

Ulaganje u projektivnu ravninu

Ako je deficijencija $0 < d < k - \sqrt{k} - 1$, proširivanje idealnim elementima ne daje projektivnu ravninu.

\mathcal{E} = Bakerova eliptična poluravnina (45_7) , $d = 2$

\mathcal{E}^+ ima 60 točaka i pravaca, stupnjevi $\{8^{45}, 10^{15}\} \rightsquigarrow$ nije poluravnina

Ulaganje u projektivnu ravninu

Ako je deficijencija $0 < d < k - \sqrt{k} - 1$, proširivanje idealnim elementima ne daje projektivnu ravninu.

\mathcal{E} = Bakerova eliptična poluravnina (45_7) , $d = 2$

\mathcal{E}^+ ima 60 točaka i pravaca, stupnjevi $\{8^{45}, 10^{15}\} \rightsquigarrow$ nije poluravnina

\mathcal{E} = Mathonova eliptična poluravnina (135_{12}) , $d = 2$

\mathcal{E}^+ ima 180 točaka i pravaca, stupnjevi $\{13^{135}, 36^{45}\} \rightsquigarrow$ nije poluravnina

Ulaganje u projektivnu ravninu

Ako je deficijencija $0 < d < k - \sqrt{k} - 1$, proširivanje idealnim elementima ne daje projektivnu ravninu.

\mathcal{E} = Bakerova eliptična poluravnina (45_7), $d = 2$

\mathcal{E}^+ ima 60 točaka i pravaca, stupnjevi $\{8^{45}, 10^{15}\} \rightsquigarrow$ nije poluravnina

\mathcal{E} = Mathonova eliptična poluravnina (135_{12}), $d = 2$

\mathcal{E}^+ ima 180 točaka i pravaca, stupnjevi $\{13^{135}, 36^{45}\} \rightsquigarrow$ nije poluravnina

Lema.

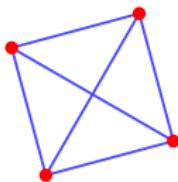
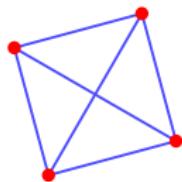
U eliptičnoj poluravnini deficijencije d , klase paralelnih pravaca i nekolinearnih točaka su veličine $d + 1$. Ukupan broj točaka i pravaca je $v = k(k - 1) + d + 1$.

Jako regularne konfiguracije

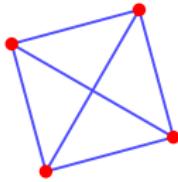
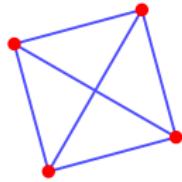
Proširivanje idealnim elementima funkcioniра jer su paralelni pravci i nekolinearne točke grupirane u klase. [Graf nekolinearnosti / paralelnosti](#) je disjunktna unija $m = \frac{v}{d+1}$ potpunih grafova K_n za $n = d + 1$:

Jako regularne konfiguracije

Proširivanje idealnim elementima funkcioniра jer su paralelni pravci i nekolinearne točke grupirane u klase. [Graf nekolinearnosti / paralelnosti](#) je disjunktna unija $m = \frac{v}{d+1}$ potpunih grafova K_n za $n = d + 1$:



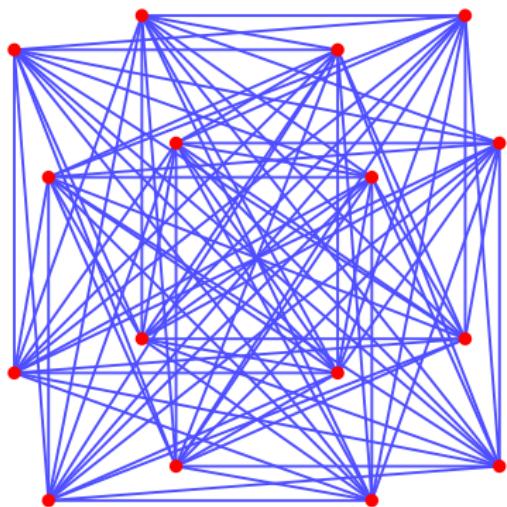
$$\Gamma = m \cdot K_n \text{ je } SRG(mn, n - 1, n - 2, 0)$$



Parametri jednoznačno određuju taj graf

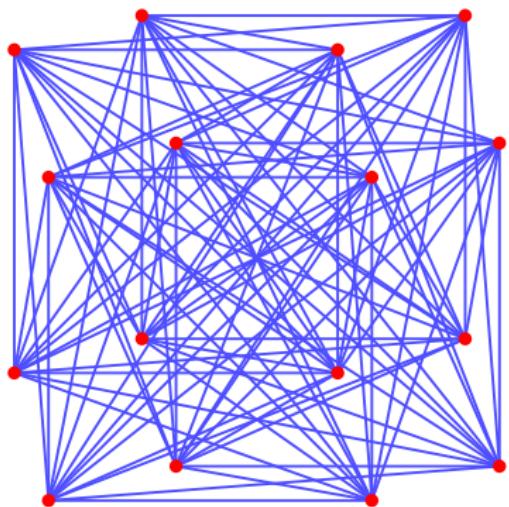
Jako regularne konfiguracije

Graf kolinearnosti ili graf točaka / pravaca je komplement tog grafa, tj. potpuni multipartitni graf $K_{n,n,\dots,n} = K_{m \times n}$:



Jako regularne konfiguracije

Graf kolinearnosti ili graf točaka / pravaca je komplement tog grafa, tj. potpuni multipartitni graf $K_{n,n,\dots,n} = K_{m \times n}$:

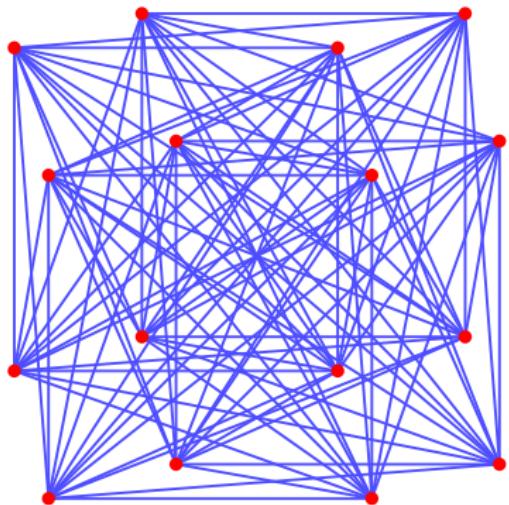


$$\bar{\Gamma} = K_{m \times n} \text{ je } SRG(mn, mn - n, mn - 2n, mn - n)$$

I taj graf je jednoznačno određen s parametrima

Jako regularne konfiguracije

Graf kolinearnosti ili graf točaka / pravaca je komplement tog grafa, tj. potpuni multipartitni graf $K_{n,n,\dots,n} = K_{m \times n}$:



$$\overline{\Gamma} = K_{m \times n} \text{ je } SRG(mn, mn - n, mn - 2n, mn - n)$$

I taj graf je jednoznačno određen s parametrima

$$\overline{SRG(v, k, \lambda, \mu)} = SRG(v, v - 1 - k, v - 2k + \mu - 2, v - 2k + \lambda)$$

Jako regularne konfiguracije

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, preprint. <https://arxiv.org/abs/2104.04880>

Jako regularna konfiguracija s parametrima $(v_k; \lambda, \mu)$ je simetrična (v_k) konfiguracija kojoj je pridruženi graf točaka jako regularan s parametrima $SRG(v, k(k - 1), \lambda, \mu)$.

Jako regularne konfiguracije

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, preprint. <https://arxiv.org/abs/2104.04880>

Jako regularna konfiguracija s parametrima $(v_k; \lambda, \mu)$ je simetrična (v_k) konfiguracija kojoj je pridruženi graf točaka jako regularan s parametrima $SRG(v, k(k - 1), \lambda, \mu)$.

Teorem.

U jako regularnoj $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguraciji, graf pravaca je također jako regularan s parametrima $SRG(v, k(k - 1), \lambda, \mu)$.

Jako regularne konfiguracije

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, preprint. <https://arxiv.org/abs/2104.04880>

Jako regularna konfiguracija s parametrima $(v_k; \lambda, \mu)$ je simetrična (v_k) konfiguracija kojoj je pridruženi graf točaka jako regularan s parametrima $SRG(v, k(k - 1), \lambda, \mu)$.

Teorem.

U jako regularnoj $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguraciji, graf pravaca je također jako regularan s parametrima $SRG(v, k(k - 1), \lambda, \mu)$.

Teorem.

Incidencijska struktura je eliptična poluravnina ako i samo ako je jako regularna konfiguracija kojoj je graf točaka / pravaca potpun multipartitan.

Jako regularne konfiguracije

U članku nas zanimaju $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije koje su **primitivne**, što znači da grafovi kolinearnosti i nekolinearnosti **nisu** potpuni multipartitni (ili ekvivalentno $0 < \mu < k(k - 1)$), i **prave**, što znači da **nisu** parcijalne geometrije (ili ekvivalentno $(v - k)(\lambda + 1) > k(k - 1)^3$).

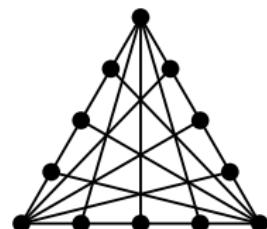
Jako regularne konfiguracije

U članku nas zanimaju $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije koje su **primitivne**, što znači da grafovi kolinearnosti i nekolinearnosti **nisu** potpuni multipartitni (ili ekvivalentno $0 < \mu < k(k - 1)$), i **prave**, što znači da **nisu** parcijalne geometrije (ili ekvivalentno $(v - k)(\lambda + 1) > k(k - 1)^3$).

Ovo je konstrukcija jedne familije takvih konfiguracija:

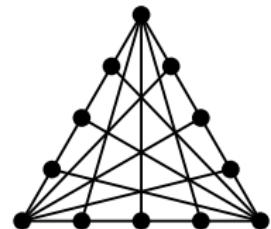
Teorem.

Neka je \mathcal{P} projektivna ravnina reda $n \geq 5$ i A, B, C tri nekolinearne točke. Ako izbacimo sve točke na prvcima AB, AC, BC i sve pravce kroz točke A, B, C , ostaje jako regularna $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracija s parametrima $v = (n - 1)^2$, $k = n - 2$, $\lambda = (n - 4)^2 + 1$ i $\mu = (n - 3)(n - 4)$. Ta konfiguracija nije (semi)parcijalna geometrija.



Jako regularne konfiguracije

Dokaz. Izbacujemo $3(n + 1) - 3 = 3n$ točaka i pravaca
 \Rightarrow ostaje $v = n^2 + n + 1 - 3n = n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2$.



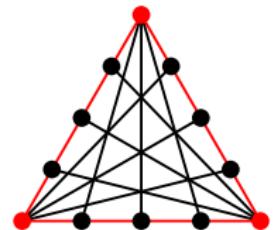
Jako regularne konfiguracije

Dokaz. Izbacujemo $3(n+1) - 3 = 3n$ točaka i pravaca

$$\Rightarrow \text{ostaje } v = n^2 + n + 1 - 3n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2.$$

Svaki pravac koji ne prolazi kroz A, B, C siječe pravce

AB, AC, BC u tri točke \Rightarrow svaki pravac konfiguracije sadrži
 $k = n+1 - 3 = n-2$ točaka.



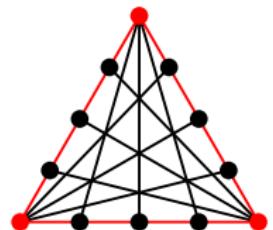
Jako regularne konfiguracije

Dokaz. Izbacujemo $3(n+1) - 3 = 3n$ točaka i pravaca

$$\Rightarrow \text{ostaje } v = n^2 + n + 1 - 3n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2.$$

Svaki pravac koji ne prolazi kroz A, B, C siječe pravce

AB, AC, BC u tri točke \Rightarrow svaki pravac konfiguracije sadrži $k = n+1 - 3 = n-2$ točaka.



Neka su P i Q dvije točke konfiguracije. Treba prebrojati točke T koje su kolinearne s P i Q i vidjeti da broj ovisi samo o tome jesu li P i Q kolinearne ili nisu.

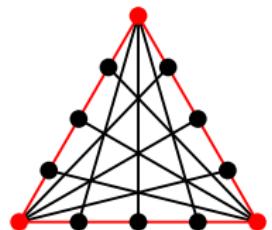
Jako regularne konfiguracije

Dokaz. Izbacujemo $3(n+1) - 3 = 3n$ točaka i pravaca

$$\Rightarrow \text{ostaje } v = n^2 + n + 1 - 3n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2.$$

Svaki pravac koji ne prolazi kroz A, B, C siječe pravce

AB, AC, BC u tri točke \Rightarrow svaki pravac konfiguracije sadrži $k = n+1 - 3 = n-2$ točaka.



Neka su P i Q dvije točke konfiguracije. Treba prebrojati točke T koje su kolinearne s P i Q i vidjeti da broj ovisi samo o tome jesu li P i Q kolinearne ili nisu.

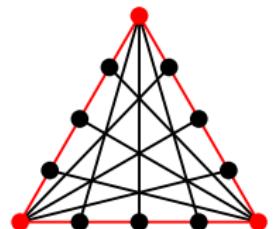
Neka su P i Q kolinearne, tj. ne leže na pravcu kroz A, B niti C .

Jako regularne konfiguracije

Dokaz. Izbacujemo $3(n+1) - 3 = 3n$ točaka i pravaca

$$\Rightarrow \text{ostaje } v = n^2 + n + 1 - 3n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2.$$

Svaki pravac koji ne prolazi kroz A, B, C siječe pravce AB, AC, BC u tri točke \Rightarrow svaki pravac konfiguracije sadrži $k = n+1 - 3 = n-2$ točaka.



Neka su P i Q dvije točke konfiguracije. Treba prebrojati točke T koje su kolinearne s P i Q i vidjeti da broj ovisi samo o tome jesu li P i Q kolinearne ili nisu.

Neka su P i Q kolinearne, tj. ne leže na pravcu kroz A, B niti C .

Točke T koje **nisu** kolinearne s P :

$$\rightsquigarrow \text{točke konfiguracije na prvcima } AP, BP, CP \rightsquigarrow 3(n-2)$$

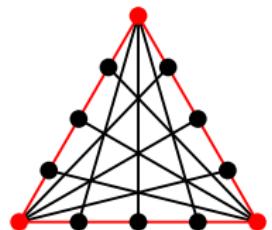
Jako regularne konfiguracije

Dokaz. Izbacujemo $3(n+1) - 3 = 3n$ točaka i pravaca

$$\Rightarrow \text{ostaje } v = n^2 + n + 1 - 3n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2.$$

Svaki pravac koji ne prolazi kroz A, B, C siječe pravce

AB, AC, BC u tri točke \Rightarrow svaki pravac konfiguracije sadrži $k = n+1 - 3 = n-2$ točaka.



Neka su P i Q dvije točke konfiguracije. Treba prebrojati točke T koje su kolinearne s P i Q i vidjeti da broj ovisi samo o tome jesu li P i Q kolinearne ili nisu.

Neka su P i Q kolinearne, tj. ne leže na pravcu kroz A, B niti C .

Točke T koje **nisu** kolinearne s P :

\rightsquigarrow točke konfiguracije na prvcima $AP, BP, CP \rightsquigarrow 3(n-2)$

Točke T koje **nisu** kolinearne s Q : $\rightsquigarrow 3(n-2)$

Jako regularne konfiguracije

Točke T koje **nisu** kolinearne niti P niti s Q :

↔ presjeci pravaca AP , BP , CP s pravcima AQ , BQ , CQ

Jako regularne konfiguracije

Točke T koje **nisu** kolinearne niti P niti s Q :

↔ presjeci pravaca AP , BP , CP s pravcima AQ , BQ , CQ

$$\left. \begin{array}{ll} AP \cap BQ & AP \cap CQ \\ BP \cap AQ & BP \cap CQ \\ CP \cap AQ & CP \cap BQ \end{array} \right\} \quad 6 \text{ točaka}$$

Jako regularne konfiguracije

Točke T koje **nisu** kolinearne niti P niti s Q :

↔ presjeci pravaca AP , BP , CP s pravcima AQ , BQ , CQ

$$\left. \begin{array}{ll} AP \cap BQ & AP \cap CQ \\ BP \cap AQ & BP \cap CQ \\ CP \cap AQ & CP \cap BQ \end{array} \right\} \quad 6 \text{ točaka}$$

Točke T koje **jesu** kolinearne s P i Q :

$$\lambda = (n - 1)^2 - 2 - 6(n - 2) + 6 = (n - 4)^2 + 1$$

Jako regularne konfiguracije

Točke T koje **nisu** kolinearne niti P niti s Q :

↔ presjeci pravaca AP , BP , CP s pravcima AQ , BQ , CQ

$$\left. \begin{array}{ll} AP \cap BQ & AP \cap CQ \\ BP \cap AQ & BP \cap CQ \\ CP \cap AQ & CP \cap BQ \end{array} \right\} \quad \text{6 točaka}$$

Točke T koje **jesu** kolinearne s P i Q :

$$\lambda = (n - 1)^2 - 2 - 6(n - 2) + 6 = (n - 4)^2 + 1$$

Na sličan način vidimo da je za nekolinearne točke P i Q broj točaka T kolinearnih s obje jednak $\mu = (n - 3)(n - 4)$.

Jako regularne konfiguracije

Točke T koje **nisu** kolinearne niti P niti s Q :

↔ presjeci pravaca AP , BP , CP s pravcima AQ , BQ , CQ

$$\left. \begin{array}{ll} AP \cap BQ & AP \cap CQ \\ BP \cap AQ & BP \cap CQ \\ CP \cap AQ & CP \cap BQ \end{array} \right\} \quad \text{6 točaka}$$

Točke T koje **jesu** kolinearne s P i Q :

$$\lambda = (n - 1)^2 - 2 - 6(n - 2) + 6 = (n - 4)^2 + 1$$

Na sličan način vidimo da je za nekolinearne točke P i Q broj točaka T kolinearnih s obje jednak $\mu = (n - 3)(n - 4)$.

Na kraju pokazujemo da konfiguracija nije (α, β) -geometrija, tj. da za neincidentne parove (P, ℓ) broj točaka na ℓ kolinearnih s P poprima tri različite vrijednosti. Iz toga slijedi da konfiguracija nije parcijalna geometrija niti semiparcijalna geometrija.

Jako regularne konfiguracije

U klasičnoj projektivnoj ravnini $\mathcal{P} = PG(2, q)$ svi trokuti su međusobno ekvivalentni i dobivamo samo jednu jako regularnu konfiguraciju.

Jako regularne konfiguracije

U klasičnoj projektivnoj ravnini $\mathcal{P} = PG(2, q)$ svi trokuti su međusobno ekvivalentni i dobivamo samo jednu jako regularnu konfiguraciju.

Od neklasičnih ravnina dobivamo više konfiguracija, npr. za $n = 9$:

Ravnina	Aut	#SRCf	Ravnina	Aut	#SRCf
$PG(2, 9)$	768	1	Hughesova	144	1
Hallova	768	1		48	1
	96	2		32	1
	12	2		18	1
	6	1		12	3
Dualna Hallova	768	1		6	4
	96	2		4	3
	12	2		2	1
	6	1		1	1

Jako regularne konfiguracije

U klasičnoj projektivnoj ravnini $\mathcal{P} = PG(2, q)$ svi trokuti su međusobno ekvivalentni i dobivamo samo jednu jako regularnu konfiguraciju.

Od neklasičnih ravnina dobivamo više konfiguracija, npr. za $n = 9$:

Ravnina	Aut	#SRCf	Ravnina	Aut	#SRCf
$PG(2, 9)$	768	1	Hughesova	144	1
Hallova	768	1		48	1
	96	2		32	1
	12	2		18	1
	6	1		12	3
Dualna Hallova	768	1		6	4
	96	2		4	3
	12	2		2	1
	6	1		1	1

Ukupan broj konstruiranih $(64_7; 26, 30)$ konfiguracija: 29.

Jako regularne konfiguracije

U klasičnoj projektivnoj ravnini $\mathcal{P} = PG(2, q)$ svi trokuti su međusobno ekvivalentni i dobivamo samo jednu jako regularnu konfiguraciju.

Od neklasičnih ravnina dobivamo više konfiguracija, npr. za $n = 9$:

Ravnina	Aut	#SRCf	Ravnina	Aut	#SRCf
$PG(2, 9)$	768	1	Hughesova	144	1
Hallova	768	1		48	1
	96	2		32	1
	12	2		18	1
	6	1		12	3
Dualna Hallova	768	1		6	4
	96	2		4	3
	12	2		2	1
	6	1		1	1

Ukupan broj konstruiranih $(64_7; 26, 30)$ konfiguracija: 29. **Jesu li to sve?**

Glavno pitanje

Može li se svaka $((n-1)_{n-2}^2; (n-4)^2 + 1, (n-3)(n-4))$ konfiguracija proširiti do (jedinstvene) projektivne ravnine reda n ?

Glavno pitanje

Može li se svaka $((n-1)_{n-2}^2; (n-4)^2 + 1, (n-3)(n-4))$ konfiguracija proširiti do (jedinstvene) projektivne ravnine reda n ?

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	n	#Ravnina	#SRCf	#SSRCf	#SRG
3	$(16_3; 2, 2)$	5	1	1	1	2
4	$(25_4; 5, 6)$	6	0	0	0	15
5	$(36_5; 10, 12)$	7	1	1	1	32 548
9	$(49_6; 17, 20)$	8	1	1	1	727
13	$(64_7; 26, 30)$	9	4	29	11	500 000
14	$(81_8; 37, 42)$	10	0	?	?	21 392 603
19	$(100_9; 50, 56)$	11	1	1	1	+
26	$(121_{10}; 65, 72)$	12	?	?	?	+
30	$(144_{11}; 82, 90)$	13	1	1	1	+
35	$(169_{12}; 101, 110)$	14	0	?	?	+
40	$(196_{13}; 122, 132)$	15	?	?	?	+

Glavno pitanje

Ako se svaka $((n-1)_n^2; (n-4)^2 + 1, (n-3)(n-4))$ konfiguracija može proširiti do jedinstvene projektivne ravnine reda n ...

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	n	#Ravnina	#SRCf	#SSRCf	#SRG
3	$(16_3; 2, 2)$	5	1	1	1	2
4	$(25_4; 5, 6)$	6	0	0	0	15
5	$(36_5; 10, 12)$	7	1	1	1	32 548
9	$(49_6; 17, 20)$	8	1	1	1	727
13	$(64_7; 26, 30)$	9	4	29	11	500 000
14	$(81_8; 37, 42)$	10	0	0	0	21 392 603
19	$(100_9; 50, 56)$	11	1	1	1	+
26	$(121_{10}; 65, 72)$	12	?	?	?	+
30	$(144_{11}; 82, 90)$	13	1	1	1	+
35	$(169_{12}; 101, 110)$	14	0	0	0	+
40	$(196_{13}; 122, 132)$	15	?	?	?	+

Zašto ne funkcionira “proširivanje idealnim elementima”?

Zašto ne funkcionira “proširivanje idealnim elementima”?

Konfiguracija dobivena “izbacivanjem trokuta” iz projektivne ravnine reda n ima graf kolinearnosti s parametrima

$$SRG((n-1)^2, (n-2)(n-3), (n-4)^2 + 1, (n-3)(n-4))$$

i graf nekolinearnosti $SRG((n-1)^2, 3(n-2), n-1, 6)$.

Zašto ne funkcionira “proširivanje idealnim elementima”?

Konfiguracija dobivena “izbacivanjem trokuta” iz projektivne ravnine reda n ima graf kolinearnosti s parametrima

$$SRG((n-1)^2, (n-2)(n-3), (n-4)^2 + 1, (n-3)(n-4))$$

i graf nekolinearnosti $SRG((n-1)^2, 3(n-2), n-1, 6)$.

To su *pseudo Latin square graphs* $LS_{n-3}(n-1)$ i $LS_3(n-1)$.

Zašto ne funkcionira “proširivanje idealnim elementima”?

Konfiguracija dobivena “izbacivanjem trokuta” iz projektivne ravnine reda n ima graf kolinearnosti s parametrima

$$SRG((n-1)^2, (n-2)(n-3), (n-4)^2 + 1, (n-3)(n-4))$$

i graf nekolinearnosti $SRG((n-1)^2, 3(n-2), n-1, 6)$.

To su *pseudo Latin square graphs* $LS_{n-3}(n-1)$ i $LS_3(n-1)$.

Neka su $A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]$, $k = 1, \dots, m-2$ međusobno ortogonalni latinski kvadrati reda n . Definiramo graf s vrhovima $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$. Vrhovi (i, j) , (i', j') su susjedni ako je $i = i'$ ili $j = j'$ ili je $a_{ij}^{(k)} = a_{i'j'}^{(k)}$ za neki $k \in \{1, \dots, m-2\}$. Za $m = 2$ to je *topovski graf (rook graph)* i označavamo ga R_n .

Grafovi od ortogonalnih latinskih kvadrata

Graf konstruiran od $m - 2$ ortogonalna latinska kvadrata reda n je

$$SRG(n^2, m(n-1), (m-1)(m-2) + n-2, m(m-1)).$$

Svaki graf s tim parametrima nazivamo *pseudo Latin square graph*,
a parametre označavamo $LS_m(n)$.

Grafovi od ortogonalnih latinskih kvadrata

Graf konstruiran od $m - 2$ ortogonalna latinska kvadrata reda n je

$$SRG(n^2, m(n-1), (m-1)(m-2) + n-2, m(m-1)).$$

Svaki graf s tim parametrima nazivamo *pseudo Latin square graph*, a parametre označavamo $LS_m(n)$.

S. S. Shrikhande, *The uniqueness of the L_2 association scheme*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 781–798.

Teorem.

Za $n \neq 4$ graf s parametrima $LS_2(n)$ je jedinstven i izomorfan s R_n .

Za $n = 4$ postoje dva neizomorfna grafa $LS_2(4)$.

Grafovi od ortogonalnih latinskih kvadrata

Graf konstruiran od $m - 2$ ortogonalna latinska kvadrata reda n je

$$SRG(n^2, m(n-1), (m-1)(m-2) + n-2, m(m-1)).$$

Svaki graf s tim parametrima nazivamo *pseudo Latin square graph*, a parametre označavamo $LS_m(n)$.

S. S. Shrikhande, *The uniqueness of the L_2 association scheme*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 781–798.

Teorem.

Za $n \neq 4$ graf s parametrima $LS_2(n)$ je jedinstven i izomorfan s R_n .

Za $n = 4$ postoje dva neizomorfna grafa $LS_2(4)$.

Konfiguracija $(163; 2, 2)$ konstruirana od $PG(2, 5)$ ima upravo **Shrikhandeov graf** kao graf kolinearnosti. To je drugi graf s parametrima $LS_2(4)$, koji nije izomorfan s R_4 .

Grafovi od ortogonalnih latinskih kvadrata

Teorem.

Graf R_n ne može biti graf kolinearnosti $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije za

$$n = \binom{k}{2} + 1, \quad v = n^2, \quad \lambda = n - 2, \quad \mu = 2. \quad (1)$$

Grafovi od ortogonalnih latinskih kvadrata

Teorem.

Graf R_n ne može biti graf kolinearnosti $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije za

$$n = \binom{k}{2} + 1, \quad v = n^2, \quad \lambda = n - 2, \quad \mu = 2. \quad (1)$$

Korolar.

Jako regularne konfiguracije s parametrima (1) ne postoje za $k > 3$, a za $k = 3$ postoji točno jedna konfiguracija.

Grafovi od ortogonalnih latinskih kvadrata

Teorem.

Graf R_n ne može biti graf kolinearnosti $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije za

$$n = \binom{k}{2} + 1, \quad v = n^2, \quad \lambda = n - 2, \quad \mu = 2. \quad (1)$$

Korolar.

Jako regularne konfiguracije s parametrima (1) ne postoje za $k > 3$, a za $k = 3$ postoji točno jedna konfiguracija.

Zašto ne funkcionira “proširivanje idealnim elementima”?

Za $m > 2$, grafovi $LS_m(n)$ **nisu** jednoznačno određeni parametrima. Postoji puno neizomorfnih grafova s istim parametrima, a mnogi od njih **ne** dobivaju se konstrukcijom od ortogonalnih latinskih kvadrata.

Grafovi od ortogonalnih latinskih kvadrata

Primjer: $PG(2, 7) \rightsquigarrow$ konfiguracija $(36_5; 10, 12) \rightsquigarrow$ graf $LS_4(6)$

Taj graf ne dobiva se od ortogonalnih latinskih kvadrata jer za red 6 oni **ne postoje**.

Grafovi od ortogonalnih latinskih kvadrata

Primjer: $PG(2, 7) \rightsquigarrow$ konfiguracija $(36_5; 10, 12) \rightsquigarrow$ graf $LS_4(6)$

Taj graf ne dobiva se od ortogonalnih latinskih kvadrata jer za red 6 oni **ne postoje**.

Hipotezu da se $((n - 1)_{n-2}^2; (n - 4)^2 + 1, (n - 3)(n - 4))$ konfiguracije uvijek proširuju do projektivne ravnine možemo testirati tako da konstruiramo **sve** male primjere.

Grafovi od ortogonalnih latinskih kvadrata

Primjer: $PG(2, 7) \rightsquigarrow$ konfiguracija $(36_5; 10, 12) \rightsquigarrow$ graf $LS_4(6)$

Taj graf ne dobiva se od ortogonalnih latinskih kvadrata jer za red 6 oni **ne postoje**.

Hipotezu da se $((n-1)_{n-2}^2; (n-4)^2 + 1, (n-3)(n-4))$ konfiguracije uvijek proširuju do projektivne ravnine možemo testirati tako da konstruiramo **sve** male primjere.

Od ukupno 10 kombinatornih (10_3) konfiguracija, dvije su jako regularne.

Od ukupno 2036 komb. (13_3) konfiguracija, jedna je jako regularna.

Od ukupno 3 004 881 komb. (16_3) konfiguracija, jedna je jako regularna.

Grafovi od ortogonalnih latinskih kvadrata

Primjer: $PG(2, 7) \rightsquigarrow$ konfiguracija $(36_5; 10, 12) \rightsquigarrow$ graf $LS_4(6)$

Taj graf ne dobiva se od ortogonalnih latinskih kvadrata jer za red 6 oni **ne postoje**.

Hipotezu da se $((n - 1)_{n-2}^2; (n - 4)^2 + 1, (n - 3)(n - 4))$ konfiguracije uvijek proširuju do projektivne ravnine možemo testirati tako da konstruiramo **sve** male primjere.

Od ukupno 10 kombinatornih (10_3) konfiguracija, dvije su jako regularne.

Od ukupno 2036 komb. (13_3) konfiguracija, jedna je jako regularna.

Od ukupno 3 004 881 komb. (16_3) konfiguracija, jedna je jako regularna.

Efikasniji pristup: preko pridruženih jako regularnih grafova. Npr. grafovi pridruženi $(16_3; 2, 2)$ konfiguraciji imaju parametre $LS_2(4)$. Postoje samo dva takva grafa do na izomorfizam.

Klasifikacija malih primjera

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	#SRCf	#SSRCf	#Cf	#SRG
1	$(10_3; 3, 4)$	2	2	10	1
2	$(13_3; 2, 3)$	1	1	2036	1
3	$(16_3; 2, 2)$	1	1	3 004 881	2
4	$(25_4; 5, 6)$	0	0		15
5	$(36_5; 10, 12)$	1	1		32548
6	$(41_5; 9, 10)$?	?		80
7	$(45_4; 3, 3)$	0	0		78
8	$(49_4; 5, 2)$	0	0		1
9	$(49_6; 17, 20)$	1	1		727
10	$(50_7; 35, 36)$	211	111		1

Klasifikacija malih primjera

Neka je graf Γ s parametrima $SRG(v, k(k - 1), \lambda, \mu)$ graf kolinearnosti $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije. Svaki pravac konfiguracije definira kliku veličine k u Γ . Prema tome, Γ mora imati bar v takvih klika od kojih se svake dvije sijeku najviše u jednoj točki.

Klasifikacija malih primjera

Neka je graf Γ s parametrima $SRG(v, k(k - 1), \lambda, \mu)$ graf kolinearnosti $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije. Svaki pravac konfiguracije definira kliku veličine k u Γ . Prema tome, Γ mora imati bar v takvih klika od kojih se svake dvije sijeku najviše u jednoj točki.

~~ Definiramo graf klika $\mathcal{C}(\Gamma)$ i u njemu tražimo klike veličine v .

Klasifikacija malih primjera

Neka je graf Γ s parametrima $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$ graf kolinearnosti $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije. Svaki pravac konfiguracije definira kliku veličine k u Γ . Prema tome, Γ mora imati bar v takvih klika od kojih se svake dvije sijeku najviše u jednoj točki.

↔ Definiramo graf klika $\mathcal{C}(\Gamma)$ i u njemu tražimo klike veličine v .

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	n	#Ravnina	#SRCf	#SSRCf	#SRG
3	$(16_3; 2, 2)$	5	1	1	1	2
4	$(25_4; 5, 6)$	6	0	0	0	15
5	$(36_5; 10, 12)$	7	1	1	1	32 548

Klasifikacija malih primjera

$SRG(16, 6, 2, 2)$: **2 grafa**

Klasifikacija malih primjera

SRG(16, 6, 2, 2): **2 grafa**

- ① Shrikhandeov graf s $|\text{Aut}(\Gamma)| = 192$

~~ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i dvije klike veličine 16 koje odgovaraju izomorfnim $(16_3; 2, 2)$ konfiguracijama.

- ② Topovski graf R_4 s $|\text{Aut}(\Gamma)| = 1152$

~~ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i nema klika veličine 16.

Klasifikacija malih primjera

SRG(16, 6, 2, 2): **2 grafa**

① Shrikhandeov graf s $|\text{Aut}(\Gamma)| = 192$

~~ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i dvije klike veličine 16 koje odgovaraju izomorfnim $(16_3; 2, 2)$ konfiguracijama.

② Topovski graf R_4 s $|\text{Aut}(\Gamma)| = 1152$

~~ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i nema klika veličine 16.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(16_3; 2, 2)$ konfiguracija.

Klasifikacija malih primjera

$SRG(16, 6, 2, 2)$: **2 grafa**

① Shrikhandeov graf s $|\text{Aut}(\Gamma)| = 192$

~~ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i dvije klike veličine 16 koje odgovaraju izomorfnim $(16_3; 2, 2)$ konfiguracijama.

② Topovski graf R_4 s $|\text{Aut}(\Gamma)| = 1152$

~~ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i nema klika veličine 16.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(16_3; 2, 2)$ konfiguracija.

$SRG(25, 12, 5, 6)$: **15 grafova**

Klasifikacija malih primjera

$SRG(16, 6, 2, 2)$: **2 grafa**

① Shrikhandeov graf s $|\text{Aut}(\Gamma)| = 192$

~~ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i dvije klike veličine 16 koje odgovaraju izomorfnim $(16_3; 2, 2)$ konfiguracijama.

② Topovski graf R_4 s $|\text{Aut}(\Gamma)| = 1152$

~~ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i nema klika veličine 16.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(16_3; 2, 2)$ konfiguracija.

$SRG(25, 12, 5, 6)$: **15 grafova**

Cliquer nalazi od 73 do 90 klika veličine 4 u tim grafovima, ali odgovarajući grafovi $\mathcal{C}(\Gamma)$ ne sadrže kliku veličine 25.

Klasifikacija malih primjera

$SRG(16, 6, 2, 2)$: **2 grafa**

① Shrikhandeov graf s $|\text{Aut}(\Gamma)| = 192$

~~ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i dvije klike veličine 16 koje odgovaraju izomorfnim $(16_3; 2, 2)$ konfiguracijama.

② Topovski graf R_4 s $|\text{Aut}(\Gamma)| = 1152$

~~ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i nema klika veličine 16.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(16_3; 2, 2)$ konfiguracija.

$SRG(25, 12, 5, 6)$: **15 grafova**

Cliquer nalazi od 73 do 90 klika veličine 4 u tim grafovima, ali odgovarajući grafovi $\mathcal{C}(\Gamma)$ ne sadrže kliku veličine 25.

Propozicija.

Ne postoje jako regularne $(25_4; 5, 6)$ konfiguracije.

Klasifikacija malih primjera

$SRG(36, 20, 10, 12)$: **32 548 grafova**

Klasifikacija malih primjera

$SRG(36, 20, 10, 12)$: **32 548 grafova**

$\mathcal{C}(\Gamma)$: \rightsquigarrow 132 - 336 vrhova (prosječno ≈ 218)

\rightsquigarrow gustoća 83 % - 87 % (prosječno ≈ 85.5 %)

\rightsquigarrow broj klika veličine 36: u jednom grafu 2 (daju izomorfne konfiguracije),
u svim ostalim grafovima 0

Klasifikacija malih primjera

$SRG(36, 20, 10, 12)$: **32 548 grafova**

$\mathcal{C}(\Gamma)$: \rightsquigarrow 132 - 336 vrhova (prosječno ≈ 218)

\rightsquigarrow gustoća 83 % - 87 % (prosječno $\approx 85.5 \%$)

\rightsquigarrow broj klika veličine 36: u jednom grafu 2 (daju izomorfne konfiguracije),
u svim ostalim grafovima 0

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(36_5; 10, 12)$ konfiguracija.

Klasifikacija malih primjera

$SRG(36, 20, 10, 12)$: **32 548 grafova**

$\mathcal{C}(\Gamma)$: \rightsquigarrow 132 - 336 vrhova (prosječno ≈ 218)

\rightsquigarrow gustoća 83 % - 87 % (prosječno $\approx 85.5 \%$)

\rightsquigarrow broj klika veličine 36: u jednom grafu 2 (daju izomorfne konfiguracije),
u svim ostalim grafovima 0

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(36_5; 10, 12)$ konfiguracija.

Vrijeme ispitivanja jednog grafa \rightsquigarrow prosječno oko 11 minuta

\rightsquigarrow u najgorem slučaju 3 dana i 17 sati

Klasifikacija malih primjera

$SRG(36, 20, 10, 12)$: **32 548 grafova**

$\mathcal{C}(\Gamma)$: \rightsquigarrow 132 - 336 vrhova (prosječno ≈ 218)

\rightsquigarrow gustoća 83 % - 87 % (prosječno $\approx 85.5 \%$)

\rightsquigarrow broj klika veličine 36: u jednom grafu 2 (daju izomorfne konfiguracije),
u svim ostalim grafovima 0

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(36_5; 10, 12)$ konfiguracija.

Vrijeme ispitivanja jednog grafa \rightsquigarrow prosječno oko 11 minuta

\rightsquigarrow u najgorem slučaju 3 dana i 17 sati

Ukupno utrošeno CPU vrijeme: 258 dana (70 % godine)

Klasifikacija malih primjera

$SRG(36, 20, 10, 12)$: **32 548 grafova**

$\mathcal{C}(\Gamma)$: \rightsquigarrow 132 - 336 vrhova (prosječno ≈ 218)

\rightsquigarrow gustoća 83 % - 87 % (prosječno $\approx 85.5 \%$)

\rightsquigarrow broj klika veličine 36: u jednom grafu 2 (daju izomorfne konfiguracije),
u svim ostalim grafovima 0

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(36_5; 10, 12)$ konfiguracija.

Vrijeme ispitivanja jednog grafa \rightsquigarrow prosječno oko 11 minuta

\rightsquigarrow u najgorem slučaju 3 dana i 17 sati

Ukupno utrošeno CPU vrijeme: 258 dana (70 % godine)

Realno vrijeme izvođenja: oko 10 dana

Faktor ubrzanja zbog paralelnog računanja: 25

Klasifikacija malih primjera



Klasifikacija malih primjera



Gino Fano (1871.–1952.)

Hipoteze

Glavna hipoteza:

Svaka $((n-1)_{n-2}^2; (n-4)^2 + 1, (n-3)(n-4))$ konfiguracija može se na jedinstven način proširiti do projektivne ravnine reda n .

Hipoteze

Glavna hipoteza:

Svaka $((n-1)_{n-2}^2; (n-4)^2 + 1, (n-3)(n-4))$ konfiguracija može se na jedinstven način proširiti do projektivne ravnine reda n .

Pomoćna hipoteza:

Graf nekolinearnosti takve konfiguracije nije samo pseudo $LS_3(n-1)$, nego stvarno dolazi od latinskog kvadrata reda $n-1$.

Hipoteze

Glavna hipoteza:

Svaka $((n-1)_{n-2}^2; (n-4)^2 + 1, (n-3)(n-4))$ konfiguracija može se na jedinstven način proširiti do projektivne ravnine reda n .

Pomoćna hipoteza:

Graf nekolinearnosti takve konfiguracije nije samo pseudo $LS_3(n-1)$, nego stvarno dolazi od latinskog kvadrata reda $n-1$.

Za $n = 7$, broj neizomorfnih grafova $LS_3(6) = SRG(36, 15, 6, 6)$ je **32 548**, ali broj latinskih kvadrata reda 6 je samo **12**. Konfiguraciju $(36_5; 10, 12)$ dobivamo od clikličkog latinskog kvadrata (Cayleyeve tablice grupe \mathbb{Z}_6).

Hipoteze

Glavna hipoteza:

Svaka $((n-1)_{n-2}^2; (n-4)^2 + 1, (n-3)(n-4))$ konfiguracija može se na jedinstven način proširiti do projektivne ravnine reda n .

Pomoćna hipoteza:

Graf nekolinearnosti takve konfiguracije nije samo pseudo $LS_3(n-1)$, nego stvarno dolazi od latinskog kvadrata reda $n-1$.

Za $n = 7$, broj neizomorfnih grafova $LS_3(6) = SRG(36, 15, 6, 6)$ je **32 548**, ali broj latinskih kvadrata reda 6 je samo **12**. Konfiguraciju $(36_5; 10, 12)$ dobivamo od clikličkog latinskog kvadrata (Cayleyeve tablice grupe \mathbb{Z}_6).

Tada bismo vjerojatno mogli napraviti potpunu klasifikaciju i za $n = 8$, jer latinskih kvadrata reda 7 ima **147**.

Za $n = 9$, latinskih kvadrata reda 8 ima **283 657**.

Hipoteze

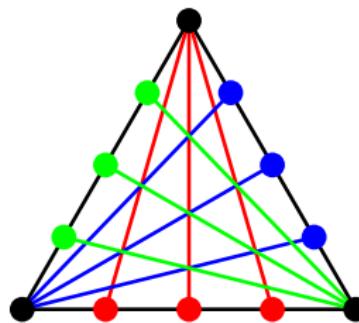
Glavna hipoteza:

Svaka $((n-1)_{n-2}^2; (n-4)^2 + 1, (n-3)(n-4))$ konfiguracija može se na jedinstven način proširiti do projektivne ravnine reda n .

Pomoćna hipoteza:

Graf nekolinearnosti takve konfiguracije nije samo pseudo $LS_3(n-1)$, nego stvarno dolazi od latinskog kvadrata reda $n-1$.

Ako je pomoćna hipoteza istinita, onda možemo na prirodan način definirati idealne elemente koji odgovaraju obojanim uklonjenim elementima:



Hvala na pažnji!