Shematski 4-dizajni*

Vedran Krčadinac

PMF-MO

24.9.2021.

* This work was fully supported by the Croatian Science Foundation under the project 9752.

Kvazisimetrični dizajni

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova.

Kvazisimetrični dizajni

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova.

Stupanj dizajna je broj različitih kardinaliteta presjeka blokova (presječnih brojeva):

$$d = |\{\, |B_1 \cap B_2| \,:\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \neq B_2 \}| \,.$$

Kvazisimetrični dizajni

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova.

Stupanj dizajna je broj različitih kardinaliteta presjeka blokova (presječnih brojeva):

$$d = |\{\, |B_1 \cap B_2| \,:\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \neq B_2\}| \,.$$

Simetrični dizajni su dizajni stupnja $d = 1$, što je ekvivalentno s $v = b = |\mathcal{B}|$. U tom slučaju je $t = 2$ i presječni broj je λ.

Kvazisimetrični dizajni

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova.

Stupanj dizajna je broj različitih kardinaliteta presjeka blokova (presječnih brojeva):

$$d = |\{\, |B_1 \cap B_2| \,:\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \neq B_2\}| \,.$$

Simetrični dizajni su dizajni stupnja $d = 1$, što je ekvivalentno s $v = b = |\mathcal{B}|$. U tom slučaju je $t = 2$ i presječni broj je λ.

Kvazisimetrični dizajni su dizajni stupnja $d = 2$. Tada je $t \leq 4$ i presječne brojeve označavamo $x < y$. Za $t = 4$ postoji samo dizajn 4-$(23, 7, 1)$, $x = 1$, $y = 3$ i njegov komplement. Za $t = 3$ i $x = 0$ klasificirani su svi mogući parametri, a za $t = 3$ i $x > 0$ poznato je samo nekoliko primjera i postavljena je hipoteza da su jedini mogući.

Kvazisimetrični dizajni

R. Vlahović Kruc, *Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima*, doktorska disertacija, srpanj 2019.

Kvazisimetrični dizajni

R. Vlahović Kruc, *Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima*, doktorska disertacija, srpanj 2019.

Tablica 1.3: Tablica iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna za $v \leq 150$

RBr.	v	k	λ	x	y	r	b	a	c	d	$\#D$	$\#QSD$	$\#SRG$	Nap.
1	19	7	7	1	3	21	57	42	31	30	≥ 1	0	0	[17, 74]
2	19	9	16	3	5	36	76	45	28	24	$\geq 10^{16}$	0	0	[17]
15	28	12	11	4	6	27	63	32	16	16	$\geq 58\,891$	$\geq 58\,891$	≥ 1	[64]
16	29	7	12	1	3	56	232	77	36	20	$\geq 1\,518$	0	?	[19, 91]
17	31	7	7	1	3	35	155	42	17	9	≥ 5	5	≥ 1	[90]
18	33	9	6	1	3	24	88	60	41	40	≥ 3376	0	?	[17]
19	33	15	35	6	9	80	176	45	18	9	?	?	≥ 1	
20	35	7	3	1	3	17	85	14	3	2	≥ 2	0	?	[17]
21	35	14	13	5	8	34	85	14	3	2	≥ 1	?	?	
22	36	16	12	6	8	28	63	30	13	15	$\geq 522\,079$	$\geq 522\,079$	≥ 1	[64]
47	56	12	9	0	3	45	210	176	148	144	?	?	?	
48	56	15	42	3	6	165	616	205	90	57	≥ 77	0	?	Tm.1.57
49	56	16	6	4	6	22	77	16	0	4	$\geq 1\,410$	$\geq 1\,410$	1	[73]
50	56	16	18	4	8	66	231	30	9	3	≥ 4	≥ 4	≥ 1	[64]
51	56	20	19	5	8	55	154	105	72	70	?	?	?	
52	56	21	24	6	9	66	176	105	64	60	?	0	?	Tm.1.57
53	57	9	3	1	3	21	133	24	5	4	≥ 1	?	?	

Dizajni s tri presječna broja

M. O. Pavčević, pitanje na obrani (4.7.2019.):

Što je s dizajnima koji imaju tri presječna broja $x < y < z$, tj. stupanj im je $d = 3$?

Dizajni s tri presječna broja

M. O. Pavčević, pitanje na obrani (4.7.2019.):

> *Što je s dizajnima koji imaju tri presječna broja $x < y < z$, tj. stupanj im je $d = 3$?*

$d = 3 \Longrightarrow t \leq 6$

D. K. Ray-Chaudhuri, R. M. Wilson, *On t-designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), 737–744.

Dizajni s tri presječna broja

M. O. Pavčević, pitanje na obrani (4.7.2019.):

> *Što je s dizajnima koji imaju tri presječna broja $x < y < z$, tj. stupanj im je $d = 3$?*

$d = 3 \Longrightarrow t \leq 6$

D. K. Ray-Chaudhuri, R. M. Wilson, *On t-designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), 737–744.

$t = 6 \rightsquigarrow$ takvi dizajni ne postoje

C. Peterson, *On tight 6-designs*, Osaka J. Math. **14** (1977), 417–435.

Dizajni s tri presječna broja

M. O. Pavčević, pitanje na obrani (4.7.2019.):

> *Što je s dizajnima koji imaju tri presječna broja $x < y < z$, tj. stupanj im je $d = 3$?*

$d = 3 \Longrightarrow t \leq 6$

D. K. Ray-Chaudhuri, R. M. Wilson, *On t-designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), 737–744.

$t = 6 \rightsquigarrow$ takvi dizajni ne postoje

C. Peterson, *On tight 6-designs*, Osaka J. Math. **14** (1977), 417–435.

$t = 5 \rightsquigarrow$ **hipoteza:** jedini primjer je Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$ s presječnim brojevima $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$ i njegov komplement

Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande, 5-*designs with three intersection numbers*, J. Combin. Theory Ser. A **69** (1995), no. 1, 36–50.

Shematski dizajni

Dizajn stupnja $d = 3$ i snage $t = 4$ zadovoljava uvjete ovog teorema:

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Shematski dizajni

Dizajn stupnja $d = 3$ i snage $t = 4$ zadovoljava uvjete ovog teorema:

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Nejednakost iz uvjeta teorema se dostiže, kao i za $d = t = 2$.

Shematski dizajni

Dizajn stupnja $d = 3$ i snage $t = 4$ zadovoljava uvjete ovog teorema:

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Nejednakost iz uvjeta teorema se dostiže, kao i za $d = t = 2$.

Kod kvazisimetričnog dizajna asocijacisku shemu tvore blokovni graf G_y i njegov komplement G_x:

- vrhovi grafa su blokovi dizajna,
- dva vrha su susjedi u G_y ako se sijeku u y točaka, a u G_x ako se sijeku u x točaka.

Shematski dizajni

Dizajn stupnja $d = 3$ i snage $t = 4$ zadovoljava uvjete ovog teorema:

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Nejednakost iz uvjeta teorema se dostiže, kao i za $d = t = 2$.

Kod kvazisimetričnog dizajna asocijacisku shemu tvore blokovni graf G_y i njegov komplement G_x:

- vrhovi grafa su blokovi dizajna,
- dva vrha su susjedi u G_y ako se sijeku u y točaka, a u G_x ako se sijeku u x točaka.

Graf G_y je jako regularan s parametrima $SRG(b, m, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$, a G_x s komplementarnim parametrima. Pritom je

$$m = \frac{k(r-1) - x(b-1)}{y - x},$$

Shematski dizajni

$$\overline{\lambda} = \frac{x^2(b-2) + 2xy - 2k((r-1)x + y) + y(r-\lambda) + k^2\lambda}{(y-x)^2},$$

$$\overline{\mu} = \frac{x^2 b - rx(2k-1) + (k^2 - x)\lambda}{(y-x)^2}.$$

Shematski dizajni

$$\overline{\lambda} = \frac{x^2(b-2) + 2xy - 2k((r-1)x + y) + y(r-\lambda) + k^2\lambda}{(y-x)^2},$$

$$\overline{\mu} = \frac{x^2 b - rx(2k-1) + (k^2 - x)\lambda}{(y-x)^2}.$$

Dokaz direktnim prebrojavanjem: teorem 2.3 u skripti

V. Krčadinac, *Kvazisimetrični dizajni*, Sveučilište u Zagrebu, 2017.

Shematski dizajni

$$\overline{\lambda} = \frac{x^2(b-2) + 2xy - 2k((r-1)x + y) + y(r-\lambda) + k^2\lambda}{(y-x)^2},$$

$$\overline{\mu} = \frac{x^2 b - rx(2k-1) + (k^2 - x)\lambda}{(y-x)^2}.$$

Dokaz direktnim prebrojavanjem: teorem 2.3 u skripti

V. Krčadinac, *Kvazisimetrični dizajni*, Sveučilište u Zagrebu, 2017.

Alternativni dokaz koristi spektar jako regularnog grafa:

Teorem.

Neka je $G \neq K_n$ povezan m-regularan graf. Graf G je jako regularan s parametrima $SRG(n, m, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$ ako i samo ako ima točno tri svojstvene vrijednosti $\theta_0 = m$, θ_1 i θ_2. U tom slučaju vrijedi $\overline{\lambda} = m + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2$ i $\overline{\mu} = m + \theta_1\theta_2$.

Shematski dizajni

Teorem.

Blokovni graf G_y kvazisimetričnog 2-(v, k, λ) dizajna s presječnim brojevima $x < y$ ima tri svojstvene vrijednosti $\theta_0 = m = \frac{k(r-1)-x(b-1)}{y-x}$, $\theta_1 = \frac{r+x-k-\lambda}{y-x}$ i $\theta_2 = \frac{x-k}{y-x}$ i zato je jako regularan.

Shematski dizajni

Teorem.

Blokovni graf G_y kvazisimetričnog 2-(v, k, λ) dizajna s presječnim brojevima $x < y$ ima tri svojstvene vrijednosti $\theta_0 = m = \frac{k(r-1)-x(b-1)}{y-x}$, $\theta_1 = \frac{r+x-k-\lambda}{y-x}$ i $\theta_2 = \frac{x-k}{y-x}$ i zato je jako regularan.

Dokazi ova dva teorema također su raspisani u skripti (teoremi 2.12 i 2.16).

Shematski dizajni

Teorem.

Blokovni graf G_y kvazisimetričnog 2-(v, k, λ) dizajna s presječnim brojevima $x < y$ ima tri svojstvene vrijednosti $\theta_0 = m = \frac{k(r-1)-x(b-1)}{y-x}$, $\theta_1 = \frac{r+x-k-\lambda}{y-x}$ i $\theta_2 = \frac{x-k}{y-x}$ i zato je jako regularan.

Dokazi ova dva teorema također su raspisani u skripti (teoremi 2.12 i 2.16).

Jako regularni graf i njegov komplement zajedno čine asocijacijsku shemu s dvije klase. U slučaju $d = 3$, $t = 4$ blokovi dizajna tvore asocijacijsku shemu s tri klase. **Što su asocijacijske sheme?**

Shematski dizajni

Teorem.

Blokovni graf G_y kvazisimetričnog 2-(v, k, λ) dizajna s presječnim brojevima $x < y$ ima tri svojstvene vrijednosti $\theta_0 = m = \frac{k(r-1)-x(b-1)}{y-x}$, $\theta_1 = \frac{r+x-k-\lambda}{y-x}$ i $\theta_2 = \frac{x-k}{y-x}$ i zato je jako regularan.

Dokazi ova dva teorema također su raspisani u skripti (teoremi 2.12 i 2.16).

Jako regularni graf i njegov komplement zajedno čine asocijacijsku shemu s dvije klase. U slučaju $d = 3$, $t = 4$ blokovi dizajna tvore asocijacijsku shemu s tri klase. **Što su asocijacijske sheme?**

Definicija se može izreći jezikom relacija, grafova ili matrica. Budući da nam trebaju samo simetrične asocijacijske sheme, koristit ću jezik grafova i njihovih matrica susjedstva.

Asocijacijske sheme

Asocijacijsku shemu s d klasa čine grafovi $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova takvi da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.

Asocijacijske sheme

Asocijacijsku shemu s d klasa čine grafovi $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova takvi da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.

Asocijacijske sheme

Asocijacijsku shemu s d klasa čine grafovi $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova takvi da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_ℓ, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Asocijacijske sheme

Asocijacijsku shemu s d klasa čine grafovi $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova takvi da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_ℓ, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Za vrhove x, y takve da je $\{x, y\}$ brid u G_i kažemo da su i-asocirani.

Asocijacijske sheme

Asocijacijsku shemu s d klasa čine grafovi $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova takvi da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_ℓ, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Za vrhove x, y takve da je $\{x, y\}$ brid u G_i kažemo da su i-asocirani.

Grafovi koji čine asocijacijsku shemu su regularni: G_i je stupnja $n_i = p_{ii}^0$.

Asocijacijske sheme

Asocijacijsku shemu s d klasa čine grafovi $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova takvi da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_ℓ, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Za vrhove x, y takve da je $\{x, y\}$ brid u G_i kažemo da su i-asocirani.

Grafovi koji čine asocijacijsku shemu su regularni: G_i je stupnja $n_i = p_{ii}^0$.

Neka su $A_0, \ldots, A_d$ matrice susjedstva grafova $G_0, \ldots, G_d$. To su simetrične $\{0, 1\}$-matrice tipa $n \times n$. Ekvivalentnu definiciju asocijacijske sheme dobivamo prevođenjem zahtjeva na jezik matrica.

Asocijacijske sheme

Asocijacijsku shemu s d klasa čine simetrične $\{0,1\}$-matrice $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takve da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).

Asocijacijske sheme

Asocijacijsku shemu s d klasa čine simetrične $\{0,1\}$-matrice $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takve da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).

Asocijacijske sheme

Asocijacijsku shemu s d klasa čine simetrične $\{0,1\}$-matrice $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takve da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$, za sve $i, j \in \{0, \ldots, d\}$.

Asocijacijske sheme

Asocijacijsku shemu s d klasa čine simetrične $\{0,1\}$-matrice $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takve da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$, za sve $i, j \in \{0, \ldots, d\}$.

Zbog simetričnosti i trećeg svojstva, vrijedi komutativnost $A_i \cdot A_j = A_j \cdot A_i$.

Asocijacijske sheme

Asocijacijsku shemu s d klasa čine simetrične $\{0,1\}$-matrice $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takve da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$, za sve $i, j \in \{0, \ldots, d\}$.

Zbog simetričnosti i trećeg svojstva, vrijedi komutativnost $A_i \cdot A_j = A_j \cdot A_i$.

Potprostor $\langle A_0, \ldots, A_d \rangle$ od $M_n(\mathbb{R})$ je komutativna algebra s jedinicom, koju zovemo Bose-Mesnerovom algebrom sheme.

Asocijacijske sheme

Asocijacijsku shemu s d klasa čine simetrične $\{0,1\}$-matrice $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takve da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$, za sve $i, j \in \{0, \ldots, d\}$.

Zbog simetričnosti i trećeg svojstva, vrijedi komutativnost $A_i \cdot A_j = A_j \cdot A_i$.

Potprostor $\langle A_0, \ldots, A_d \rangle$ od $M_n(\mathbb{R})$ je komutativna algebra s jedinicom, koju zovemo Bose-Mesnerovom algebrom sheme.

Budući da su matrice $A_0, \ldots, A_d$ simetrične i komutiraju, možemo ih simultano dijagonalizirati. Neka su $p_i(j)$, $j = 0, \ldots, d$ svojstvene vrijednosti matrice A_i s kratnostima redom $m_0, \ldots, m_d$.

Asocijacijske sheme

Asocijacijsku shemu s d klasa čine simetrične $\{0,1\}$-matrice $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takve da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$, za sve $i, j \in \{0, \ldots, d\}$.

Zbog simetričnosti i trećeg svojstva, vrijedi komutativnost $A_i \cdot A_j = A_j \cdot A_i$.

Potprostor $\langle A_0, \ldots, A_d \rangle$ od $M_n(\mathbb{R})$ je komutativna algebra s jedinicom, koju zovemo Bose-Mesnerovom algebrom sheme.

Budući da su matrice $A_0, \ldots, A_d$ simetrične i komutiraju, možemo ih simultano dijagonalizirati. Neka su $p_i(j)$, $j = 0, \ldots, d$ svojstvene vrijednosti matrice A_i s kratnostima redom $m_0, \ldots, m_d$.

Presječne brojeve možemo izračunati iz svojstvenih vrijednosti:

$$p_{ij}^{\ell} = \frac{1}{n \cdot n_\ell} \sum_{r=0}^{d} p_i(r) p_j(r) p_\ell(r) m_r.$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

Neka je G_1 jako regularan graf, a $G_2 = \overline{G_1}$ njegov komplement. Ako G_1 ima parametre $SRG(n, m, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$, onda G_2 ima parametre $SRG(n, n-m-1, n-2m+\overline{\mu}-2, n-2m+\overline{\lambda})$.

Asocijacijske sheme s dvije klase

Neka je G_1 jako regularan graf, a $G_2 = \overline{G_1}$ njegov komplement. Ako G_1 ima parametre $SRG(n, m, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$, onda G_2 ima parametre $SRG(n, n-m-1, n-2m+\overline{\mu}-2, n-2m+\overline{\lambda})$.

Tada G_0, G_1, G_2 tvore asocijacijsku shemu s presječnim brojevima

$$[p_{ij}^0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n-m-1 \end{bmatrix}, \quad [p_{ij}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \overline{\lambda} & m-1-\overline{\lambda} \\ 0 & m-1-\overline{\lambda} & n-2m+\overline{\lambda} \end{bmatrix},$$

$$[p_{ij}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \overline{\mu} & m-\overline{\mu} \\ 1 & m-\overline{\mu} & n-2m+\overline{\mu}-2 \end{bmatrix}.$$

Asocijacijske sheme s dvije klase

Neka je G_1 jako regularan graf, a $G_2 = \overline{G_1}$ njegov komplement. Ako G_1 ima parametre $SRG(n, m, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$, onda G_2 ima parametre $SRG(n, n-m-1, n-2m+\overline{\mu}-2, n-2m+\overline{\lambda})$.

Tada G_0, G_1, G_2 tvore asocijacijsku shemu s presječnim brojevima

$$[p_{ij}^0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n-m-1 \end{bmatrix}, \quad [p_{ij}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \overline{\lambda} & m-1-\overline{\lambda} \\ 0 & m-1-\overline{\lambda} & n-2m+\overline{\lambda} \end{bmatrix},$$

$$[p_{ij}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \overline{\mu} & m-\overline{\mu} \\ 1 & m-\overline{\mu} & n-2m+\overline{\mu}-2 \end{bmatrix}.$$

Obrnuto, svaka asocijacijska shema s dvije klase sastoji se od dva međusobno komplementarna jako regularna grafa G_1, G_2 i trivijalnog grafa G_0.

Asocijacijska shema kvazisimetričnog dizajna

Neka shemu čine grafovi $G_1 = G_x$ i $G_2 = G_y$ kvazisimetričnog 2-(v, k, λ) dizajna s presječnim brojevima x i y. Znamo svojstvene vrijednosti od G_2:

$$p_2(0) = \frac{k(r-1) - x(b-1)}{y-x}, \quad p_2(1) = \frac{r+x-k-\lambda}{y-x}, \quad p_2(2) = \frac{x-k}{y-x}.$$

Asocijacijska shema kvazisimetričnog dizajna

Neka shemu čine grafovi $G_1 = G_x$ i $G_2 = G_y$ kvazisimetričnog 2-(v, k, λ) dizajna s presječnim brojevima x i y. Znamo svojstvene vrijednosti od G_2:

$$p_2(0) = \frac{k(r-1) - x(b-1)}{y-x}, \quad p_2(1) = \frac{r+x-k-\lambda}{y-x}, \quad p_2(2) = \frac{x-k}{y-x}.$$

Odgovarajuće kratnosti su $m_0 = 1, \ m_1 = v-1, \ m_2 = b-v$.

Asocijacijska shema kvazisimetričnog dizajna

Neka shemu čine grafovi $G_1 = G_x$ i $G_2 = G_y$ kvazisimetričnog 2-(v, k, λ) dizajna s presječnim brojevima x i y. Znamo svojstvene vrijednosti od G_2:

$$p_2(0) = \frac{k(r-1) - x(b-1)}{y-x}, \quad p_2(1) = \frac{r+x-k-\lambda}{y-x}, \quad p_2(2) = \frac{x-k}{y-x}.$$

Odgovarajuće kratnosti su $m_0 = 1, \quad m_1 = v-1, \quad m_2 = b-v$.

Svojstvene vrijednosti od G_1 dobijemo iz relacije $I + A_1 + A_2 = J$:

$$p_1(0) = \frac{y(b-1) - k(r-1)}{y-x}, \quad p_1(1) = \frac{k+\lambda-r-y}{y-x}, \quad p_1(2) = \frac{k-y}{y-x}.$$

Asocijacijska shema kvazisimetričnog dizajna

Neka shemu čine grafovi $G_1 = G_x$ i $G_2 = G_y$ kvazisimetričnog 2-(v, k, λ) dizajna s presječnim brojevima x i y. Znamo svojstvene vrijednosti od G_2:

$$p_2(0) = \frac{k(r-1) - x(b-1)}{y-x}, \quad p_2(1) = \frac{r+x-k-\lambda}{y-x}, \quad p_2(2) = \frac{x-k}{y-x}.$$

Odgovarajuće kratnosti su $m_0 = 1, \ m_1 = v-1, \ m_2 = b-v$.

Svojstvene vrijednosti od G_1 dobijemo iz relacije $I + A_1 + A_2 = J$:

$$p_1(0) = \frac{y(b-1) - k(r-1)}{y-x}, \quad p_1(1) = \frac{k+\lambda-r-y}{y-x}, \quad p_1(2) = \frac{k-y}{y-x}.$$

Svojstvene vrijednosti grafa G_0 su $p_0(0) = p_0(1) = p_0(2) = 1$.

Asocijacijska shema kvazisimetričnog dizajna

Neka shemu čine grafovi $G_1 = G_x$ i $G_2 = G_y$ kvazisimetričnog 2-(v, k, λ) dizajna s presječnim brojevima x i y. Znamo svojstvene vrijednosti od G_2:

$$p_2(0) = \frac{k(r-1) - x(b-1)}{y-x}, \quad p_2(1) = \frac{r+x-k-\lambda}{y-x}, \quad p_2(2) = \frac{x-k}{y-x}.$$

Odgovarajuće kratnosti su $m_0 = 1, \ m_1 = v-1, \ m_2 = b-v$.

Svojstvene vrijednosti od G_1 dobijemo iz relacije $I + A_1 + A_2 = J$:

$$p_1(0) = \frac{y(b-1) - k(r-1)}{y-x}, \quad p_1(1) = \frac{k+\lambda-r-y}{y-x}, \quad p_1(2) = \frac{k-y}{y-x}.$$

Svojstvene vrijednosti grafa G_0 su $p_0(0) = p_0(1) = p_0(2) = 1$.

Odredili smo matricu svojstvenih vrijednosti (karaktera) $P = [p_j(i)]_{i,j}$ asocijacijske sheme pridružene kvazisimetričnom dizajnu.

Asocijacijska shema kvazisimetričnog dizajna

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{y(b-1)-k(r-1)}{y-x} & \frac{k(r-1)-x(b-1)}{y-x} \\ 1 & \frac{k+\lambda-r-y}{y-x} & \frac{r+x-k-\lambda}{y-x} \\ 1 & \frac{k-y}{y-x} & \frac{x-k}{y-x} \end{bmatrix}$$

Iz ove matrice možemo izračunati presječne brojeve p_{ij}^{ℓ} i sve ostale parametre asocijacijske sheme (tzv. dualne svojstvene vrijednosti i Kreinove parametre).

Asocijacijska shema kvazisimetričnog dizajna

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{y(b-1)-k(r-1)}{y-x} & \frac{k(r-1)-x(b-1)}{y-x} \\ 1 & \frac{k+\lambda-r-y}{y-x} & \frac{r+x-k-\lambda}{y-x} \\ 1 & \frac{k-y}{y-x} & \frac{x-k}{y-x} \end{bmatrix}$$

Iz ove matrice možemo izračunati presječne brojeve p_{ij}^{ℓ} i sve ostale parametre asocijacijske sheme (tzv. dualne svojstvene vrijednosti i Kreinove parametre).

Cilj: izvesti formule za presječne brojeve i svojstvene vrijednosti asocijacijske sheme pridružene 4-(v, k, λ) dizajnu s tri presječna broja x, y, z.

Asocijacijska shema kvazisimetričnog dizajna

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{y(b-1)-k(r-1)}{y-x} & \frac{k(r-1)-x(b-1)}{y-x} \\ 1 & \frac{k+\lambda-r-y}{y-x} & \frac{r+x-k-\lambda}{y-x} \\ 1 & \frac{k-y}{y-x} & \frac{x-k}{y-x} \end{bmatrix}$$

Iz ove matrice možemo izračunati presječne brojeve p_{ij}^{ℓ} i sve ostale parametre asocijacijske sheme (tzv. dualne svojstvene vrijednosti i Kreinove parametre).

Cilj: izvesti formule za presječne brojeve i svojstvene vrijednosti asocijacijske sheme pridružene 4-(v, k, λ) dizajnu s tri presječna broja x, y, z.

Koristit ću oznake $\lambda_i = \lambda \cdot \frac{\binom{v-i}{4-i}}{\binom{k-i}{4-i}}$, uz standardne oznake $b = \lambda_0$ i $r = \lambda_1$.

Parametri shematskog 4-dizajna

Označimo blokovne grafove $G_1 = G_x$, $G_2 = G_y$, $G_3 = G_z$. Znamo da su regularni stupnjeva redom n_1, n_2, n_3.

Parametri shematskog 4-dizajna

Označimo blokovne grafove $G_1 = G_x$, $G_2 = G_y$, $G_3 = G_z$. Znamo da su regularni stupnjeva redom n_1, n_2, n_3. Ti brojevi zadovoljavaju sustav:

$$n_1 + n_2 + n_3 = b - 1$$
$$x\, n_1 + y\, n_2 + z\, n_3 = k(r-1)$$
$$\binom{x}{2} n_1 + \binom{y}{2} n_2 + \binom{z}{2} n_3 = \binom{k}{2}(\lambda_2 - 1)$$

Parametri shematskog 4-dizajna

Označimo blokovne grafove $G_1 = G_x$, $G_2 = G_y$, $G_3 = G_z$. Znamo da su regularni stupnjeva redom n_1, n_2, n_3. Ti brojevi zadovoljavaju sustav:

$$n_1 + n_2 + n_3 = b - 1$$
$$x\, n_1 + y\, n_2 + z\, n_3 = k(r-1)$$
$$\binom{x}{2} n_1 + \binom{y}{2} n_2 + \binom{z}{2} n_3 = \binom{k}{2}(\lambda_2 - 1)$$

Matrica sustava $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ \binom{x}{2} & \binom{y}{2} & \binom{z}{2} \end{bmatrix}$ ima det. $\frac{1}{2}(y-x)(z-x)(z-y) \neq 0$,

pa sustav ima jedinstveno rješenje:

$$n_1 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(y+z-r(y+z-1)-\lambda_2)k+(b-1)yz}{(y-x)(z-x)}$$

$$n_2 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(x+z-r(x+z-1)-\lambda_2)k+(b-1)xz}{(x-y)(z-y)}$$

$$n_3 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(x+y-r(x+y-1)-\lambda_2)k+(b-1)xy}{(x-z)(y-z)}$$

Parametri shematskog 4-dizajna

Imamo 4-dizajn, pa možemo dodati još dvije jednadžbe za n_1, n_2, n_3:

$$\binom{x}{i} n_1 + \binom{y}{i} n_2 + \binom{z}{i} n_3 = \binom{k}{i}(\lambda_i - 1), \quad i = 0, \ldots, 4.$$

Parametri shematskog 4-dizajna

Imamo 4-dizajn, pa možemo dodati još dvije jednadžbe za n_1, n_2, n_3:

$$\binom{x}{i} n_1 + \binom{y}{i} n_2 + \binom{z}{i} n_3 = \binom{k}{i}(\lambda_i - 1), \quad i = 0, \ldots, 4.$$

Zbog Ray-Chaudhuri i Wilsonove nejednakosti $b \leq \binom{v}{d}$, ako ograničimo $v \leq 1000$, imamo konačno mnogo dopustivih parametara 4-dizajna. Za sve moguće $0 \leq x < y < z < k$ provjerimo jesu li n_1, n_2, n_3 nenegativni cijeli brojevi i zadovoljavaju li gornje jednadžbe za $i = 3, 4$. Tako dobijemo samo **17** mogućih parametara za shematske 4-dizajne.

Parametri shematskog 4-dizajna

Imamo 4-dizajn, pa možemo dodati još dvije jednadžbe za n_1, n_2, n_3:

$$\binom{x}{i} n_1 + \binom{y}{i} n_2 + \binom{z}{i} n_3 = \binom{k}{i}(\lambda_i - 1), \quad i = 0, \ldots, 4.$$

Zbog Ray-Chaudhuri i Wilsonove nejednakosti $b \leq \binom{v}{d}$, ako ograničimo $v \leq 1000$, imamo konačno mnogo dopustivih parametara 4-dizajna. Za sve moguće $0 \leq x < y < z < k$ provjerimo jesu li n_1, n_2, n_3 nenegativni cijeli brojevi i zadovoljavaju li gornje jednadžbe za $i = 3, 4$. Tako dobijemo samo **17** mogućih parametara za shematske 4-dizajne.

Odredili smo presječne brojeve p_{ij}^{ℓ} za $\ell = 0$:

$$\left[p_{ij}^{0}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix}.$$

Parametri shematskog 4-dizajna

Preostali presječni brojevi p_{ij}^{ℓ}, $\ell = 1, 2, 3$ također moraju biti nenegativni cijeli brojevi. Možemo ih odrediti direktnim prebrojavanjem.

Parametri shematskog 4-dizajna

Preostali presječni brojevi p_{ij}^{ℓ}, $\ell = 1, 2, 3$ također moraju biti nenegativni cijeli brojevi. Možemo ih odrediti direktnim prebrojavanjem.

Za fiksni ℓ imamo 9 nepoznanica koje zadovoljavaju sustav od 9 jednadžbi:

$$p_{11}^{\ell} + p_{12}^{\ell} + p_{13}^{\ell} + p_{21}^{\ell} + p_{22}^{\ell} + p_{23}^{\ell} + p_{31}^{\ell} + p_{32}^{\ell} + p_{33}^{\ell} = b - 2$$

$$\vdots$$

$$x^4\, p_{11}^{\ell} + x^2y^2\, p_{12}^{\ell} + x^2z^2\, p_{13}^{\ell} + x^2y^2\, p_{21}^{\ell} + y^4\, p_{22}^{\ell} + y^2z^2\, p_{23}^{\ell} + x^2z^2\, p_{31}^{\ell} + y^2z^2\, p_{32}^{\ell} + z^4\, p_{33}^{\ell}$$

$$\begin{aligned} = \quad & \sum_{i=1}^{4} \left\{ {4 \atop i} \right\} \ell^{\underline{i}} (\lambda_i - 2) + 4(k-\ell) \sum_{i=1}^{3} \left\{ {3 \atop i} \right\} \ell^{\underline{i}} (\lambda_{i+1} - 1) + 2(k-\ell)\ell(\lambda_2 - 1) + \\ & 2\left[(k-\ell)^{\underline{2}}\,\ell + (k-\ell)\ell^{\underline{2}}\right](\lambda_3 - 1) + 2(k-\ell)^{\underline{2}}\,\ell^{\underline{2}}(\lambda_4 - 1) + \\ & 4(k-\ell)^2\left[\ell\lambda_3 + \ell^{\underline{2}}\lambda_4\right] + 4(k-\ell)^2\ell\lambda_3 + 4(k-\ell)\ell(k-\ell)^{\underline{2}}\lambda_4 + \\ & (k-\ell)^2\lambda_2 + 2(k-\ell)(k-\ell)^{\underline{2}}\lambda_3 + (k-\ell)^{\underline{2}}(k-\ell)^{\underline{2}}\lambda_4. \end{aligned}$$

Parametri shematskog 4-dizajna

Determinanta sustava je $(x-y)^6(y-z)^6(z-x)^6 \neq 0$ i sustav ima jedinstveno rješenje, ali formule su jako ružne. Npr. dobijemo

$$p_{33}^3 = \frac{1}{(x-z)^2(y-z)^2}\Big(\big((k-1)^2k^2 - 4(k-2)zk + 2z^2 - 6z\big)\lambda -$$
$$-2(k-x)(k-y)(x-z)(y-z) + \frac{1}{k^{\underline{4}}}\big(v^{\underline{4}}x^2\lambda y^2 -$$
$$-k(v-3)(v-2)(v-1)(x+y-1)(2kxy-(x+y)z+z)\lambda +$$
$$+(k-1)k(v-3)(v-2)\big(\big(x^2+(4y-2)x+(y-1)^2\big)k^2 - 2xyk -$$
$$-4(x+y-1)zk - \big(x^2+2(y-3)x+(y-6)y-2z+7\big)z\big)\lambda -$$
$$-2(k-2)(k-1)k(v-3)\big((x+y-1)k^3 - (x+y+2z-1)k^2 -$$
$$-2(x+y-3)zk + 2z(x+y+z-3))\lambda)\Big).$$

Parametri shematskog 4-dizajna

Determinanta sustava je $(x-y)^6(y-z)^6(z-x)^6 \neq 0$ i sustav ima jedinstveno rješenje, ali formule su jako ružne. Npr. dobijemo

$$p_{33}^3 = \frac{1}{(x-z)^2(y-z)^2}\Big(\big((k-1)^2k^2 - 4(k-2)zk + 2z^2 - 6z\big)\lambda -$$
$$-2(k-x)(k-y)(x-z)(y-z) + \frac{1}{k^{\underline{4}}}\big(v^{\underline{4}}x^2\lambda y^2 -$$
$$-k(v-3)(v-2)(v-1)(x+y-1)(2kxy-(x+y)z+z)\lambda +$$
$$+(k-1)k(v-3)(v-2)\big(\big(x^2+(4y-2)x+(y-1)^2\big)k^2 - 2xyk -$$
$$-4(x+y-1)zk - \big(x^2+2(y-3)x+(y-6)y-2z+7\big)z\big)\lambda -$$
$$-2(k-2)(k-1)k(v-3)\big((x+y-1)k^3 - (x+y+2z-1)k^2 -$$
$$-2(x+y-3)zk + 2z(x+y+z-3))\lambda)\Big).$$

Ovaj koeficijent nije cijeli broj za 6 od 17 mogućih parametara. Ostaje **11** dopustivih parametara shematskih 4-dizajna za $v \leq 1000$.

Parametri shematskog 4-dizajna

Formule za presječne brojeve koje smo dobili i način na koji smo došli do njih nije zadovoljavajući. **Elegantniji način:** preko svojstvenih vrijednosti pridružene asocijacijske sheme.

Parametri shematskog 4-dizajna

Formule za presječne brojeve koje smo dobili i način na koji smo došli do njih nije zadovoljavajući. **Elegantniji način:** preko svojstvenih vrijednosti pridružene asocijacijske sheme.

Graf je regularan stupnja m ako i samo ako njegova matrica susjedstva ima svojstvenu vrijednost m pridruženu svojstvenom vektoru $(1, \ldots, 1)$. Prema tome, već znamo svojstvene vrijednosti $p_0(0) = 1$, $p_i(0) = n_i$, $i = 1, 2, 3$ kratnosti $m_0 = 1$.

Parametri shematskog 4-dizajna

Formule za presječne brojeve koje smo dobili i način na koji smo došli do njih nije zadovoljavajući. **Elegantniji način:** preko svojstvenih vrijednosti pridružene asocijacijske sheme.

Graf je regularan stupnja m ako i samo ako njegova matrica susjedstva ima svojstvenu vrijednost m pridruženu svojstvenom vektoru $(1, \ldots, 1)$. Prema tome, već znamo svojstvene vrijednosti $p_0(0) = 1$, $p_i(0) = n_i$, $i = 1, 2, 3$ kratnosti $m_0 = 1$.

Neka je N_i incidencijska matrica dizajna $(V, \mathcal{B})$ tipa $\binom{v}{i} \times b$. Reci su i-člani podskupovi $I \subseteq V$, stupci su blokovi $B \in \mathcal{B}$, a element na odgovarajućem mjestu je 1 ako je $I \subseteq B$ i 0 inače.

Parametri shematskog 4-dizajna

Formule za presječne brojeve koje smo dobili i način na koji smo došli do njih nije zadovoljavajući. **Elegantniji način:** preko svojstvenih vrijednosti pridružene asocijacijske sheme.

Graf je regularan stupnja m ako i samo ako njegova matrica susjedstva ima svojstvenu vrijednost m pridruženu svojstvenom vektoru $(1, \ldots, 1)$. Prema tome, već znamo svojstvene vrijednosti $p_0(0) = 1$, $p_i(0) = n_i$, $i = 1, 2, 3$ kratnosti $m_0 = 1$.

Neka je N_i incidencijska matrica dizajna $(V, \mathcal{B})$ tipa $\binom{v}{i} \times b$. Reci su i-člani podskupovi $I \subseteq V$, stupci su blokovi $B \in \mathcal{B}$, a element na odgovarajućem mjestu je 1 ako je $I \subseteq B$ i 0 inače.

N_0 je $1 \times b$ matrica popunjena jedinicama.

N_1 je uobičajena $v \times b$ incidencijska matrica dizajna.

Parametri shematskog 4-dizajna

U matričnom produktu $N_i^\tau \cdot N_i$, unos koji odgovara paru blokova $(B_1, B_2) \in \mathcal{B}^2$ je broj i-članih podskupova presjeka $B_1 \cap B_2$. Zato vrijedi

$$\binom{k}{i} I + \binom{x}{i} A_1 + \binom{y}{i} A_2 + \binom{z}{i} A_3 = N_i^\tau \cdot N_i.$$

Iz ovog sustava matričnih jednadžbi za $i = 0, 1, 2$ možemo odrediti svojstvene vrijednosti matrica A_1, A_2, A_3 ako znamo svojstvene vrijednosti matrica na desnoj strani.

Parametri shematskog 4-dizajna

U matričnom produktu $N_i^\tau \cdot N_i$, unos koji odgovara paru blokova $(B_1, B_2) \in \mathcal{B}^2$ je broj i-članih podskupova presjeka $B_1 \cap B_2$. Zato vrijedi

$$\binom{k}{i} I + \binom{x}{i} A_1 + \binom{y}{i} A_2 + \binom{z}{i} A_3 = N_i^\tau \cdot N_i.$$

Iz ovog sustava matričnih jednadžbi za $i = 0, 1, 2$ možemo odrediti svojstvene vrijednosti matrica A_1, A_2, A_3 ako znamo svojstvene vrijednosti matrica na desnoj strani.

Teorem 1.

Ako je $\mathcal{B}$ t-dizajn te $i + j \leq t$, onda vrijedi $\binom{v}{k} N_i \cdot N_j^\tau = b\, W_{i,k} \cdot W_{j,k}^\tau$. Pritom je $W_{i,k}$ Wilsonova $\binom{v}{i} \times \binom{v}{k}$ matrica inkluzije i-članih podskupova od V u k-članim podskupovima od V.

C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, lecture notes, 1995.

Parametri shematskog 4-dizajna

Teorem 2.

Matrice $C_i = W_{i,k}^{\tau} \cdot W_{i,k}$, $i = 0, \ldots, k$ generiraju Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, k)$. Svojstvene vrijednosti od C_i su 0 kratnosti $\binom{v}{k} - \binom{v}{i}$ te $\binom{v-i-j}{v-k-j}\binom{k-j}{i-j}$ kratnosti $m_j = \binom{v}{j} - \binom{v}{j-1}$, za $j = 0, \ldots, i$.

Parametri shematskog 4-dizajna

Teorem 2.

Matrice $C_i = W_{i,k}^{\tau} \cdot W_{i,k}$, $i = 0, \ldots, k$ generiraju Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, k)$. Svojstvene vrijednosti od C_i su 0 kratnosti $\binom{v}{k} - \binom{v}{i}$ te $\binom{v-i-j}{v-k-j}\binom{k-j}{i-j}$ kratnosti $m_j = \binom{v}{j} - \binom{v}{j-1}$, za $j = 0, \ldots, i$.

Lema 3.

Za bilo koju matricu A, matrice $A^{\tau} \cdot A$ i $A \cdot A^{\tau}$ imaju iste nenul svojstvene vrijednosti s istim kratnostima.

Parametri shematskog 4-dizajna

Teorem 2.

Matrice $C_i = W_{i,k}^{\tau} \cdot W_{i,k}$, $i = 0, \ldots, k$ generiraju Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v,k)$. Svojstvene vrijednosti od C_i su 0 kratnosti $\binom{v}{k} - \binom{v}{i}$ te $\binom{v-i-j}{v-k-j}\binom{k-j}{i-j}$ kratnosti $m_j = \binom{v}{j} - \binom{v}{j-1}$, za $j = 0, \ldots, i$.

Lema 3.

Za bilo koju matricu A, matrice $A^{\tau} \cdot A$ i $A \cdot A^{\tau}$ imaju iste nenul svojstvene vrijednosti s istim kratnostima.

Teorem 4.

Za $i \leq \frac{t}{2}$, matrica $N_i^{\tau} \cdot N_i$ ima svojst. vrijednosti $\theta_j^i = \binom{v-i-j}{v-k-j}\binom{k-j}{i-j} b \binom{v}{k}^{-1}$ $= \binom{v-i-j}{v-k-j}\binom{k-j}{i-j} \lambda \binom{v-t}{k-t}^{-1}$ kratnosti $m_j = \binom{v}{j} - \binom{v}{j-1}$, $j = 0, \ldots, i$ te svojstvenu vrijednost $\theta_{i+1}^i = 0$ kratnosti $m_{i+1} = b - \binom{v}{i}$.

Parametri shematskog 4-dizajna

Mi imamo $t = 4$, pa iz teorema dobijemo svojstvene vrijednosti matrica $N_i^\tau \cdot N_i$ za $i = 0, 1, 2$. Iz sustava matričnih jednadžbi

$$\binom{x}{i} A_1 + \binom{y}{i} A_2 + \binom{z}{i} A_3 = N_i^\tau \cdot N_i - \binom{k}{i} I, \quad i = 0, 1, 2$$

možemo odrediti svojstvene vrijednosti matrica A_1, A_2, A_3.

Parametri shematskog 4-dizajna

Mi imamo $t = 4$, pa iz teorema dobijemo svojstvene vrijednosti matrica $N_i^\tau \cdot N_i$ za $i = 0, 1, 2$. Iz sustava matričnih jednadžbi

$$\binom{x}{i} A_1 + \binom{y}{i} A_2 + \binom{z}{i} A_3 = N_i^\tau \cdot N_i - \binom{k}{i} I, \quad i = 0, 1, 2$$

možemo odrediti svojstvene vrijednosti matrica A_1, A_2, A_3.

$$p_1(3) + p_2(3) + p_3(3) = -1$$

$$x\, p_1(3) + y\, p_2(3) + z\, p_3(3) = -k$$

$$\binom{x}{2} p_1(3) + \binom{y}{2} p_2(3) + \binom{z}{2} p_3(3) = -\binom{k}{2}$$

Parametri shematskog 4-dizajna

Mi imamo $t = 4$, pa iz teorema dobijemo svojstvene vrijednosti matrica $N_i^\tau \cdot N_i$ za $i = 0, 1, 2$. Iz sustava matričnih jednadžbi

$$\binom{x}{i} A_1 + \binom{y}{i} A_2 + \binom{z}{i} A_3 = N_i^\tau \cdot N_i - \binom{k}{i} I, \quad i = 0, 1, 2$$

možemo odrediti svojstvene vrijednosti matrica A_1, A_2, A_3.

$$p_1(3) + p_2(3) + p_3(3) = -1$$

$$x\, p_1(3) + y\, p_2(3) + z\, p_3(3) = -k$$

$$\binom{x}{2} p_1(3) + \binom{y}{2} p_2(3) + \binom{z}{2} p_3(3) = -\binom{k}{2}$$

$$p_1(3) = -\frac{(y-k)(z-k)}{(y-x)(z-x)}, \quad p_2(3) = -\frac{(x-k)(z-k)}{(x-y)(z-y)}, \quad p_3(3) = -\frac{(x-k)(y-k)}{(x-z)(y-z)}$$

Kratnost: $m_3 = b - \binom{v}{2}$

Parametri shematskog 4-dizajna

$$p_1(2) + p_2(2) + p_3(2) = -1$$

$$x\, p_1(2) + y\, p_2(2) + z\, p_3(2) = -k$$

$$\binom{x}{2} p_1(2) + \binom{y}{2} p_2(2) + \binom{z}{2} p_3(2) = -\binom{k}{2} + \theta_2^2$$

Parametri shematskog 4-dizajna

$$p_1(2) + p_2(2) + p_3(2) = -1$$
$$x\,p_1(2) + y\,p_2(2) + z\,p_3(2) = -k$$
$$\binom{x}{2}p_1(2) + \binom{y}{2}p_2(2) + \binom{z}{2}p_3(2) = -\binom{k}{2} + \theta_2^2$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{yz}{(y-x)(z-x)} & \frac{1-y-z}{(y-x)(z-x)} & \frac{2}{(y-x)(z-x)} \\ \frac{xz}{(x-y)(z-y)} & \frac{1-x-z}{(x-y)(z-y)} & \frac{2}{(x-y)(z-y)} \\ \frac{xy}{(x-z)(y-z)} & \frac{1-x-y}{(x-z)(y-z)} & \frac{2}{(x-z)(y-z)} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} p_1(2) &= \frac{2\theta_2^2-(y-k)(z-k)}{(y-x)(z-x)} \\ p_2(2) &= \frac{2\theta_2^2-(x-k)(z-k)}{(x-y)(z-y)} \\ p_3(2) &= \frac{2\theta_2^2-(x-k)(y-k)}{(x-z)(y-z)} \end{aligned}$$

Kratnost: $m_2 = \binom{v}{2} - \binom{v}{1} = \frac{v(v-3)}{2}$

Parametri shematskog 4-dizajna

$$p_1(1) + p_2(1) + p_3(1) = -1$$

$$x\, p_1(1) + y\, p_2(1) + z\, p_3(1) = -k + \theta_1^1$$

$$\binom{x}{2} p_1(1) + \binom{y}{2} p_2(1) + \binom{z}{2} p_3(1) = -\binom{k}{2} + \theta_1^2$$

Parametri shematskog 4-dizajna

$$p_1(1) + p_2(1) + p_3(1) = -1$$

$$x\, p_1(1) + y\, p_2(1) + z\, p_3(1) = -k + \theta_1^1$$

$$\binom{x}{2} p_1(1) + \binom{y}{2} p_2(1) + \binom{z}{2} p_3(1) = -\binom{k}{2} + \theta_1^2$$

$$p_1(1) = \frac{(1-y-z)\theta_1^1 + 2\theta_1^2 - (y-k)(z-k)}{(y-x)(z-x)}$$

$$p_2(1) = \frac{(1-x-z)\theta_1^1 + 2\theta_1^2 - (x-k)(z-k)}{(x-y)(z-y)}$$

$$p_3(1) = \frac{(1-x-y)\theta_1^1 + 2\theta_1^2 - (x-k)(y-k)}{(x-z)(y-z)}$$

Kratnost: $m_1 = v - 1$

Parametri shematskog 4-dizajna

$$p_1(0) + p_2(0) + p_3(0) = -1 + \theta_0^0 = b - 1$$

$$x\, p_1(0) + y\, p_2(0) + z\, p_3(0) = -k + \theta_0^1 = k(r-1)$$

$$\binom{x}{2} p_1(0) + \binom{y}{2} p_2(0) + \binom{z}{2} p_3(0) = -\binom{k}{2} + \theta_0^2 = \binom{k}{2}(\lambda_2 - 1)$$

Parametri shematskog 4-dizajna

$$p_1(0) + p_2(0) + p_3(0) = -1 + \theta_0^0 = b - 1$$

$$x\, p_1(0) + y\, p_2(0) + z\, p_3(0) = -k + \theta_0^1 = k(r-1)$$

$$\binom{x}{2} p_1(0) + \binom{y}{2} p_2(0) + \binom{z}{2} p_3(0) = -\binom{k}{2} + \theta_0^2 = \binom{k}{2}(\lambda_2 - 1)$$

$$p_1(0) = \frac{yzb + k(r(1-y-z) + \lambda_2(k-1)) - (y-k)(z-k)}{(y-x)(z-x)} = n_1$$

$$p_2(0) = \frac{xzb + k(r(1-x-z) + \lambda_2(k-1)) - (x-k)(z-k)}{(x-y)(z-y)} = n_2$$

$$p_3(0) = \frac{xyb + k(r(1-x-y) + \lambda_2(k-1)) - (x-k)(y-k)}{(x-z)(y-z)} = n_3$$

Kratnost: $m_0 = 1$

Parametri shematskog 4-dizajna

$$p_1(0) + p_2(0) + p_3(0) = -1 + \theta_0^0 = b - 1$$

$$x\, p_1(0) + y\, p_2(0) + z\, p_3(0) = -k + \theta_0^1 = k(r-1)$$

$$\binom{x}{2} p_1(0) + \binom{y}{2} p_2(0) + \binom{z}{2} p_3(0) = -\binom{k}{2} + \theta_0^2 = \binom{k}{2}(\lambda_2 - 1)$$

$$p_1(0) = \frac{yzb + k(r(1-y-z) + \lambda_2(k-1)) - (y-k)(z-k)}{(y-x)(z-x)} = n_1$$

$$p_2(0) = \frac{xzb + k(r(1-x-z) + \lambda_2(k-1)) - (x-k)(z-k)}{(x-y)(z-y)} = n_2$$

$$p_3(0) = \frac{xyb + k(r(1-x-y) + \lambda_2(k-1)) - (x-k)(y-k)}{(x-z)(y-z)} = n_3$$

Kratnost: $m_0 = 1$

Sada imamo jednostavniju formulu za $p_{33}^3 = \dfrac{1}{bn_3} \displaystyle\sum_{r=0}^{3} p_3(r)^3 m_r.$

Dopustivi parametri 4-(v, k, λ) za $d = 3$ i $v \leq 1000$

Br.	v	k	λ	x	y	z	$\exists$
1	11	5	1	1	2	3	
2	23	8	4	0	2	4	
3	23	11	48	3	5	7	
4	24	8	5	0	2	4	
5	47	11	8	1	3	5	
6	71	35	264	14	17	20	
7	199	99	2328	44	49	54	
8	391	195	9264	90	97	104	
9	647	323	25680	152	161	170	
10	659	329	390874	153	164	175	
11	967	483	57720	230	241	252	

Dopustivi parametri 4-(v, k, λ) za $d = 3$ i $v \leq 1000$

Br.	v	k	λ	x	y	z	$\exists$
1	11	5	1	1	2	3	✓
2	23	8	4	0	2	4	✓
3	23	11	48	3	5	7	✓
4	24	8	5	0	2	4	✓
5	47	11	8	1	3	5	✓
6	71	35	264	14	17	20	
7	199	99	2328	44	49	54	
8	391	195	9264	90	97	104	
9	647	323	25680	152	161	170	
10	659	329	390874	153	164	175	
11	967	483	57720	230	241	252	

Dopustivi parametri 4-(v, k, λ) za $d = 3$ i $v \leq 1000$

Br.	v	k	λ	x	y	z	$\exists$	
1	11	5	1	1	2	3	✓	
2	23	8	4	0	2	4	✓	res 5-$(24, 8, 1)$
3	23	11	48	3	5	7	✓	
4	24	8	5	0	2	4	✓	5-$(24, 8, 1)$
5	47	11	8	1	3	5	✓	
6	71	35	264	14	17	20		
7	199	99	2328	44	49	54		
8	391	195	9264	90	97	104		
9	647	323	25680	152	161	170		
10	659	329	390874	153	164	175		
11	967	483	57720	230	241	252		

Dopustivi parametri 4-(v, k, λ) za $d = 3$ i $v \leq 1000$

Br.	v	k	λ	x	y	z	$\exists$	
1	11	5	1	1	2	3	✓	der 5-$(12, 6, 1)$
2	23	8	4	0	2	4	✓	res 5-$(24, 8, 1)$
3	23	11	48	3	5	7	✓	der 5-$(24, 12, 48)$
4	24	8	5	0	2	4	✓	5-$(24, 8, 1)$
5	47	11	8	1	3	5	✓	
6	71	35	264	14	17	20		
7	199	99	2328	44	49	54		
8	391	195	9264	90	97	104		
9	647	323	25680	152	161	170		
10	659	329	390874	153	164	175		
11	967	483	57720	230	241	252		

Dopustivi parametri 4-(v, k, λ) za $d = 3$ i $v \leq 1000$

Br.	v	k	λ	x	y	z	$\exists$	
1	11	5	1	1	2	3	✓	der 5-$(12, 6, 1)$
2	23	8	4	0	2	4	✓	res 5-$(24, 8, 1)$
3	23	11	48	3	5	7	✓	der 5-$(24, 12, 48)$
4	24	8	5	0	2	4	✓	5-$(24, 8, 1)$
5	47	11	8	1	3	5	✓	der 5-$(48, 12, 8)$
6	71	35	264	14	17	20		
7	199	99	2328	44	49	54		
8	391	195	9264	90	97	104		
9	647	323	25680	152	161	170		
10	659	329	390874	153	164	175		
11	967	483	57720	230	241	252		

V. D. Tonchev, *Quasi-symmetric* 2-$(31, 7, 7)$ *designs and a revision of Hamada's conjecture*, J. Combin. Theory Ser. A **42** (1986), no. 1, 104–110.

Dopustivi parametri 4-(v, k, λ) za $d = 3$ i $v \leq 1000$

Br.	v	k	λ	x	y	z	$\exists$	
1	11	5	1	1	2	3	✓	der 5-$(12, 6, 1)$
2	23	8	4	0	2	4	✓	res 5-$(24, 8, 1)$
3	23	11	48	3	5	7	✓	der 5-$(24, 12, 48)$
4	24	8	5	0	2	4	✓	5-$(24, 8, 1)$
5	47	11	8	1	3	5	✓	der 5-$(48, 12, 8)$
6	71	35	264	14	17	20	?	
7	199	99	2328	44	49	54	?	
8	391	195	9264	90	97	104	?	
9	647	323	25680	152	161	170	?	
10	659	329	390874	153	164	175	?	
11	967	483	57720	230	241	252	?	

V. D. Tonchev, *Quasi-symmetric* 2-$(31, 7, 7)$ *designs and a revision of Hamada's conjecture*, J. Combin. Theory Ser. A **42** (1986), no. 1, 104–110.

Dopustivi parametri 4-(v, k, λ) za $d = 3$ i $v \leq 1000$

Br.	v	k	λ	x	y	z	$\exists$	
1	11	5	1	1	2	3	✓	der 5-$(12, 6, 1)$
2	23	8	4	0	2	4	✓	res 5-$(24, 8, 1)$
3	23	11	48	3	5	7	✓	der 5-$(24, 12, 48)$
4	24	8	5	0	2	4	✓	5-$(24, 8, 1)$
5	47	11	8	1	3	5	✓	der 5-$(48, 12, 8)$
6	71	35	264	14	17	20	?	der 5-$(v+1, k+1, \lambda)$, $v = 2k+1$
7	199	99	2328	44	49	54	?	
8	391	195	9264	90	97	104	?	
9	647	323	25680	152	161	170	?	
10	659	329	390874	153	164	175	?	
11	967	483	57720	230	241	252	?	

V. D. Tonchev, *Quasi-symmetric* 2-$(31, 7, 7)$ *designs and a revision of Hamada's conjecture*, J. Combin. Theory Ser. A **42** (1986), no. 1, 104–110.

Veze s kodovima

Ternarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [11, 6, 5]_3$

Veze s kodovima

Ternarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [11, 6, 5]_3$

- Savršen, tj. dostiže ocjenu pakiranja kugli

Veze s kodovima

Ternarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [11, 6, 5]_3$

- Savršen, tj. dostiže ocjenu pakiranja kugli
- Težinski polinom: $1 + \mathbf{132}x^5 + 132x^6 + 330x^8 + 110x^9 + 24x^{11}$

Veze s kodovima

Ternarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [11, 6, 5]_3$

- Savršen, tj. dostiže ocjenu pakiranja kugli
- Težinski polinom: $1 + \mathbf{132}x^5 + 132x^6 + 330x^8 + 110x^9 + 24x^{11}$
- Nosači riječi minimalne težine tvore shematski $4\text{-}(11, 5, 1)$ dizajn

Veze s kodovima

Ternarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [11, 6, 5]_3$

- Savršen, tj. dostiže ocjenu pakiranja kugli
- Težinski polinom: $1 + \mathbf{132}x^5 + 132x^6 + 330x^8 + 110x^9 + 24x^{11}$
- Nosači riječi minimalne težine tvore shematski $4\text{-}(11, 5, 1)$ dizajn

Binarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [23, 12, 7]_2$

Veze s kodovima

Ternarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [11, 6, 5]_3$

- Savršen, tj. dostiže ocjenu pakiranja kugli
- Težinski polinom: $1 + \mathbf{132}x^5 + 132x^6 + 330x^8 + 110x^9 + 24x^{11}$
- Nosači riječi minimalne težine tvore shematski $4\text{-}(11, 5, 1)$ dizajn

Binarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [23, 12, 7]_2$

- Savršen i samokomplementaran ($\mathbf{1} \in \mathcal{C}$)

Veze s kodovima

Ternarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [11, 6, 5]_3$

- Savršen, tj. dostiže ocjenu pakiranja kugli
- Težinski polinom: $1 + \mathbf{132}x^5 + 132x^6 + 330x^8 + 110x^9 + 24x^{11}$
- Nosači riječi minimalne težine tvore shematski $4\text{-}(11, 5, 1)$ dizajn

Binarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [23, 12, 7]_2$

- Savršen i samokomplementaran ($\mathbf{1} \in \mathcal{C}$)
- Težinski polinom:
  $1 + \mathbf{253}x^7 + \mathbf{506}x^8 + \mathbf{1288}x^{11} + 1288x^{12} + 506x^{15} + 253x^{16} + x^{23}$

Veze s kodovima

Ternarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [11, 6, 5]_3$

- Savršen, tj. dostiže ocjenu pakiranja kugli
- Težinski polinom: $1 + \mathbf{132}x^5 + 132x^6 + 330x^8 + 110x^9 + 24x^{11}$
- Nosači riječi minimalne težine tvore shematski 4-$(11, 5, 1)$ dizajn

Binarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [23, 12, 7]_2$

- Savršen i samokomplementaran ($\mathbf{1} \in \mathcal{C}$)
- Težinski polinom:
  $1 + \mathbf{253}x^7 + \mathbf{506}x^8 + \mathbf{1288}x^{11} + 1288x^{12} + 506x^{15} + 253x^{16} + x^{23}$
- Nosači riječi minimalne težine tvore kvazisimetrični 4-$(23, 7, 1)$ dizajn

Veze s kodovima

Ternarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [11, 6, 5]_3$

- Savršen, tj. dostiže ocjenu pakiranja kugli
- Težinski polinom: $1 + \mathbf{132}x^5 + 132x^6 + 330x^8 + 110x^9 + 24x^{11}$
- Nosači riječi minimalne težine tvore shematski $4\text{-}(11, 5, 1)$ dizajn

Binarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [23, 12, 7]_2$

- Savršen i samokomplementaran ($\mathbf{1} \in \mathcal{C}$)
- Težinski polinom:
  $1 + \mathbf{253}x^7 + \mathbf{506}x^8 + \mathbf{1288}x^{11} + 1288x^{12} + 506x^{15} + 253x^{16} + x^{23}$
- Nosači riječi minimalne težine tvore kvazisimetrični $4\text{-}(23, 7, 1)$ dizajn
- Nosači riječi težine 8 tvore shematski $4\text{-}(23, 8, 4)$ dizajn

Veze s kodovima

Ternarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [11, 6, 5]_3$

- Savršen, tj. dostiže ocjenu pakiranja kugli
- Težinski polinom: $1 + \mathbf{132}x^5 + 132x^6 + 330x^8 + 110x^9 + 24x^{11}$
- Nosači riječi minimalne težine tvore shematski 4-$(11, 5, 1)$ dizajn

Binarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [23, 12, 7]_2$

- Savršen i samokomplementaran ($\mathbf{1} \in \mathcal{C}$)
- Težinski polinom:
  $1 + \mathbf{253}x^7 + \mathbf{506}x^8 + \mathbf{1288}x^{11} + 1288x^{12} + 506x^{15} + 253x^{16} + x^{23}$
- Nosači riječi minimalne težine tvore kvazisimetrični 4-$(23, 7, 1)$ dizajn
- Nosači riječi težine 8 tvore shematski 4-$(23, 8, 4)$ dizajn
- Nosači riječi težine 11 tvore shematski 4-$(23, 11, 48)$ dizajn

Veze s kodovima

Prošireni binarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [24, 12, 8]_2$

Veze s kodovima

Prošireni binarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [24, 12, 8]_2$

- Dobiven dodavanjem bita provjere parnosti na Golayev kod

Veze s kodovima

Prošireni binarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [24, 12, 8]_2$

- Dobiven dodavanjem bita provjere parnosti na Golayev kod
- Ekstremalni samodualni ($\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\perp}$) dvostruko parni kod

Veze s kodovima

Prošireni binarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [24, 12, 8]_2$

- Dobiven dodavanjem bita provjere parnosti na Golayev kod
- Ekstremalni samodualni ($\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\perp}$) dvostruko parni kod
- Težinski polinom: $1 + \mathbf{759}x^8 + \mathbf{2576}x^{12} + 759x^{16} + x^{24}$

Veze s kodovima

Prošireni binarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [24, 12, 8]_2$

- Dobiven dodavanjem bita provjere parnosti na Golayev kod
- Ekstremalni samodualni ($\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\perp}$) dvostruko parni kod
- Težinski polinom: $1 + \mathbf{759}x^8 + \mathbf{2576}x^{12} + 759x^{16} + x^{24}$
- Nosači riječi minimalne težine tvore shematski 5-$(24, 8, 1)$ dizajn (tj. 4-$(24, 8, 5)$ dizajn)

Veze s kodovima

Prošireni binarni Golayev kod: $[n, k, d]_q = [24, 12, 8]_2$

- Dobiven dodavanjem bita provjere parnosti na Golayev kod
- Ekstremalni samodualni ($\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\perp}$) dvostruko parni kod
- Težinski polinom: $1 + \mathbf{759}x^8 + \mathbf{2576}x^{12} + 759x^{16} + x^{24}$
- Nosači riječi minimalne težine tvore shematski 5-$(24, 8, 1)$ dizajn (tj. 4-$(24, 8, 5)$ dizajn)
- Nosači riječi težine 12 tvore 5-$(24, 12, 48)$ dizajn s četiri presječna broja $0, 4, 6, 8$. Derivirani dizajn je shematski 4-$(23, 11, 48)$ dizajn.

Veze s kodovima

Binarni *quadratic residue* kod duljine 47: $[n, k, d]_q = [47, 24, 11]_2$

Veze s kodovima

Binarni *quadratic residue* kod duljine 47: $[n, k, d]_q = [47, 24, 11]_2$

- Golayevi kodovi su također *quadratic residue* kodovi

Veze s kodovima

Binarni *quadratic residue* kod duljine 47: $[n, k, d]_q = [47, 24, 11]_2$

- Golayevi kodovi su također *quadratic residue* kodovi
- Prošireni kod je ekstremalni samodualni dvostruko parni $[48, 24, 12]_2$ kod

Veze s kodovima

Binarni *quadratic residue* kod duljine 47: $[n, k, d]_q = [47, 24, 11]_2$

- Golayevi kodovi su također *quadratic residue* kodovi
- Prošireni kod je ekstremalni samodualni dvostruko parni $[48, 24, 12]_2$ kod
- Težinski polinom: $1 + 4324x^{11} + 12972x^{12} + 178365x^{15} + 356730x^{16} + 1664740x^{19} + 2330636x^{20} + 3840840x^{23} + 3840840x^{24} + 2330636x^{27} + 1664740x^{28} + 356730x^{31} + 178365x^{32} + 12972x^{35} + 4324x^{36} + x^{47}$

Veze s kodovima

Binarni *quadratic residue* kod duljine 47: $[n, k, d]_q = [47, 24, 11]_2$

- Golayevi kodovi su također *quadratic residue* kodovi
- Prošireni kod je ekstremalni samodualni dvostruko parni $[48, 24, 12]_2$ kod
- Težinski polinom: $1 + 4324x^{11} + 12972x^{12} + 178365x^{15} + 356730x^{16} + 1664740x^{19} + 2330636x^{20} + 3840840x^{23} + 3840840x^{24} + 2330636x^{27} + 1664740x^{28} + 356730x^{31} + 178365x^{32} + 12972x^{35} + 4324x^{36} + x^{47}$
- Nosači riječi minimalne težine tvore shematski $4\text{-}(47, 11, 8)$ dizajn

Veze s kodovima

Binarni *quadratic residue* kod duljine 47: $[n, k, d]_q = [47, 24, 11]_2$

- Golayevi kodovi su također *quadratic residue* kodovi
- Prošireni kod je ekstremalni samodualni dvostruko parni $[48, 24, 12]_2$ kod
- Težinski polinom: $1 + 4324x^{11} + 12972x^{12} + 178365x^{15} + 356730x^{16} + 1664740x^{19} + 2330636x^{20} + 3840840x^{23} + 3840840x^{24} + 2330636x^{27} + 1664740x^{28} + 356730x^{31} + 178365x^{32} + 12972x^{35} + 4324x^{36} + x^{47}$
- Nosači riječi minimalne težine tvore shematski $4\text{-}(47, 11, 8)$ dizajn
- Po Assmus-Mattsonovom teoremu, nosači riječi ostalih težina također tvore 4-dizajne, ali stupnja $d > 3$. Npr. nosači riječi težine 12 tvore $4\text{-}(47, 12, 36)$ dizajn s presječnim brojevima $0, 2, 4, 6$. Njegov derivirani dizajn ima parametre $3\text{-}(46, 11, 36)$ i presječne brojeve $1, 3, 5$. Za taj dizajn nisu ispunjene pretpostavke Cameron-Delsarteova teorema, pa ne mora biti shematski.

Pitanja o shematskim 4-dizajnima

Pitanja o shematskim 4-dizajnima

- Postoje li dizajni iz redaka 6. - 11. tablice?

Pitanja o shematskim 4-dizajnima

- Postoje li dizajni iz redaka 6. - 11. tablice?
- Jesu li i ti dizajni povezani s ekstremalnim kodovima?

Pitanja o shematskim 4-dizajnima

- Postoje li dizajni iz redaka 6. - 11. tablice?
- Jesu li i ti dizajni povezani s ekstremalnim kodovima?
- Binarni *quadratic residue* kod duljine 71?

Pitanja o shematskim 4-dizajnima

- Postoje li dizajni iz redaka 6. - 11. tablice?
- Jesu li i ti dizajni povezani s ekstremalnim kodovima?
- Binarni *quadratic residue* kod duljine 71?
- Moraju li svojstvene vrijednosti biti cijeli brojevi?

Pitanja o shematskim 4-dizajnima

- Postoje li dizajni iz redaka 6. - 11. tablice?
- Jesu li i ti dizajni povezani s ekstremalnim kodovima?
- Binarni *quadratic residue* kod duljine 71?
- Moraju li svojstvene vrijednosti biti cijeli brojevi?
- Postoji li beskonačno mnogo dopustivih parametara?

Kraj

Hvala na pažnji!