Dopustivi parametri za 3-dizajne stupnja 3*

Vedran Krčadinac

PMF-MO

23.5.2022.

* This work was fully supported by the Croatian Science Foundation under the project 9752.

Parametri dizajna

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova. Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn.

Parametri dizajna

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova. Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn.

$$\lambda_s = \frac{\lambda \cdot \binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}, \qquad s = 0, \ldots, t$$

Parametri dizajna

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova. Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn.

$$\lambda_s = \frac{\lambda \cdot \binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}, \qquad s = 0, \ldots, t$$

Dopustivi parametri: 5-$(24, 8, 1)$

Parametri dizajna

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova. Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn.

$$\lambda_s = \frac{\lambda \cdot \binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}, \qquad s = 0, \ldots, t$$

Dopustivi parametri: 5-$(24, 8, 1)$

$\rightsquigarrow \lambda_5 = 1,\ \lambda_4 = 5,\ \lambda_3 = 21,\ \lambda_2 = 77,\ \lambda_1 = 253 = r,\ \lambda_0 = 759 = b$

Parametri dizajna

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova. Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn.

$$\lambda_s = \frac{\lambda \cdot \binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}, \qquad s = 0, \ldots, t$$

Dopustivi parametri: 5-$(24, 8, 1)$

$\rightsquigarrow \lambda_5 = 1,\ \lambda_4 = 5,\ \lambda_3 = 21,\ \lambda_2 = 77,\ \lambda_1 = 253 = r,\ \lambda_0 = 759 = b$

Nedopustivi parametri: 5-$(24, 7, 1)$

Parametri dizajna

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova. Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn.

$$\lambda_s = \frac{\lambda \cdot \binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}, \qquad s = 0, \ldots, t$$

Dopustivi parametri: 5-$(24, 8, 1)$

$\rightsquigarrow \lambda_5 = 1,\ \lambda_4 = 5,\ \lambda_3 = 21,\ \lambda_2 = 77,\ \lambda_1 = 253 = r,\ \lambda_0 = 759 = b$

Nedopustivi parametri: 5-$(24, 7, 1)$

$\rightsquigarrow \lambda_5 = 1,\ \lambda_4 = \frac{20}{3},\ \lambda_3 = 35,\ \lambda_2 = 154,\ \lambda_1 = \frac{1771}{3},\ \lambda_0 = 2024$

Smisao teorije dizajna

E. Bannai, E. Bannai, H. Tanaka, Y. Zhu, *Design theory from the viewpoint of algebraic combinatorics*, Graphs Combin. **33** (2017), no. 1, 1–41.

"The concept of combinatorial t-design is to find subsets which approximate the whole space $\binom{V}{k}$ i.e., the set of k-element subsets of a set V of cardinality $|V| = v$."

Smisao teorije dizajna

E. Bannai, E. Bannai, H. Tanaka, Y. Zhu, *Design theory from the viewpoint of algebraic combinatorics*, Graphs Combin. **33** (2017), no. 1, 1–41.

"The concept of combinatorial t-design is to find subsets which approximate the whole space $\binom{V}{k}$ i.e., the set of k-element subsets of a set V of cardinality $|V| = v$."

"Spherical designs are finite sets of points X on the unit sphere $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ which approximate the sphere S^{n-1} in the following sense..."

$$\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} f(x)d\sigma(x) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)$$

Smisao teorije dizajna

E. Bannai, E. Bannai, H. Tanaka, Y. Zhu, *Design theory from the viewpoint of algebraic combinatorics*, Graphs Combin. **33** (2017), no. 1, 1–41.

"The concept of combinatorial t-design is to find subsets which approximate the whole space $\binom{V}{k}$ i.e., the set of k-element subsets of a set V of cardinality $|V| = v$."

"Spherical designs are finite sets of points X on the unit sphere $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ which approximate the sphere S^{n-1} in the following sense..."

$$\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} f(x)d\sigma(x) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)$$

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic Combinatorics*, De Gruyter, 2021.

Stupanj dizajna

Stupanj dizajna je broj različitih kardinaliteta presjeka blokova:

$$d = \left|\{\, |B_1 \cap B_2| \,:\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \neq B_2 \}\right|.$$

Stupanj dizajna

Stupanj dizajna je broj različitih kardinaliteta presjeka blokova:

$$d = \left|\{\, |B_1 \cap B_2| \,:\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \neq B_2 \}\right|.$$

Kardinalitete $|B_1 \cap B_2|$ zovemo presječnim brojevima dizajna.

Stupanj dizajna

Stupanj dizajna je broj različitih kardinaliteta presjeka blokova:

$$d = |\{\, |B_1 \cap B_2| \,:\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \neq B_2 \}| \,.$$

Kardinalitete $|B_1 \cap B_2|$ zovemo presječnim brojevima dizajna.

Dizajni stupnja $d = 1$ zadovoljavaju $t \leq 2$.

Stupanj dizajna

Stupanj dizajna je broj različitih kardinaliteta presjeka blokova:

$$d = |\{\, |B_1 \cap B_2| \,:\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \neq B_2\}|\,.$$

Kardinalitete $|B_1 \cap B_2|$ zovemo presječnim brojevima dizajna.

Dizajni stupnja $d = 1$ zadovoljavaju $t \leq 2$.

U slučaju $t = 2$ uvjet $d = 1$ ekvivalentan je s $v = b$. To su simetrični dizajni i jedini presječni broj im je λ.

Stupanj dizajna

Stupanj dizajna je broj različitih kardinaliteta presjeka blokova:

$$d = |\{\, |B_1 \cap B_2| \,:\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \neq B_2 \}| \,.$$

Kardinalitete $|B_1 \cap B_2|$ zovemo presječnim brojevima dizajna.

Dizajni stupnja $d = 1$ zadovoljavaju $t \leq 2$.

U slučaju $t = 2$ uvjet $d = 1$ ekvivalentan je s $v = b$. To su simetrični dizajni i jedini presječni broj im je λ.

Tablica dopustivih parametara:

Y. J. Ionin, T. van Trung, *Symmetric designs*, u: *The Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition* (urednici C.J. Colbourn i J.H. Dinitz), CRC Press, 2007., str. 110–124.

6.9 Symmetric Designs with n $\leq$ 25

6.47 Table A listing of symmetric (v, k, λ) designs with $n = k - \lambda \leq 25$, $k \leq v/2$, and $4n - 1 < v < n^2 + n + 1$ satisfying $(v-1)\lambda = k(k-1)$ and the Bruck–Ryser–Chowla condition. If a design is known to exist, one solution is given. Parameters for which existence is undecided are marked by a question mark.

n	v	k	λ	Solution
4	16	6	2	Base block: 0000 1000 0100 0010 0001 1111 (mod $(2,2,2,2)$).
6	25	9	3	Points: $A, B, C, D, E, F, G, 1_i, 2_i, 3_i, 4_i, 5_i, 6_i$, $i = 0, 1, 2 \pmod 3$, Automorphisms: $\rho = (A)(B)(C)(D)(E)(F)(G)(I_0\ I_1\ I_2)$, $I = 1, \ldots, 6$, $\tau_1 = (A\ D)(B\ C)(E)(F)(G)(1_i)(2_i)(3_i\ 6_{i+1})(4_i\ 5_{i+1})$, $\tau_2 = (A\ C)(B\ D)(E)(F)(G)(1_i)(2_i)(3_i\ 5_{i+1})(4_i\ 6_{i+1})$, Base blocks: $1_0 1_1 1_2 3_0 3_1 3_2 5_0 5_1 5_2$, $2_0 2_1 2_2 3_0 3_1 3_2 6_0 6_1 6_2$, $EFG 1_0 1_1 1_2 2_0 2_1 2_2$, $EFG 3_0 3_1 3_2 4_0 4_1 4_2$, $ABE 1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 6_0$, $ACF 1_0 2_2 3_1 4_0 5_2 6_1$, $ADG 1_2 2_0 3_1 4_0 5_1 6_2$.
7	37	9	2	Base block: 1 7 9 10 12 16 26 33 34 (mod 37).

Simetrični dizajni

n	v	k	λ	Solution
7	31	10	3	Points: $A, B, C, 1_i, 2_i, 3_i, 4_i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod 7$, Automorphisms: $\rho = (A)(B)(C)(I_0\ I_1\ I_2\ I_3\ I_4\ I_5\ I_6)$, $I = 1, 2, 3, 4$, $\sigma = (A\ B\ C)(1_i\ 2_i\ 3_i)(4_i)$, Base blocks: $A1_11_62_22_53_33_44_14_24_4$, $1_31_61_52_32_62_53_33_63_54_0$, $ABC1_01_11_21_31_41_51_6$.
9	56	11	2	Points: $1_i, 2_i, 3_i, 4_i, 5_i, 6_i, 7_i, 8_i$, $i = 0, 1, \ldots, 6 \pmod 7$, Automorphisms: $\rho = (I_0\ I_1\ I_2\ I_3\ I_4\ I_5\ I_6)$, $I = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, $\sigma = (1_i\ 2_{2i}\ 3_{4i})(4_i\ 5_{2i}\ 6_{4i})(7_i\ 7_{2i}\ 7_{4i})(8_i\ 8_{2i}\ 8_{4i})$, $\tau = (1_i\ 4_{6i})(2_i\ 5_{6i})(3_i\ 6_{6i})(7_i\ 8_{6i})$, Base blocks: $1_12_23_44_15_26_47_07_37_67_58_0$, $1_21_52_22_53_13_64_04_14_67_18_6$.
9	45	12	3	Base block: 000 001 002 100 110 120 200 211 222 300 312 321 $\pmod{(5, 3, 3)}$.
9	40	13	4	Base block: 1 2 3 5 6 9 14 15 18 20 25 27 35 $\pmod{40}$.
9	36	15	6	Base block: 11 22 33 44 55 01 02 03 04 05 10 20 30 40 50 $\pmod{(6, 6)}$.
10	41	16	6	Points: A, $1_i, 2_i, 3_i, 4_i, 5_i, 6_i, 7_i, 8_i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4 \pmod 5$, Automorphisms: $\rho = (A)(I_0\ I_1\ I_2\ I_3\ I_4)$, $I = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$,

Simetrični dizajni

				$A1_11_42_22_33_04_14_24_34_46_16_47_27_35_08_0$, $1_21_32_22_33_23_34_04_24_35_05_25_38_08_28_36_0$, $1_11_42_12_43_13_47_17_27_37_44_24_35_25_38_28_3$, $3_03_23_32_02_12_46_06_16_44_24_38_18_47_17_45_0$.
11	79	13	2	Points: $A, B, 1_i, 2_i, 3_i, 4_i, 5_i, 6_i, 7_i$, $i = 0, 1, \ldots, 10 \pmod{11}$, Automorphisms: $\rho = (A)(B)(I_0\ I_1\ \cdots\ I_{10})$, $I = 1, 2, \ldots, 7$, $\sigma = (A)(B)(1_i\ 2_{4i}\ 3_{5i}\ 4_{9i}\ 5_{3i})\ (6_i\ 6_{4i}\ 6_{5i}\ 6_{9i}\ 6_{3i})(7_i\ 7_{4i}\ 7_{5i}\ 7_{9i}\ 7_{3i})$, $\tau = (A\ B)(1_i\ 1_{10i})(2_i\ 2_{10i})(3_i\ 3_{10i})$ $(4_i\ 4_{10i})(5_i\ 5_{10i})(6_i\ 6_{10i})(7_i\ 7_{10i})$, Base blocks: $AB6_06_16_26_36_46_56_66_76_86_96_{10}$, $AB7_07_17_27_37_47_57_67_77_87_97_{10}$, $A1_11_42_42_53_53_94_94_35_35_16_07_0$, $B1_{10}1_72_72_63_63_24_24_85_85_{10}6_07_0$, $1_02_22_92_42_73_53_65_45_76_26_97_57_6$.
11	49	16	5	Points: $A, B, C, D, 1_i, 2_i, 3_i, 4_i, 5_i, 6_i, 7_i, 8_i, 9_i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4 \pmod 5$, Automorphisms: $\rho = (A)(B)(C)(D)(I_0\ I_1 \cdots\ I_4)$, $I = 1, 2, \ldots, 9$, $\sigma = (A)(B\ C\ D)(1_i\ 2_i\ 3_i)(4_i\ 5_i\ 6_i)(7_i\ 8_i\ 9_i)$, Base blocks: $A7_07_17_27_37_48_08_18_28_38_49_09_19_29_39_4$, $B4_04_14_24_34_45_05_15_25_35_49_09_19_29_39_4$, $AB1_01_12_02_23_04_04_15_25_46_37_07_18_08_3$, $BC1_01_22_33_03_14_14_36_26_37_37_48_29_29_4$,

Simetrični dizajni

n	v	k	λ	Solution
12	71	15	3	Points: $A, 1_i, 2_i, \ldots, 10_i$, $i = 0, 1, \ldots, 6 \pmod 7$, Automorphisms: $\rho = (A)(I_0\ I_1\ \cdots\ I_6)$, $I = 1, 2, \ldots, 10$, $\tau = (A)(1_i)(2_i)(3_i\ 4_i)(5_i\ 6_i)(7_i\ 8_i)(9_i\ 10_i)$, $\sigma = (A)(K_0)(K_1\ K_2\ K_4)(K_3\ K_6\ K_5)(3_i\ 5_{2i}\ 7_{4i})(4_i\ 6_{2i}\ 8_{4i})$, $K = 1, 2, 9, 10$, Base blocks: $A1_01_11_21_31_41_51_62_02_12_22_32_42_52_6$, $A1_02_03_23_45_15_47_17_24_36_68_59_19_29_4$, $1_11_21_43_13_35_25_67_47_54_14_36_26_68_48_5$, $1_11_21_43_05_07_04_06_08_09_19_29_410_110_210_4$, $1_02_12_35_15_37_04_14_24_56_06_26_69_59_610_1$.
12	61	16	4	Points: $A, 1_i, 2_i, \ldots, 20_i$, $i = 0, 1, 2 \pmod 3$, Automorphisms: $\rho = (A)(I_0\ I_1\ I_2)$, $I = 1, \ldots, 20$, $\sigma = (A)(1_i\ 2_i\ 3_i\ 4_i\ 5_i)(6_i\ 7_i\ 8_i\ 9_i\ 10_i)$ $(11_i\ 12_i\ 13_i\ 14_i\ 15_i)(16_i\ 17_i\ 18_i\ 19_i\ 20_i)$, Base blocks $A1_01_11_22_02_12_23_03_13_24_04_14_25_05_15_2$, $A1_01_11_26_07_18_19_011_012_113_114_016_017_118_119_0$, $1_02_13_14_010_110_28_18_26_07_011_111_212_112_220_018_0$, $1_02_13_14_015_115_213_113_211_012_016_116_217_117_210_08_0$, $1_02_13_14_020_120_218_118_216_017_06_16_27_17_215_013_0$.
13	81	16	3	?
13	69	17	4	Points: $A, B, C, D, 1_i, 2_i, \ldots, 5_i$, $i = 0, \ldots, 12 \pmod{13}$, Automorphisms:

Kvazisimetrični dizajni

Kvazisimetrični dizajni su dizajni stupnja $d = 2$. **Snaga im je ograničena s $t \leq 4$,** a presječne brojeve označavamo $x < y$.

Kvazisimetrični dizajni

Kvazisimetrični dizajni su dizajni stupnja $d = 2$. **Snaga im je ograničena s $t \leq 4$,** a presječne brojeve označavamo $x < y$.

$t = 4$: Jedini primjer je derivirani Wittov dizajn 4-$(23, 7, 1)$, $x = 1$, $y = 3$ i njegov komplement.

A. Bremner, *A Diophantine equation arising from tight 4-designs*, Osaka J. Math. **16** (1979), 353–356.

Kvazisimetrični dizajni

Kvazisimetrični dizajni su dizajni stupnja $d = 2$. **Snaga im je ograničena s $t \leq 4$,** a presječne brojeve označavamo $x < y$.

$t = 4$: Jedini primjer je derivirani Wittov dizajn 4-$(23, 7, 1)$, $x = 1$, $y = 3$ i njegov komplement.

A. Bremner, *A Diophantine equation arising from tight 4-designs*, Osaka J. Math. **16** (1979), 353–356.

$$\mathrm{der}_{T_0}\mathcal{D} = (\,\mathcal{P} \setminus \{T_0\},\, \{B \setminus \{T_0\} \mid B \in \mathcal{B},\, T_0 \in B\}\,)$$

$$t\text{-}(v, k, \lambda) \quad \rightsquigarrow \quad (t-1)\text{-}(v-1, k-1, \lambda)$$

Kvazisimetrični dizajni

Kvazisimetrični dizajni su dizajni stupnja $d = 2$. **Snaga im je ograničena s $t \leq 4$,** a presječne brojeve označavamo $x < y$.

$t = 4$: Jedini primjer je derivirani Wittov dizajn 4-$(23, 7, 1)$, $x = 1$, $y = 3$ i njegov komplement.

A. Bremner, *A Diophantine equation arising from tight 4-designs*, Osaka J. Math. **16** (1979), 353–356.

$$\mathrm{der}_{T_0}\mathcal{D} = (\,\mathcal{P} \setminus \{T_0\},\, \{B \setminus \{T_0\} \mid B \in \mathcal{B},\, T_0 \in B\}\,)$$

$$t\text{-}(v, k, \lambda) \quad \rightsquigarrow \quad (t-1)\text{-}(v-1, k-1, \lambda)$$

$$\mathrm{res}_{T_0}\mathcal{D} = (\,\mathcal{P} \setminus \{T_0\},\, \{B \mid B \in \mathcal{B},\, T_0 \notin B\}\,)$$

$$t\text{-}(v, k, \lambda) \quad \rightsquigarrow \quad (t-1)\text{-}(v-1, k, \lambda_{t-1} - \lambda)$$

Kvazisimetrični dizajni

$t = 3$: slučaj $x = 0$

Propozicija

1. Svaki kvazisimetrični 3-dizajn s presječnim brojem $x = 0$ je proširenje simetričnog dizajna.
2. Ako je simetrični 2-(v, k, λ) dizajn proširiv, onda je njegovo proširenje kvazisimetrični 3-$(v + 1, k + 1, \lambda)$ dizajn s presječnim brojevima $x = 0$, $y = \lambda + 1$.

Kvazisimetrični dizajni

$t = 3$: slučaj $x = 0$

Propozicija

1. Svaki kvazisimetrični 3-dizajn s presječnim brojem $x = 0$ je proširenje simetričnog dizajna.
2. Ako je simetrični 2-(v, k, λ) dizajn proširiv, onda je njegovo proširenje kvazisimetrični 3-$(v + 1, k + 1, \lambda)$ dizajn s presječnim brojevima $x = 0$, $y = \lambda + 1$.

Teorem (P. Cameron, 1973.)

Ako je simetrični 2-(v, k, λ) dizajn $\mathcal{D}$ proširiv, onda vrijedi:

1. $v = 4\lambda + 3$, $k = 2\lambda + 1$ ($\mathcal{D}$ je Hadamardov dizajn), ili
2. $v = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 4\lambda + 2)$, $k = \lambda^2 + 3\lambda + 1$, ili
3. $v = 495$, $k = 39$, $\lambda = 3$.

Kvazisimetrični dizajni

1. Hadamardovi dizajni su proširivi i hipoteza je da postoje za svaki $\lambda \in \mathbb{N}$. Primjer: $2\text{-}(7,3,1) \rightsquigarrow 3\text{-}(8,4,1)$.

Kvazisimetrični dizajni

1. Hadamardovi dizajni su proširivi i hipoteza je da postoje za svaki $\lambda \in \mathbb{N}$. Primjer: $2\text{-}(7,3,1) \rightsquigarrow 3\text{-}(8,4,1)$.
2. $\lambda = 1$: $2\text{-}(21,5,1) \rightsquigarrow 3\text{-}(22,6,1) \rightsquigarrow 4\text{-}(23,7,1) \rightsquigarrow 5\text{-}(24,8,1)$

Kvazisimetrični dizajni

1. Hadamardovi dizajni su proširivi i hipoteza je da postoje za svaki $\lambda \in \mathbb{N}$. Primjer: $2\text{-}(7,3,1) \rightsquigarrow 3\text{-}(8,4,1)$.
2. $\lambda = 1$: $2\text{-}(21,5,1) \rightsquigarrow 3\text{-}(22,6,1) \rightsquigarrow 4\text{-}(23,7,1) \rightsquigarrow 5\text{-}(24,8,1)$

   $\lambda = 2$: dvoravnine $2\text{-}(56,11,2)$ postoje, ali ih nije moguće proširiti

Kvazisimetrični dizajni

1. Hadamardovi dizajni su proširivi i hipoteza je da postoje za svaki $\lambda \in \mathbb{N}$. Primjer: $2\text{-}(7,3,1) \rightsquigarrow 3\text{-}(8,4,1)$.
2. $\lambda = 1$: $2\text{-}(21,5,1) \rightsquigarrow 3\text{-}(22,6,1) \rightsquigarrow 4\text{-}(23,7,1) \rightsquigarrow 5\text{-}(24,8,1)$

   $\lambda = 2$: dvoravnine $2\text{-}(56,11,2)$ postoje, ali ih nije moguće proširiti

   $\lambda \geq 3$: **?**

Kvazisimetrični dizajni

1. Hadamardovi dizajni su proširivi i hipoteza je da postoje za svaki $\lambda \in \mathbb{N}$. Primjer: $2\text{-}(7,3,1) \rightsquigarrow 3\text{-}(8,4,1)$.
2. $\lambda = 1$: $2\text{-}(21,5,1) \rightsquigarrow 3\text{-}(22,6,1) \rightsquigarrow 4\text{-}(23,7,1) \rightsquigarrow 5\text{-}(24,8,1)$

   $\lambda = 2$: dvoravnine $2\text{-}(56,11,2)$ postoje, ali ih nije moguće proširiti

   $\lambda \geq 3$: **?**
3. $2\text{-}(495,39,3)$: **?**

Kvazisimetrični dizajni

1. Hadamardovi dizajni su proširivi i hipoteza je da postoje za svaki $\lambda \in \mathbb{N}$. Primjer: $2\text{-}(7,3,1) \rightsquigarrow 3\text{-}(8,4,1)$.
2. $\lambda = 1$: $2\text{-}(21,5,1) \rightsquigarrow 3\text{-}(22,6,1) \rightsquigarrow 4\text{-}(23,7,1) \rightsquigarrow 5\text{-}(24,8,1)$

   $\lambda = 2$: dvoravnine $2\text{-}(56,11,2)$ postoje, ali ih nije moguće proširiti

   $\lambda \geq 3$: **?**
3. $2\text{-}(495,39,3)$: **?**

$t = 3$: slučaj $x > 0$. Jedini poznati primjeri su:

1. derivirani Wittov dizajn $3\text{-}(23,7,5)$, $x = 1$, $y = 3$ (4-dizajn!),
2. njegov rezidualni dizajn $3\text{-}(22,7,4)$, $x = 1$, $y = 3$,
3. njihovi komplementi.

Kvazisimetrični dizajni

1. Hadamardovi dizajni su proširivi i hipoteza je da postoje za svaki $\lambda \in \mathbb{N}$. Primjer: $2\text{-}(7,3,1) \rightsquigarrow 3\text{-}(8,4,1)$.
2. $\lambda = 1$: $2\text{-}(21,5,1) \rightsquigarrow 3\text{-}(22,6,1) \rightsquigarrow 4\text{-}(23,7,1) \rightsquigarrow 5\text{-}(24,8,1)$

   $\lambda = 2$: dvoravnine $2\text{-}(56,11,2)$ postoje, ali ih nije moguće proširiti

   $\lambda \geq 3$: **?**
3. $2\text{-}(495,39,3)$: **?**

$t = 3$: slučaj $x > 0$. Jedini poznati primjeri su:

1. derivirani Wittov dizajn $3\text{-}(23,7,5)$, $x = 1$, $y = 3$ (4-dizajn!),
2. njegov rezidualni dizajn $3\text{-}(22,7,4)$, $x = 1$, $y = 3$,
3. njihovi komplementi.

S.S. Sane, M.S. Shrikhande, *Quasisymmetric 2,3,4-designs*, Combinatorica **7** (1987), 291–301. $\rightsquigarrow$ **Hipoteza:** to su jedini primjeri.

Kvazisimetrični dizajni

$t = 2$:

A. Neumaier, *Regular sets and quasi-symmetric 2-designs*, Combinatorial theory (Schloss Rauischholzhausen, 1982), 258–275, Lecture Notes in Math. **969**, Springer, 1982.

Kvazisimetrični dizajni

$t = 2$:

A. Neumaier, *Regular sets and quasi-symmetric 2-designs*, Combinatorial theory (Schloss Rauischholzhausen, 1982), 258–275, Lecture Notes in Math. **969**, Springer, 1982.

1. Višekratnici simetričnih dizajna $\rightsquigarrow$ *imaju ponovljene blokove*

Kvazisimetrični dizajni

$t = 2$:

A. Neumaier, *Regular sets and quasi-symmetric 2-designs*, Combinatorial theory (Schloss Rauischholzhausen, 1982), 258–275, Lecture Notes in Math. **969**, Springer, 1982.

1. Višekratnici simetričnih dizajna $\rightsquigarrow$ *imaju ponovljene blokove*
2. Steinerovi 2-dizajni $\rightsquigarrow$ *automatski kvazisimetrični*

Kvazisimetrični dizajni

$t = 2$:

A. Neumaier, *Regular sets and quasi-symmetric 2-designs*, Combinatorial theory (Schloss Rauischholzhausen, 1982), 258–275, Lecture Notes in Math. **969**, Springer, 1982.

1. Višekratnici simetričnih dizajna $\rightsquigarrow$ *imaju ponovljene blokove*
2. Steinerovi 2-dizajni $\rightsquigarrow$ *automatski kvazisimetrični*
3. Rezidualni dizajni dvoravnina. Ekvivalentno: kvazisimetrični s $\lambda = 2$, $x = 1$, $y = 2$.

Kvazisimetrični dizajni

$t = 2$:

A. Neumaier, *Regular sets and quasi-symmetric 2-designs*, Combinatorial theory (Schloss Rauischholzhausen, 1982), 258–275, Lecture Notes in Math. **969**, Springer, 1982.

1. Višekratnici simetričnih dizajna $\rightsquigarrow$ *imaju ponovljene blokove*
2. Steinerovi 2-dizajni $\rightsquigarrow$ *automatski kvazisimetrični*
3. Rezidualni dizajni dvoravnina. Ekvivalentno: kvazisimetrični s $\lambda = 2$, $x = 1$, $y = 2$.
4. Jako rastavljivi dizajni. Ekvivalentno: 1. $x = k + \lambda - r$,
   2. blokovni graf je potpun multipartitan.

Kvazisimetrični dizajni

$t = 2$:

A. Neumaier, *Regular sets and quasi-symmetric 2-designs*, Combinatorial theory (Schloss Rauischholzhausen, 1982), 258–275, Lecture Notes in Math. **969**, Springer, 1982.

1. Višekratnici simetričnih dizajna $\rightsquigarrow$ *imaju ponovljene blokove*
2. Steinerovi 2-dizajni $\rightsquigarrow$ *automatski kvazisimetrični*
3. Rezidualni dizajni dvoravnina. Ekvivalentno: kvazisimetrični s $\lambda = 2$, $x = 1$, $y = 2$.
4. Jako rastavljivi dizajni. Ekvivalentno: 1. $x = k + \lambda - r$,
   2. blokovni graf je potpun multipartitan.

Svi ostali slučajevi: iznimni parametri $\rightsquigarrow$ TABLICA

Kvazisimetrični dizajni

A. Neumaier, *Regular sets and quasi-symmetric 2-designs...* $\rightsquigarrow v \leq 40$

Kvazisimetrični dizajni

A. Neumaier, *Regular sets and quasi-symmetric 2-designs...* $\rightsquigarrow v \leq 40$

M.S. Shrikhande, *Quasi-symmetric designs*, u: *The Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition* (urednici C.J. Colbourn i J.H. Dinitz), CRC Press, 2007., str. 578–582. $\rightsquigarrow v \leq 70$

Kvazisimetrični dizajni

A. Neumaier, *Regular sets and quasi-symmetric 2-designs...* $\rightsquigarrow v \leq 40$

M.S. Shrikhande, *Quasi-symmetric designs*, u: *The Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition* (urednici C.J. Colbourn i J.H. Dinitz), CRC Press, 2007., str. 578–582. $\rightsquigarrow v \leq 70$

R. Vlahović Kruc, *Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima*, doktorska disertacija, srpanj 2019. $\rightsquigarrow v \leq 150$

Kvazisimetrični dizajni

A. Neumaier, *Regular sets and quasi-symmetric 2-designs...* $\rightsquigarrow v \leq 40$

M.S. Shrikhande, *Quasi-symmetric designs*, u: *The Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition* (urednici C.J. Colbourn i J.H. Dinitz), CRC Press, 2007., str. 578–582. $\rightsquigarrow v \leq 70$

R. Vlahović Kruc, *Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima*, doktorska disertacija, srpanj 2019. $\rightsquigarrow v \leq 150$

A. E. Brouwer, H. Van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, 2021. $\rightsquigarrow v \leq 100$

Kvazisimetrični dizajni

v	k	λ	y	x	V	K	Λ	M	R	S	ex	ref
19	7	7	1	3	57	42	31	30	4	−3	=	[732]
19	9	16	3	5	76	45	28	24	7	−3	=	[89]
20	8	14	2	4	95	54	33	27	9	−3	=	[21]
20	10	18	4	6	76	35	18	14	7	−3	=	[20]
21	6	4	0	2	56	45	36	36	3	−3	!	Ex. D
21	7	12	1	3	120	77	52	44	11	−3	!	Ex. D
21	8	14	2	4	105	52	29	22	10	−3	–	[165]
21	9	12	3	5	70	27	12	9	6	−3	–	[165]
22	6	5	0	2	77	60	47	45	5	−3	!	Ex. D
22	7	16	1	3	176	105	68	54	17	−3	!	Ex. D
22	8	12	2	4	99	42	21	15	9	−3	–	[165]
23	7	21	1	3	253	140	87	65	25	−3	!	Ex. D
24	8	7	2	4	69	20	7	5	5	−3	–	[121]
28	7	16	1	3	288	105	52	30	25	−3	–	[702]
28	12	11	4	6	63	32	16	16	4	−4	+	Ex. F
29	7	12	1	3	232	77	36	20	19	−3	–	[166]
31	7	7	1	3	155	42	17	9	11	−3	5	Ex. E, [703]
33	9	6	1	3	88	60	41	40	5	−4	–	[165]
33	15	35	6	9	176	45	18	9	12	−3	?	
35	7	3	1	3	85	14	3	2	4	−3	–	[165]
35	14	13	5	8	85	14	3	2	4	−3	?	
36	16	12	6	8	63	30	13	15	3	−5	+	Ex. F
37	9	8	1	3	148	84	50	44	10	−4	–	[415]
39	12	22	3	6	247	54	21	9	15	−3	?	
41	9	9	1	3	205	96	50	40	14	−4	?	
41	17	34	5	8	205	136	93	84	13	−4	–	[166]

continued...

Kvazisimetrični dizajni

v	k	λ	y	x	V	K	Λ	M	R	S	ex	ref
19	7	7	1	3	57	42	31	30	4	−3	=	[732]
19	9	16	3	5	76	45	28	24	7	−3	=	[89]
20	8	14	2	4	95	54	33	27	9	−3	=	[21]
20	10	18	4	6	76	35	18	14	7	−3	=	[20]
21	6	4	0	2	56	45	36	36	3	−3	!	Ex. D
21	7	12	1	3	120	77	52	44	11	−3	!	Ex. D
21	8	14	2	4	105	52	29	22	10	−3	–	[165]
21	9	12	3	5	70	27	12	9	6	−3	–	[165]
22	6	5	0	2	77	60	47	45	5	−3	!	Ex. D
22	7	16	1	3	176	105	68	54	17	−3	!	Ex. D
22	8	12	2	4	99	42	21	15	9	−3	–	[165]
23	7	21	1	3	253	140	87	65	25	−3	!	Ex. D
24	8	7	2	4	69	20	7	5	5	−3	–	[121]
28	7	16	1	3	288	105	52	30	25	−3	–	[702]
28	12	11	4	6	63	32	16	16	4	−4	+	Ex. F
29	7	12	1	3	232	77	36	20	19	−3	–	[166]
31	7	7	1	3	155	42	17	9	11	−3	5	Ex. E, [703]
33	9	6	1	3	88	60	41	40	5	−4	–	[165]
33	15	35	6	9	176	45	18	9	12	−3	?	
35	7	3	1	3	85	14	3	2	4	−3	–	[165]
35	14	13	5	8	85	14	3	2	4	−3	?	
36	16	12	6	8	63	30	13	15	3	−5	+	Ex. F
37	9	8	1	3	148	84	50	44	10	−4	–	[415]
39	12	22	3	6	247	54	21	9	15	−3	?	
41	9	9	1	3	205	96	50	40	14	−4	?	
41	17	34	5	8	205	136	93	84	13	−4	–	[166]

continued...

Kvazisimetrični dizajni

v	k	λ	y	x	V	K	Λ	M	R	S	ex	ref
41	20	57	8	11	246	140	85	72	17	−4	?	
42	18	51	6	9	287	160	96	80	20	−4	?	
42	21	60	9	12	246	119	64	51	17	−4	?	
43	16	40	4	7	301	192	128	112	20	−4	?	
43	18	51	6	9	301	150	83	66	21	−4	–	[166]
45	9	8	1	3	220	84	38	28	14	−4	!	Ex. D, [703], [414]
45	15	42	3	6	396	260	178	156	26	−4	?	
45	18	34	6	9	220	84	38	28	14	−4	?	
45	21	70	9	13	330	63	24	9	18	−3	?	
46	16	8	4	6	69	48	32	36	2	−6	?	
46	16	72	4	7	621	320	184	144	44	−4	?	
49	9	6	1	3	196	60	23	16	11	−4	+	[445]
49	13	13	1	4	196	156	125	120	9	−4	?	
49	16	45	4	7	441	176	85	60	29	−4	?	
51	15	7	3	5	85	54	33	36	3	−6	–	[165]
51	21	14	6	9	85	70	57	60	2	−5	–	[166]
52	16	20	4	7	221	64	24	16	12	−4	–	[166]
55	15	7	3	5	99	48	22	24	4	−6	?	
55	15	63	3	6	891	320	148	96	56	−4	?	
55	16	40	4	8	495	78	29	9	23	−3	?	
56	12	9	0	3	210	176	148	144	8	−4	–	[578]
56	15	42	3	6	616	205	90	57	37	−4	–	[166]
56	16	6	4	6	77	16	0	4	2	−6	+	[704], [577]
56	16	18	4	8	231	30	9	3	9	−3	+	[501]
56	20	19	5	8	154	105	72	70	7	−5	?	
56	21	24	6	9	176	105	64	60	9	−5	–	[166]
57	9	3	1	3	133	24	5	4	5	−4	?	
57	12	11	0	3	266	220	183	176	11	−4	–	[578]
57	15	30	3	6	456	140	58	36	26	−4	?	

Kvazisimetrični dizajni

57	24	23	9	12	133	44	15	14	6	−5	−	[166]
57	27	117	12	17	532	81	30	9	24	−3	−	[166]
60	15	14	3	6	236	55	18	11	11	−4	?	
60	30	58	14	18	236	55	18	11	11	−4	−	[168]
61	21	21	6	9	183	70	29	25	9	−5	?	
61	25	160	9	13	976	300	128	76	56	−4	?	
63	15	35	3	7	651	90	33	9	27	−3	+	Ex. E
63	18	17	3	6	217	150	105	100	10	−5	?	
63	24	92	8	12	651	182	73	42	35	−4	?	
64	24	46	8	12	336	80	28	16	16	−4	+	[80], [472]
65	20	19	5	8	208	75	30	25	10	−5	?	
66	30	29	12	15	143	72	36	36	6	−6	+	[105]
69	18	30	3	6	460	255	150	130	25	−5	?	
69	33	176	15	21	782	99	36	9	30	−3	−	[165]
70	10	6	0	2	322	225	160	150	15	−5	−	[168]
70	30	58	10	14	322	225	160	150	15	−5	?	
71	14	39	2	5	1065	266	103	54	53	−4	?	
71	31	93	11	15	497	310	201	180	26	−5	?	
71	35	136	15	19	568	315	186	160	31	−5	?	
72	18	34	3	6	568	279	150	124	31	−5	?	
72	32	124	12	16	639	350	205	175	35	−5	?	
72	36	140	16	20	568	279	150	124	31	−5	?	
73	10	15	1	4	876	105	38	9	32	−3	?	
73	28	126	10	16	876	105	38	9	32	−3	?	
73	32	124	12	16	657	328	179	148	36	−5	?	
75	27	117	9	15	925	108	39	9	33	−3	?	
76	16	12	1	4	285	220	171	165	11	−5	−	[166]
76	26	52	6	10	456	325	236	220	21	−5	?	
76	30	116	10	14	760	345	176	140	41	−5	?	

continued...

Kvazisimetrični dizajni

v	k	λ	y	x	V	K	Λ	M	R	S	ex	ref
76	36	21	16	18	95	40	12	20	2	−10	=	[21]
76	36	42	16	20	190	45	12	10	7	−5	?	
76	36	105	16	21	475	96	32	16	20	−4	–	[166]
77	33	24	12	15	133	88	57	60	4	−7	–	[30], [78]
78	26	100	6	10	924	611	418	376	47	−5	?	
78	28	216	8	12	1716	875	490	400	95	−5	?	
78	33	64	13	18	364	66	20	10	14	−4	–	[166]
78	36	30	15	18	143	70	33	35	5	−7	+	[105]
79	19	57	4	9	1027	114	41	9	35	−3	?	
81	30	290	10	15	2160	476	178	84	98	−4	?	
81	39	247	18	25	1080	117	42	9	36	−3	?	
84	28	54	8	12	498	161	64	46	23	−5	?	
85	15	4	1	3	136	105	80	84	3	−7	?	
85	15	6	0	3	204	175	150	150	5	−5	?	
85	35	34	10	15	204	175	150	150	5	−5	?	
85	40	52	16	20	238	162	111	108	9	−6	?	
85	40	130	15	20	595	450	345	325	25	−5	?	
87	24	92	6	12	1247	126	45	9	39	−3	?	
88	22	14	2	6	232	198	169	168	6	−5	?	
88	28	63	8	13	638	112	36	16	24	−4	–	[166]
88	33	32	8	13	232	198	169	168	6	−5	–	[166]
88	40	65	16	20	319	168	92	84	14	−6	?	
91	21	18	3	6	351	210	129	120	15	−6	?	
91	26	160	6	10	2016	715	314	220	99	−5	?	
91	28	18	7	10	195	98	49	49	7	−7	–	[166]
91	35	51	11	15	351	210	129	120	15	−6	?	
91	36	56	12	16	364	198	112	102	16	−6	?	
91	39	19	15	17	105	78	55	66	1	−12	–	[165]

Kvazisimetrični dizajni

88	33	32	8	13	232	198	169	168	6	−5	–	[166]
88	40	65	16	20	319	168	92	84	14	−6	?	
91	21	18	3	6	351	210	129	120	15	−6	?	
91	26	160	6	10	2016	715	314	220	99	−5	?	
91	28	18	7	10	195	98	49	49	7	−7	–	[166]
91	35	51	11	15	351	210	129	120	15	−6	?	
91	36	56	12	16	364	198	112	102	16	−6	?	
91	39	19	15	17	105	78	55	66	1	−12	–	[165]
91	40	52	16	20	273	102	41	36	11	−6	?	
92	26	100	6	10	1288	429	180	124	61	−5	?	
92	27	108	7	12	1288	234	80	34	50	−4	–	[166]
93	18	51	3	8	1426	135	48	9	42	−3	?	
93	30	145	9	16	1426	135	48	9	42	−3	?	
93	45	330	21	29	1426	135	48	9	42	−3	?	
93	45	825	20	25	3565	1260	555	385	175	−5	?	
96	36	42	12	16	304	108	42	36	12	−6	?	
96	40	78	16	24	456	35	10	2	11	−3	=	§8.18
99	15	5	1	3	231	140	85	84	8	−7	–	[165]
99	36	20	12	15	154	48	12	16	4	−8	?	
100	12	5	0	2	375	264	188	180	14	−6	?	
100	36	105	12	18	825	128	40	16	28	−4	–	[166]

Table 8.2: Parameters of sporadic quasi-symmetric designs

Kvazisimetrični dizajni

Beskonačne familije kvazisimetričnih 2-dizajna s iznimnim parametrima:

Kvazisimetrični dizajni

Beskonačne familije kvazisimetričnih 2-dizajna s iznimnim parametrima:

1. Rezidualni i derivirani simetrični SDP dizajni

   $2\text{-}(2^{2m}, 2^{2m-1} + 2^{m-1}, 2^{2m-2} + 2^{m-1})$

   $\rightsquigarrow 2\text{-}(2^{2m-1} + 2^{m-1}, 2^{2m-2}, 2^{2m-2} - 2^{m-1})$,
   $x = 2^{2m-3} - 2^{m-2}$, $y = 2^{2m-3}$

   $\rightsquigarrow 2\text{-}(2^{2m-1} - 2^{m-1}, 2^{2m-2} - 2^{m-1}, 2^{2m-2} - 2^{m-1} - 1)$,
   $x = 2^{2m-3} - 2^{m-1}$, $y = 2^{2m-3} - 2^{m-2}$

Kvazisimetrični dizajni

Beskonačne familije kvazisimetričnih 2-dizajna s iznimnim parametrima:

1. Rezidualni i derivirani simetrični SDP dizajni

$$2\text{-}(2^{2m}, 2^{2m-1}+2^{m-1}, 2^{2m-2}+2^{m-1})$$

$$\rightsquigarrow 2\text{-}(2^{2m-1}+2^{m-1}, 2^{2m-2}, 2^{2m-2}-2^{m-1}),$$
$$x = 2^{2m-3}-2^{m-2},\ y = 2^{2m-3}$$

$$\rightsquigarrow 2\text{-}(2^{2m-1}-2^{m-1}, 2^{2m-2}-2^{m-1}, 2^{2m-2}-2^{m-1}-1),$$
$$x = 2^{2m-3}-2^{m-1},\ y = 2^{2m-3}-2^{m-2}$$

Postoje za sve $m \geq 3$! Npr. za $m = 3$:

$$2\text{-}(64, 28, 12) \rightsquigarrow 2\text{-}(36, 16, 12),\ x = 6,\ y = 8$$
$$\rightsquigarrow 2\text{-}(28, 12, 11),\ x = 4,\ y = 6$$

Kvazisimetrični dizajni

v	k	λ	y	x	V	K	Λ	M	R	S	ex	ref
19	7	7	1	3	57	42	31	30	4	−3	=	[732]
19	9	16	3	5	76	45	28	24	7	−3	=	[89]
20	8	14	2	4	95	54	33	27	9	−3	=	[21]
20	10	18	4	6	76	35	18	14	7	−3	=	[20]
21	6	4	0	2	56	45	36	36	3	−3	!	Ex. D
21	7	12	1	3	120	77	52	44	11	−3	!	Ex. D
21	8	14	2	4	105	52	29	22	10	−3	–	[165]
21	9	12	3	5	70	27	12	9	6	−3	–	[165]
22	6	5	0	2	77	60	47	45	5	−3	!	Ex. D
22	7	16	1	3	176	105	68	54	17	−3	!	Ex. D
22	8	12	2	4	99	42	21	15	9	−3	–	[165]
23	7	21	1	3	253	140	87	65	25	−3	!	Ex. D
24	8	7	2	4	69	20	7	5	5	−3	–	[121]
28	7	16	1	3	288	105	52	30	25	−3	–	[702]
28	12	11	4	6	63	32	16	16	4	−4	+	Ex. F
29	7	12	1	3	232	77	36	20	19	−3	–	[166]
31	7	7	1	3	155	42	17	9	11	−3	5	Ex. E, [703]
33	9	6	1	3	88	60	41	40	5	−4	–	[165]
33	15	35	6	9	176	45	18	9	12	−3	?	
35	7	3	1	3	85	14	3	2	4	−3	–	[165]
35	14	13	5	8	85	14	3	2	4	−3	?	
36	16	12	6	8	63	30	13	15	3	−5	+	Ex. F
37	9	8	1	3	148	84	50	44	10	−4	–	[415]
39	12	22	3	6	247	54	21	9	15	−3	?	
41	9	9	1	3	205	96	50	40	14	−4	?	
41	17	34	5	8	205	136	93	84	13	−4	–	[166]

continued...

Kvazisimetrični dizajni

Rezidualni i derivirani dizajni simetričnog 2-(v, k, λ) dizajna:

$$\mathrm{res}_{B_0}\mathcal{D} = (\,\mathcal{P} \setminus B_0,\ \{B \setminus B_0 \mid B \in \mathcal{B}, B \neq B_0\}\,)$$

$$2\text{-}(v, k, \lambda) \quad \rightsquigarrow \quad 2\text{-}(v-k, k-\lambda, \lambda), \ \text{ zadovoljava } r' = k' + \lambda'$$

Kvazisimetrični dizajni

Rezidualni i derivirani dizajni simetričnog 2-(v, k, λ) dizajna:

$$\mathrm{res}_{B_0}\mathcal{D} = (\, \mathcal{P} \setminus B_0,\ \{B \setminus B_0 \mid B \in \mathcal{B}, B \neq B_0\}\,)$$

$$2\text{-}(v, k, \lambda) \quad \rightsquigarrow \quad 2\text{-}(v-k, k-\lambda, \lambda), \ \text{ zadovoljava } r' = k' + \lambda'$$

$$\mathrm{der}_{B_0}\mathcal{D} = (\, B_0,\ \{B \cap B_0 \mid B \in \mathcal{B}, B \neq B_0\}\,)$$

$$2\text{-}(v, k, \lambda) \quad \rightsquigarrow \quad 2\text{-}(k, \lambda, \lambda-1), \ \text{ zadovoljava } k' = \lambda' + 1$$

Kvazisimetrični dizajni

Beskonačne familije kvazisimetričnih 2-dizajna s iznimnim parametrima:

2. Projektivni dizajni $PG_{n-2}(n,q)$

$$2\text{-}\left(\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q, \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix}_q, \begin{bmatrix} n-1 \\ n-3 \end{bmatrix}_q\right),\ x = \begin{bmatrix} n-3 \\ 1 \end{bmatrix}_q,\ y = \begin{bmatrix} n-2 \\ 1 \end{bmatrix}_q$$

Kvazisimetrični dizajni

Beskonačne familije kvazisimetričnih 2-dizajna s iznimnim parametrima:

2. Projektivni dizajni $PG_{n-2}(n,q)$

$$2\text{-}\left(\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q, \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix}_q, \begin{bmatrix} n-1 \\ n-3 \end{bmatrix}_q\right),\ x = \begin{bmatrix} n-3 \\ 1 \end{bmatrix}_q,\ y = \begin{bmatrix} n-2 \\ 1 \end{bmatrix}_q$$

Postoje za sve $n \geq 4$ i prim potencije q. Npr. za $n = 4$, $q = 2$:

$$2\text{-}(31,7,7),\ x = 6,\ y = 8$$

Kvazisimetrični dizajni

Beskonačne familije kvazisimetričnih 2-dizajna s iznimnim parametrima:

2. Projektivni dizajni $PG_{n-2}(n,q)$

$$2\text{-}\left(\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q, \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix}_q, \begin{bmatrix} n-1 \\ n-3 \end{bmatrix}_q\right),\ x = \begin{bmatrix} n-3 \\ 1 \end{bmatrix}_q,\ y = \begin{bmatrix} n-2 \\ 1 \end{bmatrix}_q$$

Postoje za sve $n \geq 4$ i prim potencije q. Npr. za $n = 4$, $q = 2$:

$$2\text{-}(31,7,7),\ x = 6,\ y = 8$$

Afini dizajni $AG_{n-1}(n,q)$ su također kvazisimetrični, ali parametri nisu iznimni nego spadaju u jako rastavljive dizajne:

$$2\text{-}\left(q^n, q^{n-1}, \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix}_q\right),\ x = 0,\ y = q^{n-2}$$

Kvazisimetrični dizajni

v	k	λ	y	x	V	K	Λ	M	R	S	ex	ref
19	7	7	1	3	57	42	31	30	4	−3	=	[732]
19	9	16	3	5	76	45	28	24	7	−3	=	[89]
20	8	14	2	4	95	54	33	27	9	−3	=	[21]
20	10	18	4	6	76	35	18	14	7	−3	=	[20]
21	6	4	0	2	56	45	36	36	3	−3	!	Ex. D
21	7	12	1	3	120	77	52	44	11	−3	!	Ex. D
21	8	14	2	4	105	52	29	22	10	−3	–	[165]
21	9	12	3	5	70	27	12	9	6	−3	–	[165]
22	6	5	0	2	77	60	47	45	5	−3	!	Ex. D
22	7	16	1	3	176	105	68	54	17	−3	!	Ex. D
22	8	12	2	4	99	42	21	15	9	−3	–	[165]
23	7	21	1	3	253	140	87	65	25	−3	!	Ex. D
24	8	7	2	4	69	20	7	5	5	−3	–	[121]
28	7	16	1	3	288	105	52	30	25	−3	–	[702]
28	12	11	4	6	63	32	16	16	4	−4	+	Ex. F
29	7	12	1	3	232	77	36	20	19	−3	–	[166]
31	7	7	1	3	155	42	17	9	11	−3	5	Ex. E, [703]
33	9	6	1	3	88	60	41	40	5	−4	–	[165]
33	15	35	6	9	176	45	18	9	12	−3	?	
35	7	3	1	3	85	14	3	2	4	−3	–	[165]
35	14	13	5	8	85	14	3	2	4	−3	?	
36	16	12	6	8	63	30	13	15	3	−5	+	Ex. F
37	9	8	1	3	148	84	50	44	10	−4	–	[415]
39	12	22	3	6	247	54	21	9	15	−3	?	
41	9	9	1	3	205	96	50	40	14	−4	?	
41	17	34	5	8	205	136	93	84	13	−4	–	[166]

continued...

Kvazisimetrični dizajni

Beskonačne familije kvazisimetričnih 2-dizajna s iznimnim parametrima:

3. Familija Blokhuisa i Haemersa: za $q = 2^m$ parametri su

$$2\text{-}\left(q^3, \frac{q^2(q-1)}{2}, \frac{q(q^3-q^2-2)}{4}\right),\ x = \frac{q^2(q-2)}{4},\ y = \frac{q^2(q-1)}{4}$$

A. Blokhuis, W.H. Haemers, *An infinite family of quasi-symmetric designs*, J. Statist. Plann. Inference **95** (2001), 117–119.

Kvazisimetrični dizajni

Beskonačne familije kvazisimetričnih 2-dizajna s iznimnim parametrima:

3. Familija Blokhuisa i Haemersa: za $q = 2^m$ parametri su

$$2\text{-}\left(q^3, \frac{q^2(q-1)}{2}, \frac{q(q^3-q^2-2)}{4}\right),\ x = \frac{q^2(q-2)}{4},\ y = \frac{q^2(q-1)}{4}$$

A. Blokhuis, W.H. Haemers, *An infinite family of quasi-symmetric designs*, J. Statist. Plann. Inference **95** (2001), 117–119.

Postoje za sve $m \geq 2$. Npr. za $m = 2$:

$$2\text{-}(64, 24, 46),\ x = 8,\ y = 12$$

Kvazisimetrični dizajni

Beskonačne familije kvazisimetričnih 2-dizajna s iznimnim parametrima:

3. Familija Blokhuisa i Haemersa: za $q = 2^m$ parametri su

$$2\text{-}\left(q^3, \frac{q^2(q-1)}{2}, \frac{q(q^3-q^2-2)}{4}\right),\ x = \frac{q^2(q-2)}{4},\ y = \frac{q^2(q-1)}{4}$$

A. Blokhuis, W.H. Haemers, *An infinite family of quasi-symmetric designs*, J. Statist. Plann. Inference **95** (2001), 117–119.

Postoje za sve $m \geq 2$. Npr. za $m = 2$:

$$2\text{-}(64, 24, 46),\ x = 8,\ y = 12$$

D. Crnković, B. G. Rodrigues, S. Rukavina, V. D. Tonchev, *Quasi-symmetric* $2\text{-}(64, 24, 46)$ *designs derived from* $AG(3, 4)$, Discrete Math. **340** (2017), 2472–2478.

Kvazisimetrični dizajni

57	24	23	9	12	133	44	15	14	6	−5	−	[166]
57	27	117	12	17	532	81	30	9	24	−3	−	[166]
60	15	14	3	6	236	55	18	11	11	−4	?	
60	30	58	14	18	236	55	18	11	11	−4	−	[168]
61	21	21	6	9	183	70	29	25	9	−5	?	
61	25	160	9	13	976	300	128	76	56	−4	?	
63	15	35	3	7	651	90	33	9	27	−3	+	Ex. E
63	18	17	3	6	217	150	105	100	10	−5	?	
63	24	92	8	12	651	182	73	42	35	−4	?	
64	24	46	8	12	336	80	28	16	16	−4	+	[80], [472]
65	20	19	5	8	208	75	30	25	10	−5	?	
66	30	29	12	15	143	72	36	36	6	−6	+	[105]
69	18	30	3	6	460	255	150	130	25	−5	?	
69	33	176	15	21	782	99	36	9	30	−3	−	[165]
70	10	6	0	2	322	225	160	150	15	−5	−	[168]
70	30	58	10	14	322	225	160	150	15	−5	?	
71	14	39	2	5	1065	266	103	54	53	−4	?	
71	31	93	11	15	497	310	201	180	26	−5	?	
71	35	136	15	19	568	315	186	160	31	−5	?	
72	18	34	3	6	568	279	150	124	31	−5	?	
72	32	124	12	16	639	350	205	175	35	−5	?	
72	36	140	16	20	568	279	150	124	31	−5	?	
73	10	15	1	4	876	105	38	9	32	−3	?	
73	28	126	10	16	876	105	38	9	32	−3	?	
73	32	124	12	16	657	328	179	148	36	−5	?	
75	27	117	9	15	925	108	39	9	33	−3	?	
76	16	12	1	4	285	220	171	165	11	−5	−	[166]
76	26	52	6	10	456	325	236	220	21	−5	?	
76	30	116	10	14	760	345	176	140	41	−5	?	

continued...

Kvazisimetrični dizajni

Što za parametre kvazisimetričnog dizajna znači da su **dopustivi**?

Kvazisimetrični dizajni

Što za parametre kvazisimetričnog dizajna znači da su **dopustivi**?

Uzima se u obzir:

Teorem (Neumaier, 1982.)

Parametri kvazisimetričnog 2-dizajna $\mathcal{D}$ zadovoljavaju $B(B-A) \leq AC$, pri čemu je $A = (v-1)(v-2)$, $B = r(k-1)(k-2)$,
$C = rV(y-1)(y-2) + r(r-1-V)(x-1)(x-2)$,
$V = \frac{(k-1)(\lambda-1)-(r-1)(x-1)}{y-x}$.
Jednakost se dostiže ako i samo ako je $\mathcal{D}$ 3-dizajn.

Kvazisimetrični dizajni

Što za parametre kvazisimetričnog dizajna znači da su **dopustivi**?

Uzima se u obzir:

Teorem (Neumaier, 1982.)

Parametri kvazisimetričnog 2-dizajna $\mathcal{D}$ zadovoljavaju $B(B-A) \leq AC$, pri čemu je $A = (v-1)(v-2)$, $B = r(k-1)(k-2)$,
$C = rV(y-1)(y-2) + r(r-1-V)(x-1)(x-2)$,
$V = \frac{(k-1)(\lambda-1)-(r-1)(x-1)}{y-x}$.
Jednakost se dostiže ako i samo ako je $\mathcal{D}$ 3-dizajn.

A.R. Calderbank, *Inequalities for quasisymmetric designs*, J. Combin. Theory Ser. A **48** (1988), 53–64.

$\vdots$

Kvazisimetrični dizajni

Što za parametre kvazisimetričnog dizajna znači da su **dopustivi**?

Ne uzima se u obzir:

A.R. Calderbank, *The application of invariant theory to the existence of quasisymmetric designs*, J. Combin. Theory Ser. A **44** (1987), 94–109.

A.R. Calderbank, *Geometric invariants for quasisymmetric designs*, J. Combin. Theory Ser. A **47** (1988), 101–110.

A.R. Calderbank, P. Frankl, *Binary codes and quasisymmetric designs*, Discrete Math. **83** (1990), 201–204.

$\vdots$

Kvazisimetrični dizajni

v	k	λ	y	x	V	K	Λ	M	R	S	ex	ref
19	7	7	1	3	57	42	31	30	4	−3	=	[732]
19	9	16	3	5	76	45	28	24	7	−3	=	[89]
20	8	14	2	4	95	54	33	27	9	−3	=	[21]
20	10	18	4	6	76	35	18	14	7	−3	=	[20]
21	6	4	0	2	56	45	36	36	3	−3	!	Ex. D
21	7	12	1	3	120	77	52	44	11	−3	!	Ex. D
21	8	14	2	4	105	52	29	22	10	−3	–	[165]
21	9	12	3	5	70	27	12	9	6	−3	–	[165]
22	6	5	0	2	77	60	47	45	5	−3	!	Ex. D
22	7	16	1	3	176	105	68	54	17	−3	!	Ex. D
22	8	12	2	4	99	42	21	15	9	−3	–	[165]
23	7	21	1	3	253	140	87	65	25	−3	!	Ex. D
24	8	7	2	4	69	20	7	5	5	−3	–	[121]
28	7	16	1	3	288	105	52	30	25	−3	–	[702]
28	12	11	4	6	63	32	16	16	4	−4	+	Ex. F
29	7	12	1	3	232	77	36	20	19	−3	–	[166]
31	7	7	1	3	155	42	17	9	11	−3	5	Ex. E, [703]
33	9	6	1	3	88	60	41	40	5	−4	–	[165]
33	15	35	6	9	176	45	18	9	12	−3	?	
35	7	3	1	3	85	14	3	2	4	−3	–	[165]
35	14	13	5	8	85	14	3	2	4	−3	?	
36	16	12	6	8	63	30	13	15	3	−5	+	Ex. F
37	9	8	1	3	148	84	50	44	10	−4	–	[415]
39	12	22	3	6	247	54	21	9	15	−3	?	
41	9	9	1	3	205	96	50	40	14	−4	?	
41	17	34	5	8	205	136	93	84	13	−4	–	[166]

continued...

Kvazisimetrični dizajni

Grafovi pridruženi kvazisimetričnom dizajnu

Vrhovi: blokovi dizajna

U grafu Γ_1 vrhovi su **susjedni** ako se sijeku u x točaka, a u grafu Γ_2 ako se sijeku u y točaka. Graf Γ_2 nazivamo blokovnim grafom dizajna.

Kvazisimetrični dizajni

Grafovi pridruženi kvazisimetričnom dizajnu

Vrhovi: blokovi dizajna

U grafu Γ_1 vrhovi su **susjedni** ako se sijeku u x točaka, a u grafu Γ_2 ako se sijeku u y točaka. Graf Γ_2 nazivamo blokovnim grafom dizajna.

Teorem

Neka je $\mathcal{D}$ kvazisimetrični 2-(v, k, λ) dizajn s presječnim brojevima $x < y$. Onda je Γ_2 jako regularan s parametrima $SRG(b, a, c, d)$ za $a = \frac{k(r-1)-x(b-1)}{y-x}$, $c = a + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2$ i $d = a + \theta_1\theta_2$. Pritom su $\theta_1 = \frac{r-\lambda-k+x}{y-x}$, $\theta_2 = \frac{x-k}{y-x}$ i $\{a, \theta_1, \theta_2\}$ je spektar od Γ_y.

Graf Γ_1 je komplementarni jako regularan graf, a $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ je asocijacijska shema s dvije klase.

Kvazisimetrični dizajni

Korolar

Ako postoji kvazisimetrični 2-(v, k, λ) dizajn s presječnim brojevima $x < y$, onda $y - x$ dijeli $k - x$ i $r - \lambda$.

Kvazisimetrični dizajni

Korolar

Ako postoji kvazisimetrični 2-(v, k, λ) dizajn s presječnim brojevima $x < y$, onda $y - x$ dijeli $k - x$ i $r - \lambda$.

Uzima se u obzir za dopustivost parametara kvazisimetričnog dizajna!

Kvazisimetrični dizajni

Korolar

Ako postoji kvazisimetrični 2-(v, k, λ) dizajn s presječnim brojevima $x < y$, onda $y - x$ dijeli $k - x$ i $r - \lambda$.

Uzima se u obzir za dopustivost parametara kvazisimetričnog dizajna!

Također, i svi drugi nužni uvjeti za postojanje jako regularnog grafa s parametrima kao Γ_2 (oni koji se gledaju za dopustivost parametara jako regularnih grafova).

Kvazisimetrični dizajni

Korolar

Ako postoji kvazisimetrični 2-(v, k, λ) dizajn s presječnim brojevima $x < y$, onda $y - x$ dijeli $k - x$ i $r - \lambda$.

Uzima se u obzir za dopustivost parametara kvazisimetričnog dizajna!

Također, i svi drugi nužni uvjeti za postojanje jako regularnog grafa s parametrima kao Γ_2 (oni koji se gledaju za dopustivost parametara jako regularnih grafova).

To **ne znači** da jako regularni grafovi s odgovarajućim parametrima moraju postojati da bismo parametre kvazisimetričnog dizajna smatrali dopustivima!

Dizajni stupnja $d = 3$

Dizajnima stupnja $d = 3$ snaga je ograničena s $t \leq 6$.

Presječne brojeve označavamo $x < y < z$.

Dizajni stupnja $d = 3$

Dizajnima stupnja $d = 3$ snaga je ograničena s $t \leq 6$.

Presječne brojeve označavamo $x < y < z$.

$t = 6 \rightsquigarrow$ **Ne postoje**

C. Peterson, *On tight 6-designs*, Osaka J. Math. **14** (1977), 417–435.

Dizajni stupnja $d = 3$

Dizajnima stupnja $d = 3$ snaga je ograničena s $t \leq 6$.

Presječne brojeve označavamo $x < y < z$.

$t = 6 \rightsquigarrow$ **Ne postoje**

C. Peterson, *On tight 6-designs*, Osaka J. Math. **14** (1977), 417–435.

$t = 5 \rightsquigarrow$ **Hipoteza:** jedini primjer je Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$ s presječnim brojevima $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$ i njegov komplement.

Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande, 5-*designs with three intersection numbers*, J. Combin. Theory Ser. A **69** (1995), no. 1, 36–50.

Dizajni stupnja $d = 3$

Dizajnima stupnja $d = 3$ snaga je ograničena s $t \leq 6$.

Presječne brojeve označavamo $x < y < z$.

$t = 6 \rightsquigarrow$ **Ne postoje**

C. Peterson, *On tight 6-designs*, Osaka J. Math. **14** (1977), 417–435.

$t = 5 \rightsquigarrow$ **Hipoteza:** jedini primjer je Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$ s presječnim brojevima $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$ i njegov komplement.

Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande, 5-*designs with three intersection numbers*, J. Combin. Theory Ser. A **69** (1995), no. 1, 36–50.

Analogija s $d = 2$, $t = 4 \ldots$

Dizajni stupnja $d = 3$

Dizajnima stupnja $d = 3$ snaga je ograničena s $t \leq 6$.

Presječne brojeve označavamo $x < y < z$.

$t = 6 \rightsquigarrow$ **Ne postoje**

C. Peterson, *On tight 6-designs*, Osaka J. Math. **14** (1977), 417–435.

$t = 5 \rightsquigarrow$ **Hipoteza:** jedini primjer je Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$ s presječnim brojevima $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$ i njegov komplement.

Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande, 5-*designs with three intersection numbers*, J. Combin. Theory Ser. A **69** (1995), no. 1, 36–50.

Analogija s $d = 2$, $t = 4 \ldots$

$t = 4$:

V. Krčadinac, R. Vlahović Kruc, *Schematic 4-designs*, preprint, 2022.

Dizajni stupnja $d = 3$

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Dizajni stupnja $d = 3$

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Uvjet teorema je ispunjen za $d = t = 2$, a posljedica je da su blokovni grafovi kvazisimetričnih dizajna jako regularni.

Dizajni stupnja $d = 3$

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Uvjet teorema je ispunjen za $d = t = 2$, a posljedica je da su blokovni grafovi kvazisimetričnih dizajna jako regularni.

Za $d = 3$ i $t = 4$ to znači... [analogija s kvazisimetričnim dizajnima]

Neka su $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ grafovi kojima su vrhovi blokovi dizajna. Vrhovi $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ su susjedni u grafu Γ_i ako se sijeku u k, x, y ili z točaka (redom za $i = 0, 1, 2, 3$).

Dizajni stupnja $d = 3$

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Uvjet teorema je ispunjen za $d = t = 2$, a posljedica je da su blokovni grafovi kvazisimetričnih dizajna jako regularni.

Za $d = 3$ i $t = 4$ to znači... [analogija s kvazisimetričnim dizajnima]

Neka su $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ grafovi kojima su vrhovi blokovi dizajna. Vrhovi $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ su susjedni u grafu Γ_i ako se sijeku u k, x, y ili z točaka (redom za $i = 0, 1, 2, 3$).

Za svaki brid $\{B_1, B_2\}$ u G_ℓ, broj vrhova B_3 takvih da je $\{B_1, B_3\}$ brid u G_i, a $\{B_2, B_3\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Dizajni stupnja $d = 3$

V. Krčadinac, R. Vlahović Kruc, *Schematic 4-designs*, preprint, 2022.

Dizajni stupnja $d = 3$

V. Krčadinac, R. Vlahović Kruc, *Schematic 4-designs*, preprint, 2022.

Izrazili smo svojstvene vrijednosti asocijacijske sheme preko parametara dizajna v, k, λ, x, y, z. Iz toga smo izračunali presječne brojeve i druge parametre sheme.

Dizajni stupnja $d = 3$

V. Krčadinac, R. Vlahović Kruc, *Schematic 4-designs*, preprint, 2022.

Izrazili smo svojstvene vrijednosti asocijacijske sheme preko parametara dizajna v, k, λ, x, y, z. Iz toga smo izračunali presječne brojeve i druge parametre sheme.

$\rightsquigarrow$ Nužni uvjeti za postojanje shematskog 4-dizajna

Dizajni stupnja $d = 3$

V. Krčadinac, R. Vlahović Kruc, *Schematic 4-designs*, preprint, 2022.

Izrazili smo svojstvene vrijednosti asocijacijske sheme preko parametara dizajna v, k, λ, x, y, z. Iz toga smo izračunali presječne brojeve i druge parametre sheme.

$\rightsquigarrow$ Nužni uvjeti za postojanje shematskog 4-dizajna

$\rightsquigarrow$ Tablica dopustivih parametara za $v \leq 1000$

Dizajni stupnja $d = 3$

V. Krčadinac, R. Vlahović Kruc, *Schematic 4-designs*, preprint, 2022.

Izrazili smo svojstvene vrijednosti asocijacijske sheme preko parametara dizajna v, k, λ, x, y, z. Iz toga smo izračunali presječne brojeve i druge parametre sheme.

$\rightsquigarrow$ Nužni uvjeti za postojanje shematskog 4-dizajna

$\rightsquigarrow$ Tablica dopustivih parametara za $v \leq 1000$

$\rightsquigarrow$ Beskonačna serija dopustivih parametara

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	$\exists$
1	11	5	1	1	2	3	
2	23	8	4	0	2	4	
3	23	11	48	3	5	7	
4	24	8	5	0	2	4	
5	47	11	8	1	3	5	
6	71	35	264	14	17	20	
7	199	99	2328	44	49	54	
8	391	195	9264	90	97	104	
9	647	323	25680	152	161	170	
10	659	329	390874	153	164	175	
11	967	483	57720	230	241	252	

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	$\exists$
1	11	5	1	1	2	3	✓
2	23	8	4	0	2	4	✓
3	23	11	48	3	5	7	✓
4	24	8	5	0	2	4	✓
5	47	11	8	1	3	5	✓
6	71	35	264	14	17	20	?
7	199	99	2328	44	49	54	?
8	391	195	9264	90	97	104	?
9	647	323	25680	152	161	170	?
10	659	329	390874	153	164	175	?
11	967	483	57720	230	241	252	?

Povezani s "quadratic residue codes"

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	$\exists$
1	11	5	1	1	2	3	✓
2	23	8	4	0	2	4	✓
3	23	11	48	3	5	7	✓
4	24	8	5	0	2	4	✓
5	47	11	8	1	3	5	✓
6	71	35	264	14	17	20	?
7	199	99	2328	44	49	54	?
8	391	195	9264	90	97	104	?
9	647	323	25680	152	161	170	?
10	659	329	390874	153	164	175	?
11	967	483	57720	230	241	252	?

Povezani s "quadratic residue codes"

Dizajni stupnja $d = 3$

Beskonačna serija dopustivih parametara:

$$\begin{aligned} v &= 8n^2 - 1 \\ k &= 4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1) \\ \lambda &= 4n^4 - 7n^2 + 3 = (n-1)(n+1)(4n^2-3) \\ x &= 2n^2 - n - 1 = (n-1)(2n+1) \\ y &= 2n^2 - 1 \\ z &= 2n^2 + n - 1 = (n+1)(2n-1) \end{aligned} \qquad n \geq 3 \text{ neparan}$$

Dizajni stupnja $d = 3$

Beskonačna serija dopustivih parametara:

$$\begin{aligned} v &= 8n^2 - 1 \\ k &= 4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1) \\ \lambda &= 4n^4 - 7n^2 + 3 = (n-1)(n+1)(4n^2-3) \\ x &= 2n^2 - n - 1 = (n-1)(2n+1) \\ y &= 2n^2 - 1 \\ z &= 2n^2 + n - 1 = (n+1)(2n-1) \end{aligned} \qquad n \geq 3 \text{ neparan}$$

$$p^3_{33} = \tfrac{1}{2}(n+1)(2n+3)(4n^2-2n-1)$$

Dizajni stupnja $d = 3$

Beskonačna serija dopustivih parametara:

$$\begin{aligned} v &= 8n^2 - 1 \\ k &= 4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1) \\ \lambda &= 4n^4 - 7n^2 + 3 = (n-1)(n+1)(4n^2-3) \\ x &= 2n^2 - n - 1 = (n-1)(2n+1) \\ y &= 2n^2 - 1 \\ z &= 2n^2 + n - 1 = (n+1)(2n-1) \end{aligned} \qquad n \geq 3 \text{ neparan}$$

$$p^3_{33} = \tfrac{1}{2}(n+1)(2n+3)(4n^2-2n-1)$$

Analogija s Cameronovim teoremom o proširenju simetričnih dizajna?

Dizajni stupnja $d = 3$

Iduću korak: dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$.

Dizajni stupnja $d = 3$

Iduću korak: dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$.

Uvjet Cameron-Delsarteova teorema **ne vrijedi** i blokovni grafovi ne moraju tvoriti asocijacijsku shemu, ali ipak možemo izvesti dodatne nužne uvjete za postojanje takvih dizajna.

Dizajni stupnja $d = 3$

Iduću korak: dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$.

Uvjet Cameron-Delsarteova teorema **ne vrijedi** i blokovni grafovi ne moraju tvoriti asocijacijsku shemu, ali ipak možemo izvesti dodatne nužne uvjete za postojanje takvih dizajna.

Neka je B_0 fiksni blok. Označimo s n_1, n_2, n_3 redom broj blokova koji ga sijeku u x, y, z točaka. Ti brojevi zadovoljavaju:

$$n_1 + n_2 + n_3 = b - 1$$
$$x\, n_1 + y\, n_2 + z\, n_3 = k(r - 1)$$
$$\binom{x}{2} n_1 + \binom{y}{2} n_2 + \binom{z}{2} n_3 = \binom{k}{2}(\lambda_2 - 1)$$

Dizajni stupnja $d = 3$

Iduću korak: dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$.

Uvjet Cameron-Delsarteova teorema **ne vrijedi** i blokovni grafovi ne moraju tvoriti asocijacijsku shemu, ali ipak možemo izvesti dodatne nužne uvjete za postojanje takvih dizajna.

Neka je B_0 fiksni blok. Označimo s n_1, n_2, n_3 redom broj blokova koji ga sijeku u x, y, z točaka. Ti brojevi zadovoljavaju:

$$n_1 + n_2 + n_3 = b - 1$$
$$x\, n_1 + y\, n_2 + z\, n_3 = k(r-1)$$
$$\binom{x}{2} n_1 + \binom{y}{2} n_2 + \binom{z}{2} n_3 = \binom{k}{2}(\lambda_2 - 1)$$

Matrica sustava $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ \binom{x}{2} & \binom{y}{2} & \binom{z}{2} \end{bmatrix}$ ima det. $\frac{1}{2}(y-x)(z-x)(z-y) \neq 0$,

pa sustav ima jedinstveno rješenje.

Dizajni stupnja $d = 3$

To znači da n_1, n_2, n_3 ovise samo o parametrima i presječnim brojevima, a ne o izboru bloka B_0:

$$n_1 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(y+z-r(y+z-1)-\lambda_2)k+(b-1)yz}{(y-x)(z-x)}$$

$$n_2 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(x+z-r(x+z-1)-\lambda_2)k+(b-1)xz}{(x-y)(z-y)}$$

$$n_3 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(x+y-r(x+y-1)-\lambda_2)k+(b-1)xy}{(x-z)(y-z)}$$

Dizajni stupnja $d = 3$

To znači da n_1, n_2, n_3 ovise samo o parametrima i presječnim brojevima, a ne o izboru bloka B_0:

$$n_1 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(y+z-r(y+z-1)-\lambda_2)k+(b-1)yz}{(y-x)(z-x)}$$

$$n_2 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(x+z-r(x+z-1)-\lambda_2)k+(b-1)xz}{(x-y)(z-y)}$$

$$n_3 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(x+y-r(x+y-1)-\lambda_2)k+(b-1)xy}{(x-z)(y-z)}$$

Štoviše, imamo 3-dizajn, pa n_1, n_2, n_3 zadovoljavaju još jednu jednadžbu:

$$\binom{x}{3}n_1 + \binom{y}{3}n_2 + \binom{z}{3}n_3 = \binom{k}{3}(\lambda_3 - 1)$$

Dizajni stupnja $d = 3$

To znači da n_1, n_2, n_3 ovise samo o parametrima i presječnim brojevima, a ne o izboru bloka B_0:

$$n_1 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(y+z-r(y+z-1)-\lambda_2)k+(b-1)yz}{(y-x)(z-x)}$$

$$n_2 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(x+z-r(x+z-1)-\lambda_2)k+(b-1)xz}{(x-y)(z-y)}$$

$$n_3 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(x+y-r(x+y-1)-\lambda_2)k+(b-1)xy}{(x-z)(y-z)}$$

Štoviše, imamo 3-dizajn, pa n_1, n_2, n_3 zadovoljavaju još jednu jednadžbu:

$$\binom{x}{3}n_1 + \binom{y}{3}n_2 + \binom{z}{3}n_3 = \binom{k}{3}(\lambda_3 - 1)$$

Zbog Ray-Chaudhuri i Wilsonove nejednakosti $b \leq \binom{v}{d}$, ako ograničimo $v \leq 100$, imamo konačno mnogo dopustivih parametara 3-dizajna. Za sve moguće $0 \leq x < y < z < k$ provjerimo jesu li n_1, n_2, n_3 prirodni brojevi i zadovoljavaju li dodatnu jednadžbu. Tako dobijemo **308** parametara:

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	n_1	n_2	n_3	$\exists$	Shematski
1	10	4	1	0	1	2	3	8	18		
2	10	5	3	1	2	3	5	10	20		
3	11	5	2	0	2	3	2	20	10		
4	11	5	4	1	2	3	15	20	30		
5	14	4	1	0	1	2	20	40	30		
6	16	4	1	0	1	2	39	64	36		
7	16	6	2	0	2	3	5	30	20		
8	16	6	4	1	2	3	36	15	60		
9	16	8	45	0	3	5	1	224	224		
10	17	5	1	0	1	2	12	15	40		
11	17	8	28	2	4	6	69	243	27		
12	18	6	10	0	2	4	47	315	45		
13	18	8	21	2	4	6	85	205	15		
14	18	9	14	3	5	6	42	81	12		
							$\vdots$				

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	n_1	n_2	n_3	$\exists$	Shematski
1	10	4	1	0	1	2	3	8	18	✓	-
2	10	5	3	1	2	3	5	10	20	✓	✓
3	11	5	2	0	2	3	2	20	10	✗	✗
4	11	5	4	1	2	3	15	20	30	✓	✓
5	14	4	1	0	1	2	20	40	30	✓	-
6	16	4	1	0	1	2	39	64	36	✓	✗
7	16	6	2	0	2	3	5	30	20	✗	✗
8	16	6	4	1	2	3	36	15	60		⋮
9	16	8	45	0	3	5	1	224	224		
10	17	5	1	0	1	2	12	15	40		
11	17	8	28	2	4	6	69	243	27		
12	18	6	10	0	2	4	47	315	45		
13	18	8	21	2	4	6	85	205	15		
14	18	9	14	3	5	6	42	81	12		
							⋮				

Dizajni stupnja $d = 3$

Analogija s kvazisimetričnim dizajnima:

Propozicija

Svaki Steinerov 3-dizajn ima presječne brojeve iz skupa $\{0, 1, 2\}$, tj. stupanj mu je $d \leq 3$.

Dizajni stupnja $d = 3$

Analogija s kvazisimetričnim dizajnima:

Propozicija

Svaki Steinerov 3-dizajn ima presječne brojeve iz skupa $\{0, 1, 2\}$, tj. stupanj mu je $d \leq 3$.

Steinerovi 2-dizajni: blokovi $\rightsquigarrow$ pravci

Steinerovi 3-dizajni: blokovi $\rightsquigarrow$ kružnice

Dizajni stupnja $d = 3$

Analogija s kvazisimetričnim dizajnima:

Propozicija

Svaki Steinerov 3-dizajn ima presječne brojeve iz skupa $\{0, 1, 2\}$, tj. stupanj mu je $d \leq 3$.

Steinerovi 2-dizajni: blokovi $\rightsquigarrow$ pravci

Steinerovi 3-dizajni: blokovi $\rightsquigarrow$ kružnice

Od 308 parametara iz tablice, **52** su parametri Steinerovih 3-dizajna. Oni su svi dopustivi, tj. ne možemo naći dodatne nužne uvjete zbog stupnja $d = 3$.

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	b	r	λ_2	$\exists$	Shematski
1	10	4	1	30	12	4		
2	14	4	1	91	26	6		
3	16	4	1	140	35	7		
4	17	5	1	68	20	5		
5	20	4	1	285	57	9		
6	22	4	1	385	70	10		
7	26	4	1	650	100	12		
8	26	5	1	260	50	8		
9	26	6	1	130	30	6		
10	28	4	1	819	117	13		
11	32	4	1	1240	155	15		
12	34	4	1	1496	176	16		
13	37	7	1	222	42	7		
14	38	4	1	2109	222	18		
					$\vdots$			

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	b	r	λ_2	$\exists$	Shematski
1	10	4	1	30	12	4	≥ 1	✗
2	14	4	1	91	26	6	≥ 4	✗
3	16	4	1	140	35	7	≥ 45	✗
4	17	5	1	68	20	5	≥ 1	✓
5	20	4	1	285	57	9	≥ 36	✗
6	22	4	1	385	70	10	≥ 7	✗
7	26	4	1	650	100	12	≥ 19	✗
8	26	5	1	260	50	8	≥ 1	✗
9	26	6	1	130	30	6	≥ 1	✗
10	28	4	1	819	117	13	≥ 2	✗
11	32	4	1	1240	155	15	≥ 1	✗
12	34	4	1	1496	176	16	≥ 51	✗
13	37	7	1	222	42	7	?	
14	38	4	1	2109	222	18	≥ 6	✗
					$\vdots$			

Dizajni stupnja $d = 3$

Što znamo o egzistenciji Steinerovih 3-dizajna?

C. J. Colbourn, R. Mathon, *Steiner systems*, u: *The Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition* (urednici C.J. Colbourn i J.H. Dinitz), CRC Press, 2007., str. 110–124.

Dizajni stupnja $d = 3$

Što znamo o egzistenciji Steinerovih 3-dizajna?

C. J. Colbourn, R. Mathon, *Steiner systems*, u: *The Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition* (urednici C.J. Colbourn i J.H. Dinitz), CRC Press, 2007., str. 110–124.

Analogija:

Teorem (T. P. Kirkman, 1847.)

Steinerov sustav trojki 2-$(v, 3, 1)$ postoji ako i samo ako je

$$v \equiv 1,\ 3 \pmod 6, \quad v \geq 7$$

Teorem

Steinerov sustav četvorki 3-$(v, 4, 1)$ postoji ako i samo ako je

$$v \equiv 2,\ 4 \pmod 6, \quad v \geq 10$$

Dizajni stupnja $d = 3$

A. Hartman, K. Phelps, *Steiner quadruple systems*, u: *Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys* (urednici J. H. Dinitz i D. R. Stinson), Wiley, 1992., str. 205–240.

Dizajni stupnja $d = 3$

A. Hartman, K. Phelps, *Steiner quadruple systems*, u: *Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys* (urednici J. H. Dinitz i D. R. Stinson), Wiley, 1992., str. 205–240.

Za Steinerove 2-$(v, 4, 1)$ i 2-$(v, 5, 1)$ dizajne nužni uvjeti također su dovoljni za egzistenciju.

H. Hanani, *The existence and construction of balanced incomplete block designs*, Ann. Math. Statist. **32** (1961), 361–386.

Dizajni stupnja $d = 3$

A. Hartman, K. Phelps, *Steiner quadruple systems*, u: *Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys* (urednici J. H. Dinitz i D. R. Stinson), Wiley, 1992., str. 205–240.

Za Steinerove 2-$(v, 4, 1)$ i 2-$(v, 5, 1)$ dizajne nužni uvjeti također su dovoljni za egzistenciju.

H. Hanani, *The existence and construction of balanced incomplete block designs*, Ann. Math. Statist. **32** (1961), 361–386.

Nužan uvjet za egzistenciju 3-$(v, 5, 1)$ dizajna:

$$v \equiv 2,\ 5,\ 17,\ 26,\ 41,\ 50 \pmod{60}, \quad v \geq 17$$

Dizajni stupnja $d = 3$

A. Hartman, K. Phelps, *Steiner quadruple systems*, u: *Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys* (urednici J. H. Dinitz i D. R. Stinson), Wiley, 1992., str. 205–240.

Za Steinerove 2-$(v, 4, 1)$ i 2-$(v, 5, 1)$ dizajne nužni uvjeti također su dovoljni za egzistenciju.

H. Hanani, *The existence and construction of balanced incomplete block designs*, Ann. Math. Statist. **32** (1961), 361–386.

Nužan uvjet za egzistenciju 3-$(v, 5, 1)$ dizajna:

$$v \equiv 2,\ 5,\ 17,\ 26,\ 41,\ 50 \pmod{60}, \quad v \geq 17$$

Dovoljnost?

Nisam uspio konstruirati 3-$(41, 5, 1)$ dizajne.

Dizajni stupnja $d = 3$

E. Witt, *Über Steinersche Systeme*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1937), 265–275.

Teorem

Za svaku prim potenciju q i za svaki $n \geq 2$ postoji 3-$(q^n + 1, q + 1, 1)$ dizajn s grupom automorfizama $PGL(2, q^n)$.

Dizajni stupnja $d = 3$

E. Witt, *Über Steinersche Systeme*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1937), 265–275.

Teorem

Za svaku prim potenciju q i za svaki $n \geq 2$ postoji 3-$(q^n + 1, q + 1, 1)$ dizajn s grupom automorfizama $PGL(2, q^n)$.

U literaturi se ova familija dizajna naziva spherical ili circle geometries. Konstrukcija se zasniva na tome da $PGL(2, q^n)$ djeluje trostruko tranzitivno na točke projektivnog pravca $PG(1, q^n)$.

Dizajni stupnja $d = 3$

E. Witt, *Über Steinersche Systeme*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1937), 265–275.

Teorem

Za svaku prim potenciju q i za svaki $n \geq 2$ postoji 3-$(q^n + 1, q + 1, 1)$ dizajn s grupom automorfizama $PGL(2, q^n)$.

U literaturi se ova familija dizajna naziva spherical ili circle geometries. Konstrukcija se zasniva na tome da $PGL(2, q^n)$ djeluje trostruko tranzitivno na točke projektivnog pravca $PG(1, q^n)$.

Specijalni slučaj: 3-$(q^2 + 1, q + 1, 1)$ su inverzijske ili Möbiusove ravnine.

Dizajni stupnja $d = 3$

E. Witt, *Über Steinersche Systeme*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1937), 265–275.

Teorem

Za svaku prim potenciju q i za svaki $n \geq 2$ postoji 3-$(q^n + 1, q + 1, 1)$ dizajn s grupom automorfizama $PGL(2, q^n)$.

U literaturi se ova familija dizajna naziva spherical ili circle geometries. Konstrukcija se zasniva na tome da $PGL(2, q^n)$ djeluje trostruko tranzitivno na točke projektivnog pravca $PG(1, q^n)$.

Specijalni slučaj: 3-$(q^2 + 1, q + 1, 1)$ su inverzijske ili Möbiusove ravnine.

Geometrijska konstrukcija: uzmemo točke u $PG(3, q)$ na eliptičkoj kvadrici (ovoidu) i presjeke ovoida s ravninama.

Dizajni stupnja $d = 3$

Za parne q poznata je i neklasična familija inverzijskih ravnina na kojima djeluju Suzukijeve jednostavne grupe.

J. Tits, *Ovoïdes et groupes de Suzuki*, Arch. Math. **13** (1962), 187–198.

Dizajni stupnja $d = 3$

Za parne q poznata je i neklasična familija inverzijskih ravnina na kojima djeluju Suzukijeve jednostavne grupe.

J. Tits, *Ovoïdes et groupes de Suzuki*, Arch. Math. **13** (1962), 187–198.

Inverzijske ravnine parnog reda su važne jer su jedini poznati primjeri Steinerovih 3-dizajna koji su **shematski**!

$$3\text{-}(2^{2n}+1, 2^n+1, 1) \rightsquigarrow 3\text{-}(17,5,1),\ 3\text{-}(65,9,1),\ 3\text{-}(257,17,1)\ldots$$

Dizajni stupnja $d = 3$

Za parne q poznata je i neklasična familija inverzijskih ravnina na kojima djeluju Suzukijeve jednostavne grupe.

J. Tits, *Ovoïdes et groupes de Suzuki*, Arch. Math. **13** (1962), 187–198.

Inverzijske ravnine parnog reda su važne jer su jedini poznati primjeri Steinerovih 3-dizajna koji su **shematski**!

$$3\text{-}(2^{2n}+1, 2^n+1, 1) \rightsquigarrow 3\text{-}(17,5,1),\ 3\text{-}(65,9,1),\ 3\text{-}(257,17,1)\ldots$$

P. J. Cameron, *Two remarks on Steiner systems*, Geom. Dedicata **4** (1975), 403–418.

Teorem

Ako postoji shematski Steinerov $3\text{-}(v,k,1)$ dizajn, onda je

$$v \leq 2 + \tfrac{1}{2}\, k(k-1)(k-2).$$

Dizajni stupnja $d = 3$

Analogni rezultat za 3-dizajne stupnja $d = 3$ koji nisu Steinerovi?

Dizajni stupnja $d = 3$

Analogni rezultat za 3-dizajne stupnja $d = 3$ koji nisu Steinerovi?

U tablici za $v \leq 100$, od 308 parametara njih 52 su Steinerovi, a **256** imaju $\lambda > 1$. Od toga **74** imaju najmanji presječni broj $x = 0$.

Dizajni stupnja $d = 3$

Analogni rezultat za 3-dizajne stupnja $d = 3$ koji nisu Steinerovi?

U tablici za $v \leq 100$, od 308 parametara njih 52 su Steinerovi, a **256** imaju $\lambda > 1$. Od toga **74** imaju najmanji presječni broj $x = 0$.

Br.	v	k	λ	x	y	z	b	r	λ_2
1	11	5	2	0	2	3	33	15	6
2	16	6	2	0	2	3	56	21	7
3	16	8	45	0	3	5	450	225	105
4	18	6	10	0	2	4	408	136	40
5	20	10	16	0	4	6	152	76	36
6	21	6	4	0	2	5	266	76	19
7	22	7	2	0	2	3	88	28	8
8	22	8	12	0	2	4	330	120	40
9	22	10	12	0	4	6	154	70	30
					⋮				

Dizajni stupnja $d = 3$

Analogija s kvazisimetričnim dizajnima:

Propozicija

1. Svaki kvazisimetrični 3-dizajn s presječnim brojem $x = 0$ je proširenje simetričnog dizajna.
2. Ako je simetrični 2-(v, k, λ) dizajn proširiv, onda je njegovo proširenje kvazisimetrični 3-$(v + 1, k + 1, \lambda)$ dizajn s presječnim brojevima $x = 0$, $y = \lambda + 1$.

Propozicija

1. Svaki 3-dizajn stupnja $d = 3$ s presječnim brojem $x = 0$ je proširenje **kvazi** simetričnog 2-dizajna.

Dizajni stupnja $d = 3$

Analogija s kvazisimetričnim dizajnima:

Propozicija

1. Svaki kvazisimetrični 3-dizajn s presječnim brojem $x = 0$ je proširenje simetričnog dizajna.
2. Ako je simetrični 2-(v, k, λ) dizajn proširiv, onda je njegovo proširenje kvazisimetrični 3-$(v + 1, k + 1, \lambda)$ dizajn s presječnim brojevima $x = 0,\ y = \lambda + 1$.

Propozicija

1. Svaki 3-dizajn stupnja $d = 3$ s presječnim brojem $x = 0$ je proširenje **kvazi** simetričnog 2-dizajna.

$$3\text{-}(v, k, \lambda),\ 0,\ y,\ z \quad \rightsquigarrow \quad 2\text{-}(v - 1, k - 1, \lambda),\ y - 1,\ z - 1$$

Dizajni stupnja $d = 3$

U tablici imamo 74 parametara s $x = 0$ koji derivirani daju parametre kvazisimetričnog 2-dizajna. Među tako dobivenim parametrima kvazisimetričnih dizajna njih 48 **nisu dopustivi**!

Dizajni stupnja $d = 3$

U tablici imamo 74 parametara s $x = 0$ koji derivirani daju parametre kvazisimetričnog 2-dizajna. Među tako dobivenim parametrima kvazisimetričnih dizajna njih 48 **nisu dopustivi**!

Ostaje **26** dopustivih parametara. Za njih **8** derivirani dizajn odgovara rezidualu dvoravnine, a za **18** ima iznimne parametre.

Br.	v	k	λ	x	y	z	v'	k'	λ'	x'	y'	Q	$\exists$	Sh
1	11	5	2	0	2	3	10	4	2	1	2	3	0	-
2	16	6	2	0	2	3	15	5	2	1	2	0	-	-
3	22	7	2	0	2	3	21	6	2	1	2	0	-	-
4	37	9	2	0	2	3	36	8	2	1	2	0	-	-
5	46	10	2	0	2	3	45	9	2	1	2	16	?	
6	56	11	2	0	2	3	55	10	2	1	2	0	-	-
7	79	13	2	0	2	3	78	12	2	1	2	0	-	-
8	92	14	2	0	2	3	91	13	2	1	2	0	-	-

Dizajni stupnja $d = 3$

Dvoravnina: $2\text{-}(\binom{k}{2} + 1, k, 2)$

Parametri su dopustivi za svaki k, ako ne uzimamo u obzir BRC teorem.

Dizajni stupnja $d = 3$

Dvoravnina: $2\text{-}(\binom{k}{2} + 1, k, 2)$

Parametri su dopustivi za svaki k, ako ne uzimamo u obzir BRC teorem.

Rezidual dvoravnine: $2\text{-}(\binom{k-1}{2}, k-2, 2)$, $x = 1$, $y = 2$

Dizajni stupnja $d = 3$

Dvoravnina: $2\text{-}(\binom{k}{2} + 1, k, 2)$

Parametri su dopustivi za svaki k, ako ne uzimamo u obzir BRC teorem.

Rezidual dvoravnine: $2\text{-}(\binom{k-1}{2}, k-2, 2)$, $x = 1$, $y = 2$

Nužan uvjet za proširivost $t\text{-}(v, k, \lambda)$ dizajna s b blokova: $k + 1 \mid b(v + 1)$

Dizajni stupnja $d = 3$

Dvoravnina: $2\text{-}(\binom{k}{2} + 1, k, 2)$

Parametri su dopustivi za svaki k, ako ne uzimamo u obzir BRC teorem.

Rezidual dvoravnine: $2\text{-}(\binom{k-1}{2}, k-2, 2)$, $x = 1$, $y = 2$

Nužan uvjet za proširivost $t\text{-}(v, k, \lambda)$ dizajna s b blokova: $k + 1 \mid b(v + 1)$

U ovom slučaju svodi se na $4 \mid k(k(k-3) + 4)$, tj. $k \not\equiv 1 \pmod 4$.

Dizajni stupnja $d = 3$

Dvoravnina: $2\text{-}(\binom{k}{2} + 1, k, 2)$

Parametri su dopustivi za svaki k, ako ne uzimamo u obzir BRC teorem.

Rezidual dvoravnine: $2\text{-}(\binom{k-1}{2}, k-2, 2)$, $x = 1$, $y = 2$

Nužan uvjet za proširivost $t\text{-}(v, k, \lambda)$ dizajna s b blokova: $k + 1 \mid b(v + 1)$

U ovom slučaju svodi se na $4 \mid k(k(k-3) + 4)$, tj. $k \not\equiv 1 \pmod 4$.

To eliminira dvoravnine $2\text{-}(37, 9, 2)$ i $2\text{-}(79, 13, 2)$, koje postoje!

Dizajni stupnja $d = 3$

Dvoravnina: $2\text{-}(\binom{k}{2} + 1, k, 2)$

Parametri su dopustivi za svaki k, ako ne uzimamo u obzir BRC teorem.

Rezidual dvoravnine: $2\text{-}(\binom{k-1}{2}, k-2, 2)$, $x = 1$, $y = 2$

Nužan uvjet za proširivost $t\text{-}(v, k, \lambda)$ dizajna s b blokova: $k + 1 \mid b(v + 1)$

U ovom slučaju svodi se na $4 \mid k(k(k-3) + 4)$, tj. $k \not\equiv 1 \pmod 4$.

To eliminira dvoravnine $2\text{-}(37, 9, 2)$ i $2\text{-}(79, 13, 2)$, koje postoje!

Proširenje reziduala dvoravnine:

$3\text{-}(\binom{k-1}{2} + 1, k-1, 2)$, $x = 0$, $y = 2$, $z = 3$, $k \not\equiv 1 \pmod 4$

Dizajni stupnja $d = 3$

Dvoravnina: $2\text{-}(\binom{k}{2} + 1, k, 2)$

Parametri su dopustivi za svaki k, ako ne uzimamo u obzir BRC teorem.

Rezidual dvoravnine: $2\text{-}(\binom{k-1}{2}, k-2, 2)$, $x = 1$, $y = 2$

Nužan uvjet za proširivost $t\text{-}(v, k, \lambda)$ dizajna s b blokova: $k + 1 \mid b(v + 1)$

U ovom slučaju svodi se na $4 \mid k(k(k-3) + 4)$, tj. $k \not\equiv 1 \pmod 4$.

To eliminira dvoravnine $2\text{-}(37, 9, 2)$ i $2\text{-}(79, 13, 2)$, koje postoje!

Proširenje reziduala dvoravnine:

$3\text{-}(\binom{k-1}{2} + 1, k-1, 2)$, $x = 0$, $y = 2$, $z = 3$, $k \not\equiv 1 \pmod 4$

Ne znam postoje li $3\text{-}(46, 10, 2)$ dizajni (slučaj $k = 11$).

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	v'	k'	λ'	x'	y'	Q	$\exists$	Sh
1	20	10	16	0	4	6	19	9	16	3	5	0	-	-
2	22	8	12	0	2	4	21	7	12	1	3	1	1	✗
3	22	10	12	0	4	6	21	9	12	3	5	0	-	-
4	23	8	16	0	2	4	22	7	16	1	3	1	1	✓
5	24	8	21	0	2	4	23	7	21	1	3	1	1	✓
6	32	8	7	0	2	4	31	7	7	1	3	5	≥ 2	✗
7	42	10	9	0	2	4	41	9	9	1	3	?	?	
8	42	21	57	0	9	12	41	20	57	8	11	?	?	
9	46	10	8	0	2	4	45	9	8	1	3	1	1	✗
10	50	10	6	0	2	4	49	9	6	1	3	≥ 49	?	
11	57	21	19	0	6	9	56	20	19	5	8	?	?	
12	57	22	24	0	7	10	56	21	24	6	9	0	-	-
13	58	16	30	0	4	7	57	15	30	3	6	?	?	
14	64	16	35	0	4	8	63	15	35	3	7	≥ 1	≥ 1	✗
15	72	15	39	0	3	6	71	14	39	2	5	?	?	

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	v'	k'	λ'	x'	y'	Q	$\exists$	Sh
1	20	10	16	0	4	6	19	9	16	3	5	0	-	-
2	22	8	12	0	2	4	21	7	12	1	3	1	1	✗
3	22	10	12	0	4	6	21	9	12	3	5	0	-	-
4	23	8	16	0	2	4	22	7	16	1	3	1	1	✓
5	24	8	21	0	2	4	23	7	21	1	3	1	1	✓
6	32	8	7	0	2	4	31	7	7	1	3	5	≥ 2	✗
7	42	10	9	0	2	4	41	9	9	1	3	?	?	
8	42	21	57	0	9	12	41	20	57	8	11	?	?	
9	46	10	8	0	2	4	45	9	8	1	3	1	1	✗
10	50	10	6	0	2	4	49	9	6	1	3	≥ 49	?	
11	57	21	19	0	6	9	56	20	19	5	8	?	?	
12	57	22	24	0	7	10	56	21	24	6	9	0	-	-
13	58	16	30	0	4	7	57	15	30	3	6	?	?	
14	64	16	35	0	4	8	63	15	35	3	7	≥ 1	≥ 1	✗
15	72	15	39	0	3	6	71	14	39	2	5	?	?	

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	v'	k'	λ'	x'	y'	Q	$\exists$	Sh
1	20	10	16	0	4	6	19	9	16	3	5	0	-	-
2	22	8	12	0	2	4	21	7	12	1	3	1	1	✗
3	22	10	12	0	4	6	21	9	12	3	5	0	-	-
4	23	8	16	0	2	4	22	7	16	1	3	1	1	✓
5	24	8	21	0	2	4	23	7	21	1	3	1	1	✓
6	32	8	7	0	2	4	31	7	7	1	3	5	≥ 2	✗
7	42	10	9	0	2	4	41	9	9	1	3	?	?	
8	42	21	57	0	9	12	41	20	57	8	11	?	?	
9	46	10	8	0	2	4	45	9	8	1	3	1	1	✗
10	50	10	6	0	2	4	49	9	6	1	3	≥ 49	?	
11	57	21	19	0	6	9	56	20	19	5	8	?	?	
12	57	22	24	0	7	10	56	21	24	6	9	0	-	-
13	58	16	30	0	4	7	57	15	30	3	6	?	?	
14	64	16	35	0	4	8	63	15	35	3	7	≥ 1	≥ 1	✗
15	72	15	39	0	3	6	71	14	39	2	5	?	?	

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	v'	k'	λ'	x'	y'	Q	$\exists$	Sh
16	72	36	136	0	16	20	71	35	136	15	19	?	?	
17	80	20	57	0	5	10	79	19	57	4	9	?	?	
18	86	16	4	0	2	4	85	15	4	1	3	?	?	

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	v'	k'	λ'	x'	y'	Q	$\exists$	Sh
16	72	36	136	0	16	20	71	35	136	15	19	?	?	
17	80	20	57	0	5	10	79	19	57	4	9	?	?	
18	86	16	4	0	2	4	85	15	4	1	3	?	?	

Beskonačna familija: $AG_{n-1}(n+1, q)$

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	v'	k'	λ'	x'	y'	Q	$\exists$	Sh
16	72	36	136	0	16	20	71	35	136	15	19	?	?	
17	80	20	57	0	5	10	79	19	57	4	9	?	?	
18	86	16	4	0	2	4	85	15	4	1	3	?	?	

Beskonačna familija: $AG_{n-1}(n+1, q)$

Za bilo koju prim potenciju q, to je 2-dizajn stupnja $d = 3$:

$$2\text{-}\left(q^{n+1}, q^{n-1}, \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix}_q\right), \ x = 0, \ y = q^{n-3}, \ z = q^{n-2}$$

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	v'	k'	λ'	x'	y'	Q	$\exists$	Sh
16	72	36	136	0	16	20	71	35	136	15	19	?	?	
17	80	20	57	0	5	10	79	19	57	4	9	?	?	
18	86	16	4	0	2	4	85	15	4	1	3	?	?	

Beskonačna familija: $AG_{n-1}(n+1, q)$

Za bilo koju prim potenciju q, to je 2-dizajn stupnja $d = 3$:

$$2\text{-}\left(q^{n+1}, q^{n-1}, \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix}_q\right), \quad x = 0, \; y = q^{n-3}, \; z = q^{n-2}$$

Za $q = 2$ svake tri točke su nekolinearne! Zato je to 3-dizajn:

$$3\text{-}\left(2^{n+1}, 2^{n-1}, \begin{bmatrix} n-1 \\ n-3 \end{bmatrix}_2\right), \quad x = 0, \; y = 2^{n-3}, \; z = 2^{n-2}$$

Dizajni stupnja $d = 3$

Derivirani dizajn od $AG_{n-1}(n+1,2)$ je kvazisimetrični $PG_{n-2}(n,2)$.

$$\mathrm{der}_{P_0} AG_{n-1}(n+1,2) = PG_{n-2}(n,2)$$

$$\mathrm{res}_{H_0} PG(n,q) = AG(n,q)$$

Dizajni stupnja $d = 3$

Derivirani dizajn od $AG_{n-1}(n+1,2)$ je kvazisimetrični $PG_{n-2}(n,2)$.

$$\mathrm{der}_{P_0} AG_{n-1}(n+1,2) = PG_{n-2}(n,2)$$

$$\mathrm{res}_{H_0} PG(n,q) = AG(n,q)$$

Nestandardni primjeri?

$n = 4$: Točno **5** kvazisimetričnih dizajna s parametrima kao $PG_2(4,2)$.

Barem **2** 3-dizajna stupnja 3 s parametrima kao $AG_3(5,2)$.

Dizajni stupnja $d = 3$

Derivirani dizajn od $AG_{n-1}(n+1,2)$ je kvazisimetrični $PG_{n-2}(n,2)$.

$$\mathrm{der}_{P_0} AG_{n-1}(n+1,2) = PG_{n-2}(n,2)$$

$$\mathrm{res}_{H_0} PG(n,q) = AG(n,q)$$

Nestandardni primjeri?

$n = 4$: Točno **5** kvazisimetričnih dizajna s parametrima kao $PG_2(4,2)$.

Barem **2** 3-dizajna stupnja 3 s parametrima kao $AG_3(5,2)$.

$n = 5$: Poznati su samo klasični dizajni $PG_3(5,2)$ i $AG_4(6,2)$.

Dizajni stupnja $d = 3$

Derivirani dizajn od $AG_{n-1}(n+1,2)$ je kvazisimetrični $PG_{n-2}(n,2)$.

$$\mathrm{der}_{P_0} AG_{n-1}(n+1,2) = PG_{n-2}(n,2)$$

$$\mathrm{res}_{H_0} PG(n,q) = AG(n,q)$$

Nestandardni primjeri?

$n = 4$: Točno **5** kvazisimetričnih dizajna s parametrima kao $PG_2(4,2)$.

Barem **2** 3-dizajna stupnja 3 s parametrima kao $AG_3(5,2)$.

$n = 5$: Poznati su samo klasični dizajni $PG_3(5,2)$ i $AG_4(6,2)$.

Na kraju ostaje **182** parametara 3-dizajna stupnja 3 s najmanjim presječnim brojem $x > 0$. Među njima **70** ima "simetrične" presječne brojeve x, y, z, a **112** ima "nesimetrične" presječne brojeve.

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	b	r	λ_2	$\exists$	Nap.	Sh.
1	10	5	3	1	2	3	36	18	8			
2	11	5	4	1	2	3	66	30	12			
3	16	6	4	1	2	3	112	42	14			
4	17	8	28	2	4	6	340	160	70			
5	18	8	21	2	4	6	306	136	56			
6	18	9	56	3	5	7	544	272	128			
7	22	8	30	1	3	5	825	300	100			
8	22	10	48	2	4	6	616	280	120			
9	22	11	72	3	5	7	672	336	160			
10	23	11	120	3	5	7	1288	616	280			
11	25	9	42	1	3	5	1150	414	138			
12	29	8	20	1	3	5	1305	360	90			
13	30	14	39	4	6	8	435	203	91			
14	30	15	52	5	7	9	464	232	112			
15	31	15	91	5	7	9	899	435	203			
16	32	12	22	2	4	6	496	186	66			

$\vdots$

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	b	r	λ_2	$\exists$	Nap.	Sh.
1	10	5	3	1	2	3	36	18	8	≥ 1	res(#2)	✓
2	11	5	4	1	2	3	66	30	12	≥ 1	4-(11, 5, 1)	✓
3	16	6	4	1	2	3	112	42	14	≥ 1		✓
4	17	8	28	2	4	6	340	160	70	dp		
5	18	8	21	2	4	6	306	136	56	dp		
6	18	9	56	3	5	7	544	272	128	dp		
7	22	8	30	1	3	5	825	300	100	dp		
8	22	10	48	2	4	6	616	280	120	≥ 1	der(#10)	✗
9	22	11	72	3	5	7	672	336	160	≥ 1	res(#10)	✗
10	23	11	120	3	5	7	1288	616	280	≥ 1	4-(23, 11, 48)	✓
11	25	9	42	1	3	5	1150	414	138	dp		
12	29	8	20	1	3	5	1305	360	90	?		
13	30	14	39	4	6	8	435	203	91	?		
14	30	15	52	5	7	9	464	232	112	?		
15	31	15	91	5	7	9	899	435	203	dp		
16	32	12	22	2	4	6	496	186	66	≥ 3		✗

$\vdots$

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	b	r	λ_2	$\exists$	Nap.	Sh.
1	10	5	3	1	2	3	36	18	8	≥ 1	res(#2)	✓
2	11	5	4	1	2	3	66	30	12	≥ 1	4-(11, 5, 1)	✓
3	16	6	4	1	2	3	112	42	14	≥ 1		✓
4	17	8	28	2	4	6	340	160	70	dp		
5	18	8	21	2	4	6	306	136	56	dp		
6	18	9	56	3	5	7	544	272	128	dp		
7	22	8	30	1	3	5	825	300	100	dp		
8	22	10	48	2	4	6	616	280	120	≥ 1	der(#10)	✗
9	22	11	72	3	5	7	672	336	160	≥ 1	res(#10)	✗
10	23	11	120	3	5	7	1288	616	280	≥ 1	4-(23, 11, 48)	✓
11	25	9	42	1	3	5	1150	414	138	dp		
12	29	8	20	1	3	5	1305	360	90	?		
13	30	14	39	4	6	8	435	203	91	?		
14	30	15	52	5	7	9	464	232	112	?		
15	31	15	91	5	7	9	899	435	203	dp		
16	32	12	22	2	4	6	496	186	66	≥ 3		✗

⋮

Dizajni stupnja $d = 3$

Br.	v	k	λ	x	y	z	b	r	λ_2
1	18	9	14	3	5	6	136	68	32
2	18	9	35	1	4	6	340	170	80
3	19	9	56	3	5	6	646	306	136
4	20	8	42	2	4	5	855	342	126
5	20	10	28	3	4	6	266	133	63
6	22	8	18	1	2	4	495	180	60
7	22	10	6	2	4	5	77	35	15
8	22	10	18	1	4	6	231	105	45
9	23	8	56	1	2	4	1771	616	196
10	23	9	12	2	4	5	253	99	36
11	26	10	9	2	4	5	195	75	27
12	26	10	21	2	3	5	455	175	63
13	26	11	132	3	4	6	2080	880	352
14	30	9	30	1	2	4	1450	435	120
15	30	10	54	2	4	5	1827	609	189
16	30	14	117	5	7	8	1305	609	273

$\vdots$

Kraj

Hvala na pažnji!