

Računalne klasifikacije ovoida u projektivnim geometrijama parnog reda (2. dio)

Filip Martinović

29. siječnja 2024.

Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva



UNIVERSITY OF ZAGREB
Faculty of Electrical
Engineering and
Computing



HRZZ

Hrvatska zaklada
za znanost

rad podržan HRZZ projektom IP-2020-02-9752

Ponavljjanje pojmova iz prethodnog seminara

- konačan projektivni prostor $PG(n, q)$
- projektivna ravnina i projektivni prostor parnog reda
- ovoid u $PG(3, q)$
- oval u $PG(2, q)$
- hiperoval, nukleus

Klasifikacija ovoida u projektivnom prostoru parnog reda?

Teorem (Flegora, 1962.)

Ovoidi u $PG(3, 4)$ su eliptične kvadrike.

Ovoidi u $PG(3, 8)$ su eliptične kvadrike i Titsovi ovoidi.

Teorem (O'Keefe, Penttila, 1990., 1992.)

Ovoidi u $PG(3, 16)$ su eliptične kvadrike.

Teorem (O'Keefe, Penttila, Royle, 1994.)

Ovoidi u $PG(3, 32)$ su eliptične kvadrike i Titsovi ovoidi.

Teorem (Penttila, 2022.)

Ovoidi u $PG(3, 64)$ su eliptične kvadrike.

Teorem ekvivalenta u ravnini (Glynn 1997., Penttila, 1999.)

- dva ovala kompatibilna u točki

Korolar

Neka je O oval u $PG(2, q)$. Ako se oval ekvivalentan s O pojavljuje kao presjek sekantne ravnine ovoida, tada za svaku točku P projektivne ravnine koja nije nukleus ovala O postoji oval u projektivnoj ravnini koji je kompatibilan s O u točki P .

Svođenje na problem projektivne ravnine

- oval-točka par
- skup parametara L lokalnih sekanti
- dva oval-točka para se podudaraju

Teorem

Neka su (O_1, P_1) i (O_2, P_2) dva oval-točka para sa skupovima parametara lokalnih sekanti L_1 i L_2 .

Vrijedi: $(\exists g \in PGL(3, q), P_2 \mapsto P_1) gO_2$ kompatibilan s O_1 u točki P_1 ako i samo ako $(\exists g' \in AGL(1, q)) g'(L_2) = \mathbb{F}_q \setminus L_1$.

Redukcija problema - hiperovali

- ispitujemo podudaranja oval-točka parova
- reduciramo problem - neizomorfni ovali
- klasifikacija hiperovala
- Segre 1955. - konike su jedini ovali u projektivnim ravninama neparnog reda

Teorem

Hiperoval u projektivnoj ravnini $PG(2, q)$, $q > 2$ paran, koji sadrži fundamentalni četverokut $(0 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 0)$, $(1 : 0 : 0)$, $(1 : 1 : 1)$ možemo zapisati kao

$$\{(0 : 0 : 1), (0 : 1 : 0)\} \cup \{(1 : t : f(t)) \mid t \in \mathbb{F}_q\},$$

gdje je f permutacija konačnog polja \mathbb{F}_q takav da je $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ i $\deg f \leq q - 2$.

Definicija

σ -polinom hiperovala

Hiperovali

Poznato je 11 beskonačnih klasa hiperovala i jedan sporadični primjer u $PG(2, 32)$ (O'Keefe, Penttila 1990.)

Klasificirani hiperovali u $PG(2, 16)$ (Hall 1975., O'Keefe, Penttila 1990.):

naziv	$f(x)$
regularan	x^2
Lunelli-Sce	$x^{12} + x^{10} + \omega^{11}x^8 + x^6 + \omega^2x^4 + \omega^9x^2$

gdje je ω primitivni korijen koji zadovoljava $\omega^4 - \omega + 1 = 0$.

Klasificirani hiperovali u $PG(2, 32)$ (Penttila, Royle 1994.):

naziv	$f(x)$
regularan	x^2
translacijski	x^4
Segre	x^6
Payne	$x^6 + x^{16} + x^{26}$
Cherowitzo	$x^8 + x^{10} + x^{28}$
O'Keefe-Penttila	$OKP(x)$

$$\begin{aligned} OKP(x) = & x^4 + \omega^{11}x^6 + \omega^{20}x^8 + \omega^{11}x^{10} + \omega^6x^{12} + \omega^{11}x^{14} \\ & + x^{16} + \omega^{11}x^{18} + \omega^{20}x^{20} + \omega^{11}x^{22} + \omega^6x^{24} \\ & + \omega^{11}x^{26} + x^{28} \end{aligned}$$

gdje je ω primitivni korijen koji zadovoljava $\omega^5 - \omega - 1 = 0$

Hiperovali

Klasificirani hiperovali u $PG(2, 64)$ (Vandendriessche, 2019.):

naziv	$f(x)$
regularan	x^2
Adelaide	...
Subiaco I	...
Subiaco II	...

Poznati hiperovali u $PG(2, 128)$:

naziv	$f(x)$
regularan	x^2
translacijski II	x^4
translacijski III	x^8
Segre	x^6
Glynn II	x^{20}
Payne	$x^{22} + x^{64} + x^{106}$
Cherowitzo	$x^{16} + x^{18} + x^{52}$
Subiaco III	...

Implementacija hiperovala

GAP implementacija

```
[ Zero(GF(q)), Zero(GF(q)), One(GF(q))]
```

```
[ Zero(GF(q)), One(GF(q)), Zero(GF(q))]
```

```
[ One(GF(q)), x, o-polynomial(x)]
```

```
ProjectiveSpace( dimenzija, red-polja );
```

```
VectorSpaceToElement( proj-ravnina, koord-tocke );
```

Redukcija problema - ovali

- ovali od hiperovalala
- neizomorfni ovali
- stabilizator hiperovalala
- orbite stabilizatora na točkama hiperovalala
- 4-lukovi hiperovalala
- dijagonalni broj uz svaku točku hiperovalala
- bipartitni graf, GRAPE paket
- nauty za grupu automorfizama

Brojevi orbita za hiperovale u $PG(2, 32)$:

naziv	broj orbita
regularan	2
translacijski	3
Segre	2
Payne	6
Cherowitzo	10
O'Keefe-Penttila	12

Ukupno neizomorfnih ovala: 35

Brojevi orbita za hiperovale u $PG(2, 64)$:

naziv	broj orbita
regularan	2
Adelaide	3
Subiaco I	6
Subiaco II	8

Ukupno neizomorfnih ovala: 19

Brojevi orbita za poznate hiperovale u $PG(2, 128)$:

naziv	broj orbita
regularan	2
translacijski II	3
translacijski III	3
Segre	4
Glynn II	2
Payne	12
Cherowitzo	22
Subiaco III	12

Ukupno barem neizomorfnih ovala: 60

Redukcija problema - podudaranja oval-točka parova

- oval-točka parovi
- stabilizator ovala u projektivnoj ravnini
- orbite na točkama koje nisu na ovalu niti su njegov nukleus
- bipartitni graf od ranije
- redukcija

Paralelni procesi za svaki oval:

```
1009 for OvalIndex in [1 .. AllOvals.Number] do
1010     ScreenSessionName := Concatenation( "GAPMP", String( q ), PrintWorkingDirectoryAsString(), "_", String( OvalIndex ) );
1011
1012     ScreenSessionName := Concatenation( "GAPMP", String( q ), PrintWorkingDirectoryAsString(), "_", String( OvalIndex ) );
1013
1014     StartScreenSessionCommand := Concatenation( "screen -S ", ScreenSessionName, " -d -m" ); # these -d -m options are to s
1015
1016     CommandString := Concatenation( "screen -S ", ScreenSessionName, " -X stuff ",           # sends following string t
1017                                     "\n",                                             # starting quotation marks
1018                                     "gap",                                           # gap command
1019                                     " -L ", WORKSPACEFILENAME,                       # gap option to load given
1020                                     " -c \"OvalIndex := ", String( OvalIndex ), ";\n",   # gap option to execute a
1021                                     " src/automorphismgroupofanoval.g",             # gap option to Read(); f
1022                                     "\n",                                           # ending \" quotation mark
1023                                     "^M",                                           # emulating Enter keypress
1024     );
1025
1026     Exec( StartScreenSessionCommand );
1027
1028     Print("Executing process to compute data for Oval[" , OvalIndex, "] in screen session ", ScreenSessionName, "\n");
1029
1030     Exec( CommandString );
1031
1032     Wait( 10 );
1033
1034 od;
1035
```

Paralelni procesi za svaki oval:

```
1042
1043   Print("Waiting for these processes to complete\n%c");
1044   StillWaitingForMultipleProcessesToComplete := true;
1045   while StillWaitingForMultipleProcessesToComplete do
1046     StillWaitingForMultipleProcessesToComplete := false;
1047     for OvalIndex in [1 .. AllOvals.Number] do
1048       if not IsExistingFile( OVALCOMPUTEDDATAPATHS.(OvalIndex) ) then
1049         StillWaitingForMultipleProcessesToComplete := true;
1050         break;
1051       fi;
1052     od;
1053     Wait(5);
1054   od;
1055   for OvalIndex in [1 .. AllOvals.Number] do
1056     ScreenSessionName := Concatenation( "GAPMP", String( q ), PrintWorkingDirectoryAsString(), "_", String( OvalIndex ) );
1057     EndGAPSessionCommand := Concatenation( "screen -S ", ScreenSessionName, " -X stuff \"quit^\M\" );
1058     Exec( EndGAPSessionCommand );
1059     EndScreenSessionCommand := Concatenation( "screen -S ", ScreenSessionName, " -X stuff \"exit^\M\" );
1060     Print("Closing screen session ", ScreenSessionName, "\n%c");
1061     Exec( EndScreenSessionCommand );
1062   od;
```

Pomoćne funkcije u `~/ .gap/gaprc`

Podudaranja oval-točka parova

Broj reduciranih oval-točka parova

- za $PG(2, 32)$: 22144
- za $PG(2, 64)$: 45107
- za $PG(2, 128)$ barem: 661831

Podudaranja oval-točka parova:

- skup parametara lokalnih sekanti
- postoji li $g \in A\Gamma L(1, q)$ takav da je $gL_2 = \mathbb{F}_q \setminus L_1$?
- reprezentant skupa parametara obzirom na $A\Gamma L(1, q)$
(leksikografski najmanji u orbiti)
- dva oval-točka para se podudaraju ako $\mathbb{F}_q \setminus L_1$ i L_2 imaju istog reprezentanta

Podudaranja oval-točka parova:

- redukcija skupova parametara
 - za $PG(2, 32)$: 10894
 - za $PG(2, 64)$: 22546
 - za $PG(2, 128)$ barem: 305901
- računanje reprezentanata svakog skupa parametara
- reprezentant od $\mathbb{F}_q \setminus L_1$ je leksikografski najveći element orbite od L_1
- paraleliziranje

Ovali za koje se svaki oval-točka par podudara s nekim ovalom:

- u $PG(2, 32)$ to su regularni i translacijski ovali, za sve ostale ovale to ne vrijedi (O'Keefe, Penttila, Royle 1994.)
- u $PG(2, 64)$ to su regularni ovali, za sve ostale ovale to ne vrijedi (Penttila 2022.)
- u $PG(2, 128)$ to su regularni, translacijski II i translacijski III ovali, za sve ostale poznate ovale to ne vrijedi (Nakić, Martinović)

Definition

Oval u projektivnoj ravnini $PG(2, q)$, q paran, je translacijski oval, ako je oval izomorfan ovalu

$$\{(0 : 0 : 1)\} \cup \{(1 : t : f(t)) \mid t \in \mathbb{F}_q\},$$

gdje je f generator grupe $\text{Aut}(\mathbb{F}_q)$.

Teorem (Penttila, Praeger, 1997.)

Ovoid u $PG(3, q)$, q paran, $q \neq 2$, neka je π sekantna ravnina ovoida te neka je l presjek sekantne ravnine π i ovoida translacijski oval s osi l . Tada je dani ovoid je eliptična kvadrika ili Titsov ovoid ako i samo ako su svi presjeci sekantnih ravnina iz jata ovoida s nosačem l translacijski ovali.

Zaključak:

- u $PG(2, 32)$ postoje samo eliptične kvadrike i Titsovi ovoidi (O'Keefe, Penttila, Royle 1994.)
- u $PG(2, 64)$ postoje samo eliptične kvadrike (Penttila 2022.)
- u $PG(2, 128)$ znamo da postoje eliptične kvadrike i Titsovi ovoidi (ne znamo jesu li to svi)

Zaključni komentari na program

- parallel processing, HPC-GAP, LSP za GAP, GAP Workspace, gaprc, koje su najbolje prakse pri kodiranju u GAP-u, GitHub

Hvala na pažnji