Računalne klasifikacije ovoida u projektivnim geometrijama parnog reda

Filip Martinović

22. siječnja 2024.

Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva

rad podržan HRZZ projektom IP-2020-02-9752

Definicija

Neka je V vektorski prostor dimenzije $n+1$ nad poljem K. Projektivni prostor $PG(V)$ dimenzije n dan je skupom točaka koje su 1-dimenzionalni potprostori od V, gdje su

- pravci 2-dimenzionalni potprostori,
- k-ravnine $(k+1)$-dimenzionalni potprostori,
- hiperravnine n-dimenzionalni potprostor,

a incidencija ovih objekata inducirana odnosom tih potprostora u vektorskom prostoru V.

Uvodni pojmovi

Definicija

Konačan projektivni prostor je projektivni prostor s konačnim brojem točaka.

- u konačnom projektivnom prostoru polje K je konačno polje

Definicija

Konačan projektivni prostor $PG(n,q)$ definiramo kao projektivni prostor obzirom na vektorski prostor $\mathbb{F}_q^{n+1}$ nad poljem $\mathbb{F}_q$. Za $n = 2$ reći ćemo da je to konačna projektivna ravnina.

Napomena

- za $n \geq 3$ svi konačni projektivni prostori su međusobno izomorfni
- za $n = 2$ to nije slučaj (npr. za $q = 9$ postoje 4 neizomorfne)

Uvodni pojmovi

Napomena

- $PG(2,q)$ ima q^2+q+1 točaka i q^2+q+1 pravaca
- $PG(3,q)$ ima q^3+q^2+q+1 točaka, $(q^2+1)(q^2+q+1)$ pravaca i q^3+q^2+q+1 ravnina

Baviti ćemo se s $PG(3,q)$ i $PG(2,q)$

- točke u $PG(2,q)$, homogene koordinate $(x_0 : x_1 : x_2)$
- pravci u $PG(2,q)$, homogene koordinate $[x_0 : x_1 : x_2]$

Uvodni pojmovi

Definicija

- kolineacija od $PG(n,q)$
- grupa kolineacija $P\Gamma L(n+1,q)$
  $\cong (GL(n+1,q)/Sc(n+1,q)) \rtimes Aut(\mathbb{F}_q)$
- kolineacija od $AG(n,q)$
- grupa kolineacija $A\Gamma L(n,q) \cong (GL(n,q)/Sc(n,q)) \rtimes T$

Napomena

Stabilizator od ∞ u $P\Gamma L(2,q) \cong A\Gamma L(1,q)$.

Uvodni pojmovi

Definicija

<u>k-kapa</u> u $PG(n, q)$ je skup od k točaka među kojima svake tri nisu kolinearne.

Teorem (Bose, Seiden, Qvist)

k-kapa u $PG(3, q)$, $q \neq 2$, ima najviše $q^2 + 1$ točaka.

Definicija

Ovoid $\mathcal{O}$ u $PG(3,q)$ je k-kapa takva da za svaki $P \in \mathcal{O}$ unija svih tangenti kroz P na $\mathcal{O}$ čini hiperravninu u $PG(n,q)$.

Teorem (Tits)

Ako postoji ovoid u $PG(n,q)$, tada je $n \leq 3$. Ovoid u $PG(n,q)$ sadrži točno $q^{n-1}+1$ točaka.

Korolar

$\mathcal{O}$ je ovoid u $PG(3,q)$ ako i samo ako je to maksimalna k-kapa u $PG(3,q)$ (dakle, (q^2+1)-kapa).

Uvodni pojmovi

Definicija

k-kapu u $PG(2,q)$ zvat ćemo $\underline{k\text{-luk}}$.

Definicija

<u>Oval</u> u $PG(2,q)$ je $(q+1)$-luk u $PG(2,q)$.

Napomena

- q neparan $\Longrightarrow$ maksimalan k-luk ima $q+1$ točku
- q paran $\Longrightarrow$ maksimalan k-luk ima $q+2$ točke

Uvodni pojmovi

Propozicija

Sve tangente ovala u $PG(2,q)$, q paran, sijeku se u jednoj točki, a oval zajedno s tom točkom čini $(q+2)$-luk u $PG(2,q)$.

Definition

Nukleus ovala u $PG(2,q)$, q paran, je točka projektivne ravnine u kojoj se sijeku tangente danog ovala. Hiperoval u $PG(2,q)$, q paran, je $(q+2)$-luk u $PG(2,q)$.

Uvodni pojmovi

Što znamo o egzistenciji ovoida u $PG(3, q)$, q neparan?

- u $PG(3, q)$, za svaki q neparan, poznata je familija ovoida - eliptične kvadrike

Teorem (Barlotti, Panella)

Svaki ovoid u $PG(3, q)$, q neparan, je eliptična kvadrika.

Uvodni pojmovi

Što znamo o egzistenciji ovoida u $PG(3, q)$, q paran?

- u $PG(3, q)$, za svaki q paran, poznata je familija ovoida - eliptične kvadrike
- u $PG(3, q)$, za svaki q paran i nije kvadrat, poznata je familija ovoida - Titsovi ovoidi

Klasifikacija ovoida za q paran? Zašto je ona korisna?

Motivacija

Definicija

Inverzivna ravnina je incidencijska struktura točaka i kružnica takva da

- svake tri različite točke incidentne su s jedinstvenom kružnicom
- za dvije točke P i Q te kružnicu C kroz P (ali ne kroz Q) postoji jedinstvena kružnica D kroz P i Q koja se siječe s C samo u točki P
- postoje barem 4 točke
- postoji točka i kružnica koje nisu incidentne
- svaka kružnica incidentna je barem s nekom točkom

Motivacija

Teorem

Ako je inverzivna ravnina $\mathbb{I}$ konačna, tada postoji $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, za koji $\mathbb{I}$ ima $n^2 + 1$ točku, $n^3 + n$ kružnicu. Tu je svaka kružnica incidentna s $n + 1$ točkom, a inverzivna ravnina zapravo čini 3-$(n^2 + 1, n + 1, 1)$-dizajn.

Napomena

- n zovemo red inverzivne ravnine
- inverzivne ravnine se još nazivaju i Möbiusove ravnine

Motivacija

Svaki ovoid $\mathcal{O}$ u $PG(3,q)$, $q > 2$, daje inverzivnu ravninu reda q.

- točke, kružnice

Teorem (Dembowski, 1963.)

Svaka inverzivna ravnina parnog reda q izomorfna je nekom ovoidu u $PG(3,q)$.

Klasifikacija inverzivnih ravnina parnog reda se time svodi na klasifikaciju ovoida u projektivnim prostorima parnog reda.

Od sada nadalje nam je q paran.

Klasifikacija ovoida

Teorem (Fellegora, 1962.)

Ovoidi u $PG(3,4)$ su eliptične kvadrike.

Ovoidi u $PG(3,8)$ su eliptične kvadrike i Titsovi ovoidi.

Teorem (O'Keefe, Penttila, 1990., 1992.)

Ovoidi u $PG(3,16)$ su eliptične kvadrike.

Teorem (O'Keefe, Penttila, Royle, 1994.)

Ovoidi u $PG(3,32)$ su eliptične kvadrike i Titsovi ovoidi.

Teorem (Penttila, 2022.)

Ovoidi u $PG(3,64)$ su eliptične kvadrike.

Teorem ekvivalenta u ravnini

Za $q = 16, 32, 64$ problem traženja ovoida se reducira na problem projektivne ravnine (teorem ekvivalenta u ravnini).

Propozicija

Ravnina u $PG(3, q)$ siječe ovoid u 0, 1 ili $q + 1$ točki.

Definicija

- tangencijalna ravnina
- sekantna ravnina

Korolar

Presjek sekantne ravnine ovoida daje oval u toj ravnini.

Teorem ekvivalenta u ravnini

Propozicija

Pravac u $PG(2, q)$ siječe oval u 0, 1 ili 2 točke.

Definicija

- pasanta ovala
- tangenta ovala
- sekanta ovala

Definicija

Neka je $\mathcal{O}$ ovoid i l tangenta od $\mathcal{O}$ u $PG(3, q)$. Skup svih sekantnih ravnina na $\mathcal{O}$ koje sadrže l zovemo <u>jato ovoida $\mathcal{O}$ s nosačem l</u>.

Definicija

Neka su O_1 i O_2 ovali te P točka u $PG(2, q)$ takva da je $P \notin O_1, O_2$ te nije nukleus od O_1 ili od O_2. Kažemo da su ovali <u>O_1 i O_2 kompatibilni ovali u točki P</u>, ako se nukleusi ovala podudaraju i ako postoji točka $Q \in O_1 \cap O_2$ takva da je PQ tangenta na O_1 i O_2 i svaka sekanta od O_1 kroz P je pasanta od O_2 (i obratno).

Teorem ekvivalenta u ravnini

Definicija

Neka je $\{O_s | s \in \mathbb{F}_q\}$ familija ovala u $PG(2, q)$ takva da je

- $(\forall s \in \mathbb{F}_q)\, O_s$ ima nukleus $(0 : 1 : 0)$,
- $(\forall s \neq t)\, O_s \cap O_t = \{(0 : 0 : 1)\}$,
- $(\forall s \neq t)\, O_s$ i O_t su kompatibilni u točki $\{(0 : 1 : s + t)\}$.

Svaka slika ove familija obzirom na kolineaciju projektivne ravnine zovemo lepeza ovala u $PG(2, q)$.

- zajednički nukleus
- zajednička točka
- zajednička tangenta

Teorem ekvivalenta u ravnini (Glynn 1997., Penttila 1999.)

Ovoid $\mathcal{O}$ u $PG(3,q)$ je ekvivalentan lepezi ovala $\{O_s | s \in \mathbb{F}_q\}$ u $PG(2,q)$ sa zajedničkom tangentom t. Svako jato ovoida $\mathcal{O}$ daje nam lepezu ovala. Ako je $\mathcal{F}$ jato ovoida $\mathcal{O}$ s nosačem l, tada za svaki $\pi \in \mathcal{F}$ postoji parametrizacija $\{\pi_s | s \in \mathbb{F}_q\}$ skupa $\mathcal{F}$ takva da je $\pi_0 = \pi$ te da za svaki $s \in \mathbb{F}_q$ postoji homografija $M_s : \pi_s \to PG(2,q)$ koja $\pi_s \cap \mathcal{O} \mapsto O_s$ i $l \mapsto t$.

Svođenje na problem projektivne ravnine

Teorem

Neka je O oval u $PG(2,q)$. Ako se oval ekvivalentan s O pojavljuje kao presjek sekantne ravnine ovoida, tada za svaku tangentu l ovala O postoji lepeza ovala u $PG(2,q)$ koja ima zajedničku tangentu l. Štoviše, za svaku točku $P \in l$ koja nije nukleus ovala O, postoji oval u lepezi koji je kompatibilan s O u točki P.

Svođenje na problem projektivne ravnine

Definicija

Za oval O i točku P iz $PG(2,q)$ kažemo da je oval-točka par (O,P), ako P nije sadržana u O niti je nukleus od O.

Lema

Neka su (O_1, P_1) i (O_2, P_2) dva oval-točka para. Neka je $g \in P\Gamma L(3,q)$ kolineacija takva da $P_1 \mapsto P_2$ i da je gO_2 kompatibilan s O_1 u točki P_1. Tada g preslikava sekante od O_2 kroz P_2 u pasante od O_1 kroz P_1 te tangentu na O_2 kroz P_2 preslikava u tangentu na O_1 kroz P_1.

Svođenje na problem projektivne ravnine

Napomena

- parametrizacija pravaca kroz točku P projektivne ravnine $PG(2, q)$
- kolineacija projektivne ravnine $g : P_1 \mapsto P_2$ inducira $g' \in P\Gamma L(2, q)$ na skupu parametara

Svođenje na problem projektivne ravnine

Teorem

Neka su (O_1, P_1) i (O_2, P_2) dva oval-točka para. Neka su pravci kroz P_1 parametrizirani tako da tangenta kroz P_1 na O_1 ima parametar ∞; na analogan način parametriziramo pravce kroz P_2. Označimo s S_1 skup parametara koji odgovaraju sekantama od O_1 kroz P_1, a s E_2 skup parametara koji odgovaraju pasantama od O_2 kroz P_2.

Postoji kolineacija $g \in P\Gamma L(3, q)$ takva da $P_2 \mapsto P_1$ i da je gO_2 kompatibilan s O_1 u točki P_1 ako i samo ako postoji kolineacija afinog pravca $g' \in A\Gamma L(1, q)$ takva da $g'(E_2) = S_1$.

Svođenje na problem projektivne ravnine

Definicija

Za oval-točka par (O, P) s parametrizacijom pravaca kroz P gdje tangenta ima parametar ∞ definiramo skup L parametara lokalnih sekanti kao skup svih parametara koji odgovaraju sekantama od O kroz P.

Definicija

Kažemo da se dva oval-točka para (O_1, P_1) i (O_2, P_2) s pripadnim skupovima parametara L_1 i L_2 podudaraju ako postoji kolineacija afine ravnine $g' \in A\Gamma L(1, q)$ takva da $g'(L_1) = \mathbb{F}_q \setminus L_2$.

Svođenje na problem projektivne ravnine

Prema tome, sada točno možemo vidjeti koja se dva ovala mogu pojaviti kao presjeci sekantnih ravnina jata ovoida - samo onda kada postoje neke točke projektivne ravnine za koje se oval-točka parovi tih ovala podudaraju.

Kako nam koriste ovi rezultati?

Teorem (Barlotti 1955., Segre 1959.)

Ovoid u $PG(3, q)$, q paran, $q \neq 2$, je eliptična kvadrika ako i samo ako je svaki presjek sekantne ravnine ovoida konika.

Teorem (Brown, 2000.)

Ovoid u $PG(3, q)$, q paran, $q \neq 2$, je eliptična kvadrika ako i samo ako je neki presjek sekantne ravnine ovoida konika.

Svođenje na problem projektivne ravnine

Teorem (Penttila, Praeger, 1997.)

Ovoid u $PG(3,q)$, q paran, $q \neq 2$, neka je π sekantna ravnina ovoida te neka je te presjek sekantne ravnine π i ovoida translacijski oval s osi l. Tada je dani ovoid je eliptična kvadrika ili Titsov ovoid ako i samo ako su svi presjeci sekantnih ravnina iz jata ovoida s nosačem l translacijski ovali.

Klasifikacijom ovala u projektivnoj ravnini možemo računalno provjeriti jesu li translacijski ovali jedini presjeci sekantnih ravnina.

Računalne klasifikacije ovoida u projektivnim geometrijama parnog reda (2. dio), **29. siječnja**

Hvala na pažnji