Otvorena pitanja o jako regularnim konfiguracijama*

Vedran Krčadinac

PMF-MO

27.4.2021.

* This work was fully supported by the Croatian Science Foundation under the project 9752.

Algoritamske konstrukcije kombinatornih objekata

Ciljevi projekta:

O1. Razvoj algoritamskih metoda konstrukcije i klasifikacije kombinatorinih objekata s dodatnom algebarskom strukturom. Razvijene metode koristit će algebarska i kombinatorna svojstva objekata da bi bile primjenjive na objekte s većim parametrima i probleme koji su izvan dosega poznatih konstrukcijskih metoda.

O2. Proširivanje teorijskog znanja o kombinatornim objektima koji su predmet istraživanja. **Zanimljivi teoremi često se otkrivaju i dokazuju zahvaljujući dostupnim primjerima. Očekujemo da će rezultati ovog projekta dovesti do takvih otkrića.**

O3. Razvoj softverskog paketa, implementiranog u sustavu GAP, za konstrukciju i analizu kombinatornih objekata.

Jako regularne konfiguracije

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, preprint. https://arxiv.org/abs/2104.04880

Jako regularne konfiguracije

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, preprint. https://arxiv.org/abs/2104.04880

Jako regularna konfiguracija s parametetrima $(v_k; \lambda, \mu)$ je simetrična (v_k) konfiguracija kojoj je pridruženi graf točaka jako regularan s parametrima $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$.

Jako regularne konfiguracije

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, preprint. https://arxiv.org/abs/2104.04880

Jako regularna konfiguracija s parametetrima $(v_k; \lambda, \mu)$ je simetrična (v_k) konfiguracija kojoj je pridruženi graf točaka jako regularan s parametrima $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$.

Zašto graf točaka, a ne pravaca?

... We are interested in configurations with both associated graphs being strongly regular.

Jako regularne konfiguracije

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, preprint. https://arxiv.org/abs/2104.04880

Jako regularna konfiguracija s parametetrima $(v_k; \lambda, \mu)$ je simetrična (v_k) konfiguracija kojoj je pridruženi graf točaka jako regularan s parametrima $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$.

Zašto graf točaka, a ne pravaca?

... We are interested in configurations with both associated graphs being strongly regular.

Teorem.

U jako regularnoj $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguraciji, pridruženi graf pravaca je jako regularan s parametrima $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$.

Jako regularne konfiguracije

Zašto samo simetrične konfiguracije?

Jako regularne konfiguracije

Zašto samo simetrične konfiguracije?

R. C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. **13** (1963), 389–419.

Parcijalna geometrija s parametrima $pg(s, t, \alpha)$ je (v_r, b_k) konfiguracija s $k = s + 1$ i $r = t + 1$ takva da za svaki neincidentni par točke i pravca (P, ℓ) postoji točno α točaka na ℓ kolinearnih s P.

Jako regularne konfiguracije

Zašto samo simetrične konfiguracije?

R. C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. **13** (1963), 389–419.

Parcijalna geometrija s parametrima $pg(s,t,\alpha)$ je (v_r, b_k) konfiguracija s $k = s+1$ i $r = t+1$ takva da za svaki neincidentni par točke i pravca (P,ℓ) postoji točno α točaka na ℓ kolinearnih s P.

Graf točaka je

$$SRG\left(\frac{(s+1)(st+\alpha)}{\alpha},\ s(t+1),\ s-1+t(\alpha-1),\ \alpha(t+1)\right),$$

a graf pravaca je

$$SRG\left(\frac{(t+1)(st+\alpha)}{\alpha},\ t(s+1),\ t-1+s(\alpha-1),\ \alpha(s+1)\right).$$

Jako regularne konfiguracije

A. E. Brouwer, W. H. Haemers, V. D. Tonchev, *Embedding partial geometries in Steiner designs*, in: *Geometry, combinatorial designs and related structures (Spetses, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **245**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 33–41.

Teorem.

Ako je graf točaka (v_r, b_k) konfiguracije jako regularan, onda je to parcijalna geometrija ili vrijedi $v \leq b$.

Jako regularne konfiguracije

A. E. Brouwer, W. H. Haemers, V. D. Tonchev, *Embedding partial geometries in Steiner designs*, in: *Geometry, combinatorial designs and related structures (Spetses, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **245**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 33–41.

Teorem.

Ako je graf točaka (v_r, b_k) konfiguracije jako regularan, onda je to parcijalna geometrija ili vrijedi $v \leq b$.

Korolar.

Ako su oba pridružena grafa (v_r, b_k) konfiguracije jako regularna, onda je to parcijalna geometrija ili je simetrična $(v = b)$.

Jako regularne konfiguracije

A. E. Brouwer, W. H. Haemers, V. D. Tonchev, *Embedding partial geometries in Steiner designs*, in: *Geometry, combinatorial designs and related structures (Spetses, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **245**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 33–41.

Teorem.

Ako je graf točaka (v_r, b_k) konfiguracije jako regularan, onda je to parcijalna geometrija ili vrijedi $v \leq b$.

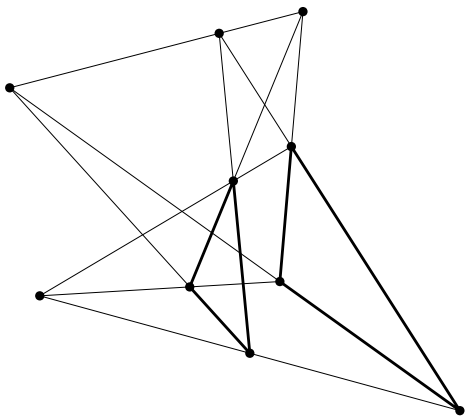
Korolar.

Ako su oba pridružena grafa (v_r, b_k) konfiguracije jako regularna, onda je to parcijalna geometrija ili je simetrična $(v = b)$.

Postoje jako regularne konfiguracije koje nisu parcijalne geometrije!

Jako regularne konfiguracije

Desarguesova konfiguracija je jako regularna $(10_3; 3, 4)$ konfiguracija:

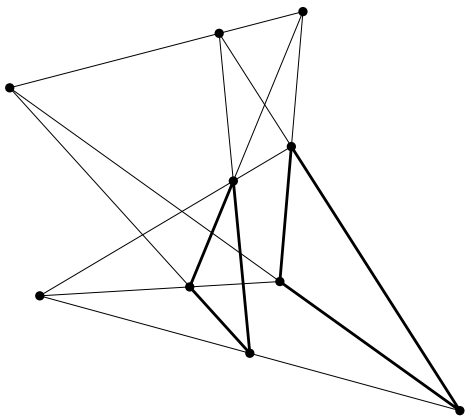


$\rightsquigarrow$ $SRG(10, 6, 3, 4)$

(komplement Petersenova grafa)

Jako regularne konfiguracije

Desarguesova konfiguracija je jako regularna $(10_3; 3, 4)$ konfiguracija:



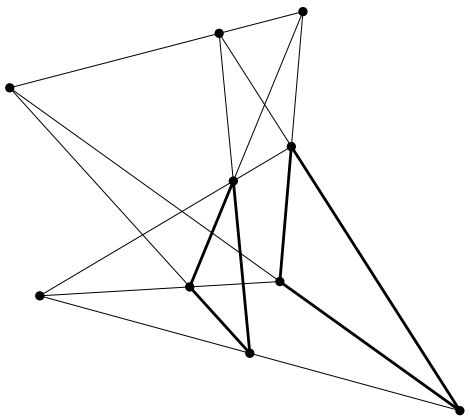
$\rightsquigarrow$ $SRG(10, 6, 3, 4)$

(komplement Petersenova grafa)

Desarguesova konfiguracija je tzv. semiparcijalna geometrija $spg(2, 2, 2, 4)$.

Jako regularne konfiguracije

Desarguesova konfiguracija je jako regularna $(10_3; 3, 4)$ konfiguracija:



$\rightsquigarrow$ $SRG(10, 6, 3, 4)$

(komplement Petersenova grafa)

Desarguesova konfiguracija je tzv. semiparcijalna geometrija $spg(2, 2, 2, 4)$.

I. Debroey, J. A. Thas, *On semipartial geometries*, J. Comb. Theory A **25** (1978), 242–250.

Semiparcijalna geometrija s parametrima $spg(s, t, \alpha, \mu)$ je (v_r, b_k) konfiguracija s $k = s + 1$ i $r = t + 1$ takva da za svaki neincidentni par točke i pravca (P, ℓ) postoji 0 ili α točaka na ℓ kolinearnih s P. Nadalje, za svaki par nekolinearnih točaka postoji točno μ točaka kolinearnih s obje.

Jako regularne konfiguracije

Graf točaka semiparcijalne geometrije $spg(s, t, \alpha, \mu)$ je

$$SRG\left(1 + \frac{s(t+1)(\mu + t(s+1-\alpha)}{\mu},\ s(t+1),\ s-1+t(\alpha-1),\ \mu\right).$$

Graf pravaca ne mora biti jako regularan, osim u simetričnom slučaju.

Jako regularne konfiguracije

Graf točaka semiparcijalne geometrije $spg(s,t,\alpha,\mu)$ je

$$SRG\left(1+\frac{s(t+1)(\mu+t(s+1-\alpha)}{\mu},\ s(t+1),\ s-1+t(\alpha-1),\ \mu\right).$$

Graf pravaca ne mora biti jako regularan, osim u simetričnom slučaju.

A. M. Cohen, *A new partial geometry with parameters* $(s,t,\alpha)=(7,8,4)$, J. Geometry **16** (1981), 181–186.

Lema.

Neka je graf točaka (v_r, b_k) konfiguracije jako regularan s parametrima koji odgovaraju parcijalnoj geometriji $pg(s,t,\alpha)$:

$$SRG\left(\frac{(s+1)(st+\alpha)}{\alpha},\ s(t+1),\ s-1+t(\alpha-1),\ \alpha(t+1)\right).$$

Tada ta konfiguracije jest parcijalna geometrija $pg(s,t,\alpha)$.

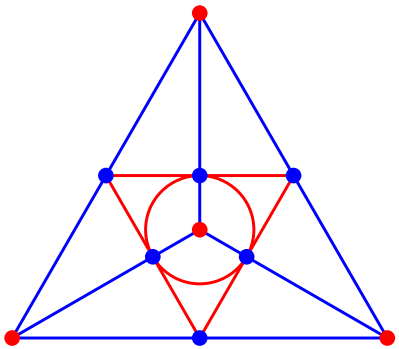
Jako regularne konfiguracije

Za semiparcijalne geometrije ne vrijedi odgovarajuća lema!

Jako regularne konfiguracije

Za semiparcijalne geometrije ne vrijedi odgovarajuća lema!

Jako regularna $(10_3; 3, 4)$ konfiguracija koja **nije** semiparcijalna geometrija:



$\rightsquigarrow$

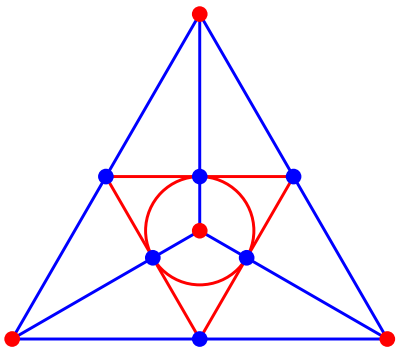
$$SRG(10, 6, 3, 4)$$

(komplement Petersenova grafa)

Jako regularne konfiguracije

Za semiparcijalne geometrije ne vrijedi odgovarajuća lema!

Jako regularna $(10_3; 3, 4)$ konfiguracija koja **nije** semiparcijalna geometrija:



$\rightsquigarrow$

$$SRG(10, 6, 3, 4)$$

(komplement Petersenova grafa)

Ova konfiguracija ne pripada ni drugim generalizacijama parcijalnih geometrija, kao što su jako regularne (α, β)-geometrije.

N. Hamilton, R. Mathon, *Strongly regular* (α, β)*-geometries*, J. Combin. Theory Ser. A **95** (2001), no. 2, 234–250.

Jako regularne konfiguracije

U dokaz ovog teorema pojavljuju se dva slučaja:

Teorem.

U jako regularnoj $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguraciji, pridruženi graf pravaca je jako regularan s parametrima $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$.

Jako regularne konfiguracije

U dokaz ovog teorema pojavljuju se dva slučaja:

Teorem.

U jako regularnoj $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguraciji, pridruženi graf pravaca je jako regularan s parametrima $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$.

1. Incidencijska matrica je regularna $\rightsquigarrow$ računanjem s matricama susjedstva pokazuje se da je graf pravaca jako regularan.

Jako regularne konfiguracije

U dokaz ovog teorema pojavljuju se dva slučaja:

Teorem.

U jako regularnoj $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguraciji, pridruženi graf pravaca je jako regularan s parametrima $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$.

1. Incidencijska matrica je regularna $\rightsquigarrow$ računanjem s matricama susjedstva pokazuje se da je graf pravaca jako regularan.
2. Incidencijska matrica je singularna $\rightsquigarrow$ konfiguracija je parcijalna geometrija i zato je graf pravaca jako regularan.

Jako regularne konfiguracije

U dokaz ovog teorema pojavljuju se dva slučaja:

Teorem.

U jako regularnoj $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguraciji, pridruženi graf pravaca je jako regularan s parametrima $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$.

1. Incidencijska matrica je regularna $\rightsquigarrow$ računanjem s matricama susjedstva pokazuje se da je graf pravaca jako regularan.
2. Incidencijska matrica je singularna $\rightsquigarrow$ konfiguracija je parcijalna geometrija i zato je graf pravaca jako regularan.

Jako regularne konfiguracije s regularnim incidencijskim matricama nazivamo pravima (eng. proper). "Neprave" jako regularne konfiguracije su nužno parcijalne geometrije.

Jako regularne konfiguracije

U dokaz ovog teorema pojavljuju se dva slučaja:

Teorem.

U jako regularnoj $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguraciji, pridruženi graf pravaca je jako regularan s parametrima $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$.

1. Incidencijska matrica je regularna $\rightsquigarrow$ računanjem s matricama susjedstva pokazuje se da je graf pravaca jako regularan.
2. Incidencijska matrica je singularna $\rightsquigarrow$ konfiguracija je parcijalna geometrija i zato je graf pravaca jako regularan.

Jako regularne konfiguracije s regularnim incidencijskim matricama nazivamo pravima (eng. proper). "Neprave" jako regularne konfiguracije su nužno parcijalne geometrije.

Možemo li prave $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije prepoznati preko parametara?

Jako regularne konfiguracije

Teorem.

Ako postoji jako regularna $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracija, onda vrijedi $(v-k)(\lambda+1) \geq k(k-1)^3$. Jednakost se dostiže ako i samo ako je konfiguracija parcijalna geometrija.

Jako regularne konfiguracije

Teorem.

Ako postoji jako regularna $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracija, onda vrijedi $(v-k)(\lambda+1) \geq k(k-1)^3$. Jednakost se dostiže ako i samo ako je konfiguracija parcijalna geometrija.

Korolar.

Jako regularna $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracija koja nije projektivna ravnina je prava ako i samo ako vrijedi $(v-k)(\lambda+1) > k(k-1)^3$.

Jako regularne konfiguracije

Teorem.

Ako postoji jako regularna $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracija, onda vrijedi $(v-k)(\lambda+1) \geq k(k-1)^3$. Jednakost se dostiže ako i samo ako je konfiguracija parcijalna geometrija.

Korolar.

Jako regularna $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracija koja nije projektivna ravnina je prava ako i samo ako vrijedi $(v-k)(\lambda+1) > k(k-1)^3$.

Projektivne ravnine reda n su parcijalne geometrije $pg(n, n, n+1)$ i zadovoljavaju jednakost $(v-k)(\lambda+1) = k(k-1)^3$, ali imaju regularne incidencijske matrice. Pridruženi grafovi točaka i pravaca su potpuni.

Jako regularne konfiguracije

Teorem.

Ako postoji jako regularna $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracija, onda vrijedi $(v-k)(\lambda+1) \geq k(k-1)^3$. Jednakost se dostiže ako i samo ako je konfiguracija parcijalna geometrija.

Korolar.

Jako regularna $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracija koja nije projektivna ravnina je prava ako i samo ako vrijedi $(v-k)(\lambda+1) > k(k-1)^3$.

Projektivne ravnine reda n su parcijalne geometrije $pg(n, n, n+1)$ i zadovoljavaju jednakost $(v-k)(\lambda+1) = k(k-1)^3$, ali imaju regularne incidencijske matrice. Pridruženi grafovi točaka i pravaca su potpuni.

Za $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguraciju kažemo da je imprimitivna ako vrijedi $\mu = 0$ ili $\mu = k(k-1)$.

Jako regularne konfiguracije

Prvi slučaj: $\mu = 0 \iff$ pridruženi grafovi su disjunktne unije potpunih grafova $\iff$ kolinearnost točaka je relacija ekvivalencije $\iff$ konfiguracija je disjunktna unija projektivnih ravnina istog reda.

Jako regularne konfiguracije

Prvi slučaj: $\mu = 0 \iff$ pridruženi grafovi su disjunktne unije potpunih grafova $\iff$ kolinearnost točaka je relacija ekvivalencije $\iff$ konfiguracija je disjunktna unija projektivnih ravnina istog reda.

Drugi slučaj: $\mu = k(k-1) \iff$ pridruženi grafovi su potpuni multipartitni $\iff$ nekolinearnost točaka je relacija ekvivalencije $\iff$ konfiguracija je eliptička poluravnina.

P. Dembowski, *Finite geometries*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44, Springer-Verlag, 1968.

Jako regularne konfiguracije

Prvi slučaj: $\mu = 0 \iff$ pridruženi grafovi su disjunktne unije potpunih grafova $\iff$ kolinearnost točaka je relacija ekvivalencije $\iff$ konfiguracija je disjunktna unija projektivnih ravnina istog reda.

Drugi slučaj: $\mu = k(k-1) \iff$ pridruženi grafovi su potpuni multipartitni $\iff$ nekolinearnost točaka je relacija ekvivalencije $\iff$ konfiguracija je eliptička poluravnina.

P. Dembowski, *Finite geometries*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44, Springer-Verlag, 1968.

Zanimaju nas jako regularne konfiguracije koje su prave i primitivne, tj. takve da ni kolinearnost ni nekolinearnost točaka nisu relacije ekvivalencije. To je ekvivalentno s $0 < \mu < k(k-1)$.

Familije jako regularnih konfiguracija

Uvodni primjeri $(10_3; 3, 4)$ konfiguracija pripadaju familiji povezanoj s Mooreovim grafovima dijametra dva, tj. jako regularnim grafovima s $\lambda = 0$ i $\mu = 1$.

Familije jako regularnih konfiguracija

Uvodni primjeri $(10_3; 3, 4)$ konfiguracija pripadaju familiji povezanoj s Mooreovim grafovima dijametra dva, tj. jako regularnim grafovima s $\lambda = 0$ i $\mu = 1$.

A. J. Hoffman, R. R. Singleton, *On Moore graphs with diameters* 2 *and* 3, IBM J. Res. Develop. **4** (1960), 497–504.

Mooreovi grafovi imaju parametre $SRG(k^2 + 1, k, 0, 1)$ za $k \in \{2, 3, 7, 57\}$.

$k = 2 \rightsquigarrow$ peterokut
$k = 3 \rightsquigarrow$ Petersenov graf
$k = 7 \rightsquigarrow$ Hoffman-Singletonov graf
$k = 57 \rightsquigarrow$ **?**

Familije jako regularnih konfiguracija

Uvodni primjeri $(10_3; 3, 4)$ konfiguracija pripadaju familiji povezanoj s Mooreovim grafovima dijametra dva, tj. jako regularnim grafovima s $\lambda = 0$ i $\mu = 1$.

A. J. Hoffman, R. R. Singleton, *On Moore graphs with diameters* 2 *and* 3, IBM J. Res. Develop. **4** (1960), 497–504.

Mooreovi grafovi imaju parametre $SRG(k^2 + 1, k, 0, 1)$ za $k \in \{2, 3, 7, 57\}$.

$k = 2 \rightsquigarrow$ peterokut
$k = 3 \rightsquigarrow$ Petersenov graf
$k = 7 \rightsquigarrow$ Hoffman-Singletonov graf
$k = 57 \rightsquigarrow$ **?**

I. Debroey, J. A. Thas, *On semipartial geometries*, J. Comb. Theory A **25** (1978), 242–250. $\rightsquigarrow$ **familija (f)**.

Familije jako regularnih konfiguracija

Familija (f):

- točke su vrhovi Mooreova grafa $SRG(k^2+1, k, 0, 1)$,
- pravci su skupovi vrhova koji su susjedni zadanom vrhu.

Familije jako regularnih konfiguracija

Familija (f):

- točke su vrhovi Mooreova grafa $SRG(k^2+1, k, 0, 1)$,
- pravci su skupovi vrhova koji su susjedni zadanom vrhu.

$\rightsquigarrow$ semiparcijalna geometrija $spg(k-1, k-1, k-1, (k-1)^2)$

jako regularna $((k^2+1)_k; k(k-2), (k-1)^2)$ konfiguracija

Graf točaka je komplementarni $SRG(k^2+1, k(k-1), k(k-2), (k-1)^2)$.

Familije jako regularnih konfiguracija

Familija (f):

- točke su vrhovi Mooreova grafa $SRG(k^2+1, k, 0, 1)$,
- pravci su skupovi vrhova koji su susjedni zadanom vrhu.

$\rightsquigarrow$ semiparcijalna geometrija $spg(k-1, k-1, k-1, (k-1)^2)$

jako regularna $((k^2+1)_k; k(k-2), (k-1)^2)$ konfiguracija

Graf točaka je komplementarni $SRG(k^2+1, k(k-1), k(k-2), (k-1)^2)$.

$k = 3 \rightsquigarrow$ Desarguesova konfiguracija

semiparcijalna geometrija $spg(2, 2, 2, 4)$

jako regularna $(10_3; 3, 4)$ konfiguracija

Familije jako regularnih konfiguracija

Familija (f):

- točke su vrhovi Mooreova grafa $SRG(k^2+1, k, 0, 1)$,
- pravci su skupovi vrhova koji su susjedni zadanom vrhu.

$\rightsquigarrow$ semiparcijalna geometrija $spg(k-1, k-1, k-1, (k-1)^2)$

jako regularna $((k^2+1)_k; k(k-2), (k-1)^2)$ konfiguracija

Graf točaka je komplementarni $SRG(k^2+1, k(k-1), k(k-2), (k-1)^2)$.

$k = 3 \rightsquigarrow$ Desarguesova konfiguracija

semiparcijalna geometrija $spg(2, 2, 2, 4)$

jako regularna $(10_3; 3, 4)$ konfiguracija

Postoji druga $(10_3; 3, 4)$ konfiguracija koja **nije** semiparcijalna geometrija!

Familije jako regularnih konfiguracija

$k = 7 \rightsquigarrow$ semiparcijalna geometrija $spg(6, 6, 6, 36)$

jako regularna $(50_7; 35, 36)$ konfiguracija

Familije jako regularnih konfiguracija

$k = 7 \rightsquigarrow$ semiparcijalna geometrija $spg(6, 6, 6, 36)$

jako regularna $(50_7; 35, 36)$ konfiguracija

Propozicija.

Postoji bar 211 neizomorfnih $(50_7; 35, 36)$ konfiguracija. Samo jedna od njih je semiparcijalna geometrija.

$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#Cf	$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#Cf	$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#Cf	$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#Cf	$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#Cf
252000	1	120	1	40	1	20	6	6	13
2520	1	96	1	36	1	16	3	4	15
1440	1	72	1	32	1	12	1	3	18
720	1	48	1	24	6	10	1	2	46
240	1	42	1	21	2	8	11	1	76

Familije jako regularnih konfiguracija

$k = 7 \rightsquigarrow$ semiparcijalna geometrija $spg(6,6,6,36)$

jako regularna $(50_7; 35, 36)$ konfiguracija

Propozicija.

Postoji bar 211 neizomorfnih $(50_7; 35, 36)$ konfiguracija. Samo jedna od njih je semiparcijalna geometrija.

$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#Cf	$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#Cf	$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#Cf	$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#Cf	$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#Cf
252000	1	120	1	40	1	20	6	6	13
2520	1	96	1	36	1	16	3	4	15
1440	1	72	1	32	1	12	1	3	18
720	1	48	1	24	6	10	1	2	46
240	1	42	1	21	2	8	11	1	76

Konstruirao sam ih s pomoću zadanih grupa automorfizama i zamjenom podmatrica u incidencijskoj matrici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Klasifikacija malih primjera

Pitanje 1:

Možemo li odrediti sve $(50_7; 35, 36)$ **konfiguracije do na izomorfizam?**

Općenitije: klasifikacija jako regularnih konfiguracija s malim parametrima.

Klasifikacija malih primjera

Pitanje 1:

Možemo li odrediti sve $(50_7; 35, 36)$ **konfiguracije do na izomorfizam?**

Općenitije: klasifikacija jako regularnih konfiguracija s malim parametrima.

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	#SRCf	#SSRCf	#Cf	#SRG
1	$(10_3; 3, 4)$	**2**	**2**	**10**	**1**
2	$(13_3; 2, 3)$	**1**	**1**	**2036**	**1**
3	$(16_3; 2, 2)$	**1**	**1**	**3 004 881**	**2**
4	$(25_4; 5, 6)$	**0**	**0**		**15**
5	$(36_5; 10, 12)$	1	1		**32548**
6	$(41_5; 9, 10)$	?	?		80
7	$(45_4; 3, 3)$	**0**	**0**		**78**
8	$(49_4; 5, 2)$	**0**	**0**		**1**
9	$(49_6; 17, 20)$	1	1		727
10	$(50_7; 35, 36)$	211	111		**1**

Klasifikacija malih primjera

Od ukupno 10 kombinatornih (10_3) konfiguracija, dvije su jako regularne.

Klasifikacija malih primjera

Od ukupno 10 kombinatornih (10_3) konfiguracija, dvije su jako regularne.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoje točno dvije $(10_3; 3, 4)$ konfiguracije.

Klasifikacija malih primjera

Od ukupno 10 kombinatornih (10_3) konfiguracija, dvije su jako regularne.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoje točno dvije $(10_3; 3, 4)$ konfiguracije.

Od ukupno 2036 komb. (13_3) konfiguracija, jedna je jako regularna.

Od ukupno 3 004 881 komb. (16_3) konfiguracija, jedna je jako regularna.

Klasifikacija malih primjera

Od ukupno 10 kombinatornih (10_3) konfiguracija, dvije su jako regularne.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoje točno dvije $(10_3; 3, 4)$ konfiguracije.

Od ukupno 2036 komb. (13_3) konfiguracija, jedna je jako regularna.

Od ukupno 3 004 881 komb. (16_3) konfiguracija, jedna je jako regularna.

Efikasniji pristup: preko pridruženih jako regularnih grafova.

Klasifikacija malih primjera

Od ukupno 10 kombinatornih (10_3) konfiguracija, dvije su jako regularne.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoje točno dvije $(10_3; 3, 4)$ konfiguracije.

Od ukupno 2036 komb. (13_3) konfiguracija, jedna je jako regularna.

Od ukupno 3 004 881 komb. (16_3) konfiguracija, jedna je jako regularna.

Efikasniji pristup: preko pridruženih jako regularnih grafova.

Neka je graf Γ s parametrima $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$ graf točaka $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije. Svaki pravac konfiguracije definira kliku veličine k u Γ. Prema tome, Γ mora imati bar v takvih klika od kojih se svake dvije sijeku najviše u jednoj točki.

Klasifikacija malih primjera

Od ukupno 10 kombinatornih (10_3) konfiguracija, dvije su jako regularne.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoje točno dvije $(10_3; 3, 4)$ konfiguracije.

Od ukupno 2036 komb. (13_3) konfiguracija, jedna je jako regularna.

Od ukupno 3 004 881 komb. (16_3) konfiguracija, jedna je jako regularna.

Efikasniji pristup: preko pridruženih jako regularnih grafova.

Neka je graf Γ s parametrima $SRG(v, k(k-1), \lambda, \mu)$ graf točaka $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije. Svaki pravac konfiguracije definira kliku veličine k u Γ. Prema tome, Γ mora imati bar v takvih klika od kojih se svake dvije sijeku najviše u jednoj točki.

$\rightsquigarrow$ Definiramo graf klika $\mathcal{C}(\Gamma)$ i u njemu tražimo klike veličine v.

Klasifikacija malih primjera

Postoji jedinstveni graf $SRG(13, 6, 2, 3)$ (Payleyev graf)

Klasifikacija malih primjera

Postoji jedinstveni graf $SRG(13, 6, 2, 3)$ (Payleyev graf)

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 26 vrhova, 286 bridova i dvije klike veličine 13 koje odgovaraju izomorfnim $(13_3; 2, 3)$ konfiguracijama.

Klasifikacija malih primjera

Postoji jedinstveni graf $SRG(13, 6, 2, 3)$ (Payleyev graf)

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 26 vrhova, 286 bridova i dvije klike veličine 13 koje odgovaraju izomorfnim $(13_3; 2, 3)$ konfiguracijama.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(13_3; 2, 3)$ konfiguracija.

Klasifikacija malih primjera

Postoji jedinstveni graf $SRG(13, 6, 2, 3)$ (Payleyev graf)

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 26 vrhova, 286 bridova i dvije klike veličine 13 koje odgovaraju izomorfnim $(13_3; 2, 3)$ konfiguracijama.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(13_3; 2, 3)$ konfiguracija.

Postoje dva $SRG(16, 6, 2, 2)$:

1. Shrikhandeov graf s $|\operatorname{Aut}(\Gamma)| = 192$

Klasifikacija malih primjera

Postoji jedinstveni graf $SRG(13, 6, 2, 3)$ (Payleyev graf)

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 26 vrhova, 286 bridova i dvije klike veličine 13 koje odgovaraju izomorfnim $(13_3; 2, 3)$ konfiguracijama.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(13_3; 2, 3)$ konfiguracija.

Postoje dva $SRG(16, 6, 2, 2)$:

1. Shrikhandeov graf s $|\operatorname{Aut}(\Gamma)| = 192$

   $\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i dvije klike veličine 16 koje odgovaraju izomorfnim $(16_3; 2, 2)$ konfiguracijama.

Klasifikacija malih primjera

Postoji jedinstveni graf $SRG(13, 6, 2, 3)$ (Payleyev graf)

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 26 vrhova, 286 bridova i dvije klike veličine 13 koje odgovaraju izomorfnim $(13_3; 2, 3)$ konfiguracijama.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(13_3; 2, 3)$ konfiguracija.

Postoje dva $SRG(16, 6, 2, 2)$:

1. Shrikhandeov graf s $|\operatorname{Aut}(\Gamma)| = 192$

   $\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i dvije klike veličine 16 koje odgovaraju izomorfnim $(16_3; 2, 2)$ konfiguracijama.
2. Topovski graf R_4 s $|\operatorname{Aut}(\Gamma)| = 1152$

Klasifikacija malih primjera

Postoji jedinstveni graf $SRG(13, 6, 2, 3)$ (Payleyev graf)

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 26 vrhova, 286 bridova i dvije klike veličine 13 koje odgovaraju izomorfnim $(13_3; 2, 3)$ konfiguracijama.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(13_3; 2, 3)$ konfiguracija.

Postoje dva $SRG(16, 6, 2, 2)$:

1. Shrikhandeov graf s $|\operatorname{Aut}(\Gamma)| = 192$

   $\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i dvije klike veličine 16 koje odgovaraju izomorfnim $(16_3; 2, 2)$ konfiguracijama.
2. Topovski graf R_4 s $|\operatorname{Aut}(\Gamma)| = 1152$

   $\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i nema klika veličine 16.

Klasifikacija malih primjera

Postoji jedinstveni graf $SRG(13, 6, 2, 3)$ (Payleyev graf)

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 26 vrhova, 286 bridova i dvije klike veličine 13 koje odgovaraju izomorfnim $(13_3; 2, 3)$ konfiguracijama.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(13_3; 2, 3)$ konfiguracija.

Postoje dva $SRG(16, 6, 2, 2)$:

1. Shrikhandeov graf s $|\operatorname{Aut}(\Gamma)| = 192$

   $\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i dvije klike veličine 16 koje odgovaraju izomorfnim $(16_3; 2, 2)$ konfiguracijama.
2. Topovski graf R_4 s $|\operatorname{Aut}(\Gamma)| = 1152$

   $\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}(\Gamma)$ ima 32 vrhova, 448 bridova i nema klika veličine 16.

Propozicija.

Do na izomorfizam postoji jedinstvena $(16_3; 2, 2)$ konfiguracija.

Klasifikacija malih primjera

Topovski graf R_n je $SRG(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$. Za $n = \binom{k}{2} + 1$ graf odgovara jako regularnoj konfiguraciji s parametrima $(v_k; \lambda, \mu)$, $v = n^2$, $\lambda = n - 2$, $\mu = 2$.

Klasifikacija malih primjera

Topovski graf R_n je $SRG(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$. Za $n = \binom{k}{2} + 1$ graf odgovara jako regularnoj konfiguraciji s parametrima $(v_k; \lambda, \mu)$, $v = n^2$, $\lambda = n - 2$, $\mu = 2$.

Teorem.

Topovski graf R_n, $n = \binom{k}{2} + 1$ ne može biti graf točaka jako regularne $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije.

Klasifikacija malih primjera

Topovski graf R_n je $SRG(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$. Za $n = \binom{k}{2} + 1$ graf odgovara jako regularnoj konfiguraciji s parametrima $(v_k; \lambda, \mu)$, $v = n^2$, $\lambda = n - 2$, $\mu = 2$.

Teorem.

Topovski graf R_n, $n = \binom{k}{2} + 1$ ne može biti graf točaka jako regularne $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije.

S. S. Shrikhande, *The uniqueness of the L_2 association scheme*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 781–798.

Za $n > 4$, jedini jako regularni graf $SRG(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$ je R_n.

Klasifikacija malih primjera

Topovski graf R_n je $SRG(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$. Za $n = \binom{k}{2} + 1$ graf odgovara jako regularnoj konfiguraciji s parametrima $(v_k; \lambda, \mu)$, $v = n^2$, $\lambda = n - 2$, $\mu = 2$.

Teorem.

Topovski graf R_n, $n = \binom{k}{2} + 1$ ne može biti graf točaka jako regularne $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije.

S. S. Shrikhande, *The uniqueness of the L_2 association scheme*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 781–798.

Za $n > 4$, jedini jako regularni graf $SRG(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$ je R_n.

Korolar.

Za $k > 3$ ne postoje jako regularne $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije s parametrima $v = \left(\binom{k}{2} + 1\right)^2$, $\lambda = \binom{k}{2} - 1$, $\mu = 2$.

Klasifikacija malih primjera

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	#SRCf	#SSRCf	#Cf	#SRG
1	$(10_3; 3, 4)$	**2**	**2**	**10**	**1**
2	$(13_3; 2, 3)$	**1**	**1**	**2036**	**1**
3	$(16_3; 2, 2)$	**1**	**1**	**3 004 881**	**2**
4	$(25_4; 5, 6)$	**0**	**0**		**15**
5	$(36_5; 10, 12)$	1	1		**32548**
6	$(41_5; 9, 10)$	?	?		80
7	$(45_4; 3, 3)$	**0**	**0**		**78**
8	$(49_4; 5, 2)$	**0**	**0**		**1**
9	$(49_6; 17, 20)$	1	1		727
10	$(50_7; 35, 36)$	211	111		**1**

Klasifikacija malih primjera

Propozicija.

Ne postoje jako regularne $(25_4; 5, 6)$ konfiguracije.

Klasifikacija malih primjera

Propozicija.

Ne postoje jako regularne $(25_4; 5, 6)$ konfiguracije.

Postoji točno 15 jako regularnih grafova $SRG(25, 12, 5, 6)$. *Cliquer* nalazi od 73 do 90 klika veličine 4 u tim grafovima, ali odgovarajući grafovi $\mathcal{C}(\Gamma)$ ne sadrže kliku veličine 25.

Klasifikacija malih primjera

Propozicija.

Ne postoje jako regularne $(25_4; 5, 6)$ konfiguracije.

Postoji točno 15 jako regularnih grafova $SRG(25, 12, 5, 6)$. *Cliquer* nalazi od 73 do 90 klika veličine 4 u tim grafovima, ali odgovarajući grafovi $\mathcal{C}(\Gamma)$ ne sadrže kliku veličine 25.

Propozicija.

Ne postoje jako regularne $(45_4; 3, 3)$ konfiguracije.

Klasifikacija malih primjera

Propozicija.

Ne postoje jako regularne $(25_4; 5, 6)$ konfiguracije.

Postoji točno 15 jako regularnih grafova $SRG(25, 12, 5, 6)$. *Cliquer* nalazi od 73 do 90 klika veličine 4 u tim grafovima, ali odgovarajući grafovi $\mathcal{C}(\Gamma)$ ne sadrže kliku veličine 25.

Propozicija.

Ne postoje jako regularne $(45_4; 3, 3)$ konfiguracije.

Postoji točno 78 jako regularnih grafova $SRG(45, 12, 3, 3)$. *Cliquer* nalazi od 12 do 135 klika veličine 4 u tim grafovima, ali odgovarajući grafovi $\mathcal{C}(\Gamma)$ ne sadrže kliku veličine 45.

Klasifikacija malih primjera

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	#SRCf	#SSRCf	#Cf	#SRG
1	$(10_3; 3, 4)$	**2**	**2**	**10**	**1**
2	$(13_3; 2, 3)$	**1**	**1**	**2036**	**1**
3	$(16_3; 2, 2)$	**1**	**1**	**3 004 881**	**2**
4	$(25_4; 5, 6)$	**0**	**0**		**15**
5	$(36_5; 10, 12)$	1	1		**32548**
6	$(41_5; 9, 10)$	?	?		80
7	$(45_4; 3, 3)$	**0**	**0**		**78**
8	$(49_4; 5, 2)$	**0**	**0**		**1**
9	$(49_6; 17, 20)$	1	1		727
10	$(50_7; 35, 36)$	211	111		**1**

Klasifikacija malih primjera

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	#SRCf	#SSRCf	#Cf	#SRG
1	$(10_3; 3, 4)$	**2**	**2**	**10**	**1**
2	$(13_3; 2, 3)$	**1**	**1**	**2036**	**1**
3	$(16_3; 2, 2)$	**1**	**1**	**3 004 881**	**2**
4	$(25_4; 5, 6)$	**0**	**0**		**15**
5	$(36_5; 10, 12)$	1	1		**32548**
6	$(41_5; 9, 10)$	?	?		80
7	$(45_4; 3, 3)$	**0**	**0**		**78**
8	$(49_4; 5, 2)$	**0**	**0**		**1**
9	$(49_6; 17, 20)$	1	1		727
10	$(50_7; 35, 36)$	211	111		**1**

Klasifikacija malih primjera

Jako regularni graf $SRG(50, 42, 35, 36)$ je jedinstven i izomorfan komplementu Hoffman-Singletonova grafa. Taj graf ima 2 708 150 klika veličine 7, što je broj vrhova od $\mathcal{C}(\Gamma)$. Treba naći sve klike veličine 50 u $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Klasifikacija malih primjera

Jako regularni graf $SRG(50, 42, 35, 36)$ je jedinstven i izomorfan komplementu Hoffman-Singletonova grafa. Taj graf ima 2 708 150 klika veličine 7, što je broj vrhova od $\mathcal{C}(\Gamma)$. Treba naći sve klike veličine 50 u $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Postoji točno 32 548 neizomorfnih jako regularnih grafova $SRG(36, 20, 10, 12)$. Svaki ima oko 200-300 klika veličine 4, što je broj vrhova od $\mathcal{C}(\Gamma)$. Treba naći sve klike veličine 36 u tih 32 548 grafova $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Klasifikacija malih primjera

Jako regularni graf $SRG(50, 42, 35, 36)$ je jedinstven i izomorfan komplementu Hoffman-Singletonova grafa. Taj graf ima 2 708 150 klika veličine 7, što je broj vrhova od $\mathcal{C}(\Gamma)$. Treba naći sve klike veličine 50 u $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Postoji točno 32 548 neizomorfnih jako regularnih grafova $SRG(36, 20, 10, 12)$. Svaki ima oko 200-300 klika veličine 4, što je broj vrhova od $\mathcal{C}(\Gamma)$. Treba naći sve klike veličine 36 u tih 32 548 grafova $\mathcal{C}(\Gamma)$.

To je posao za `fano`!

Klasifikacija malih primjera

Jako regularni graf $SRG(50, 42, 35, 36)$ je jedinstven i izomorfan komplementu Hoffman-Singletonova grafa. Taj graf ima 2 708 150 klika veličine 7, što je broj vrhova od $\mathcal{C}(\Gamma)$. Treba naći sve klike veličine 50 u $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Postoji točno 32 548 neizomorfnih jako regularnih grafova $SRG(36, 20, 10, 12)$. Svaki ima oko 200-300 klika veličine 4, što je broj vrhova od $\mathcal{C}(\Gamma)$. Treba naći sve klike veličine 36 u tih 32 548 grafova $\mathcal{C}(\Gamma)$.

To je posao za `fano`!

Eliptičke poluravnine

Eliptička poluravnina je jako regularna konfiguracija kojoj je graf točaka potpuni multipartitni graf.

Eliptičke poluravnine

Eliptička poluravnina je jako regularna konfiguracija kojoj je graf točaka potpuni multipartitni graf.

Alternativno: nekolinearnost je relacija ekvivalencije, ili $\mu = k(k-1)$.

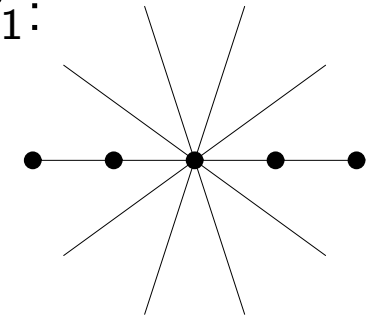
Eliptičke poluravnine

Eliptička poluravnina je jako regularna konfiguracija kojoj je graf točaka potpuni multipartitni graf.

Alternativno: nekolinearnost je relacija ekvivalencije, ili $\mu = k(k-1)$.

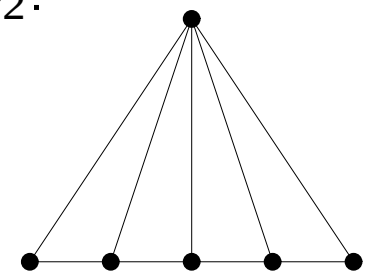
Eliptičke poluravnine dobivaju se kao $\mathcal{P} - B$, pri čemu je $\mathcal{P}$ projektivna ravnina reda n, a B je zatvoren Baerov podskup:

B_1:



$v = n^2$, $k = n$

B_2:



$v = n^2 - 1$, $k = n$

B_3:

Baerova podravnina (reda $\sqrt{n}$)

$v = n^2 - \sqrt{n}$, $k = n$

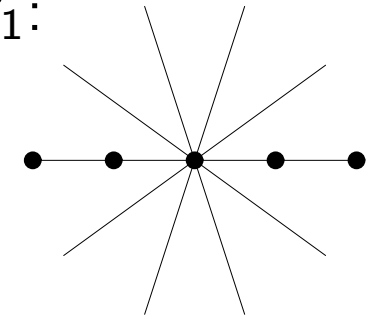
Eliptičke poluravnine

Eliptička poluravnina je jako regularna konfiguracija kojoj je graf točaka potpuni multipartitni graf.

Alternativno: nekolinearnost je relacija ekvivalencije, ili $\mu = k(k-1)$.

Eliptičke poluravnine dobivaju se kao $\mathcal{P} - B$, pri čemu je $\mathcal{P}$ projektivna ravnina reda n, a B je zatvoren Baerov podskup:

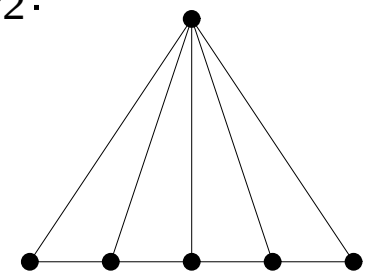
B_1:



$v = n^2,\ k = n$

$d = k - 1$

B_2:



$v = n^2 - 1,\ k = n$

$d = k - 2$

B_3:

Baerova podravnina (reda $\sqrt{n}$)

$v = n^2 - \sqrt{n},\ k = n$

$d = k - \sqrt{k} - 1$

Deficijencija konfiguracije je broj točaka nekolinearnih s danom točkom: $d = v - r(k-1) - 1$.

Eliptičke poluravnine

P. Dembowski, *Finite geometries*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44, Springer-Verlag, 1968.

Teorem.

Deficijencija eliptičke poluravnine je $d = 0$, $d = k - 1$, $d = k - 2$ ili vrijedi nejednakost $d \leq k - \sqrt{k} - 1$. U prva tri slučaja i ako vrijedi jednakost $d = k - \sqrt{k} - 1$, eliptička poluravnina je oblika $\mathcal{P} - B$. Nadalje, ako vrijedi $d = 0$ ili $d \leq k - \sqrt{k} - 1$, onda klase nekolinearnih točaka i paralelnih pravaca tvore simetrični dizajn s parametrima $(v/(d+1), k, d+1)$.

Eliptičke poluravnine

P. Dembowski, *Finite geometries*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44, Springer-Verlag, 1968.

Teorem.

Deficijencija eliptičke poluravnine je $d = 0$, $d = k - 1$, $d = k - 2$ ili vrijedi nejednakost $d \leq k - \sqrt{k} - 1$. U prva tri slučaja i ako vrijedi jednakost $d = k - \sqrt{k} - 1$, eliptička poluravnina je oblika $\mathcal{P} - B$. Nadalje, ako vrijedi $d = 0$ ili $d \leq k - \sqrt{k} - 1$, onda klase nekolinearnih točaka i paralelnih pravaca tvore simetrični dizajn s parametrima $(v/(d+1), k, d+1)$.

Poznata su samo dva primjera koja nisu oblika $\mathcal{P} - B$:

1. $(45_7; 39, 42) \rightsquigarrow$ graf $K_{15\times 3}$, SBIBD $(15, 7, 3)$

R. D. Baker, *An elliptic semiplane*, J. Combin. Theory Ser. A **25** (1978), 193–195.

2. $(135_{12}; 129, 132) \rightsquigarrow$ graf $K_{45\times 3}$, SBIBD $(45, 12, 3)$

R. Mathon, *Divisible semiplanes*, in: *Handbook of combinatorial designs. Second edition*, Chapman & Hall/CRC, 2007, pp. 729–731.

Familija s parametrima koji ne odgovaraju $spg(s, t, \alpha, \mu)$

Teorem.

Neka je $\mathcal{P}$ projektivna ravnina reda $n \geq 5$ i A, B, C tri nekolinearne točke. Ako izbacimo sve točke na pravcima AB, AC, BC i sve pravce kroz točke A, B, C, ostaje jako regularna $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracija s $v = (n-1)^2$, $k = n-2$, $\lambda = (n-4)^2 + 1$ i $\mu = (n-3)(n-4)$. Ta konfiguracija nije (α, β)-geometrija.

Familija s parametrima koji ne odgovaraju $spg(s, t, \alpha, \mu)$

Teorem.

Neka je $\mathcal{P}$ projektivna ravnina reda $n \geq 5$ i A, B, C tri nekolinearne točke. Ako izbacimo sve točke na pravcima AB, AC, BC i sve pravce kroz točke A, B, C, ostaje jako regularna $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracija s $v = (n-1)^2$, $k = n-2$, $\lambda = (n-4)^2 + 1$ i $\mu = (n-3)(n-4)$. Ta konfiguracija nije (α, β)-geometrija.

Pridruženi jako regularni grafovi imaju parametre

$$SRG((n-1)^2, (n-2)(n-3), (n-4)^2 + 1, (n-3)(n-4)).$$

To su "pseudo Latin square graphs" koji imaju iste parametre kao graf $LS_{n-3}(n-1)$ definiran od $n-5$ međusobno ortogonalnih latinskih kvadrata reda $n-1$.

Familija s parametrima koji ne odgovaraju $spg(s, t, \alpha, \mu)$

Teorem.

Neka je $\mathcal{P}$ projektivna ravnina reda $n \geq 5$ i A, B, C tri nekolinearne točke. Ako izbacimo sve točke na pravcima AB, AC, BC i sve pravce kroz točke A, B, C, ostaje jako regularna $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracija s $v = (n-1)^2$, $k = n-2$, $\lambda = (n-4)^2 + 1$ i $\mu = (n-3)(n-4)$. Ta konfiguracija nije (α, β)-geometrija.

Pridruženi jako regularni grafovi imaju parametre

$$SRG((n-1)^2, (n-2)(n-3), (n-4)^2 + 1, (n-3)(n-4)).$$

To su "pseudo Latin square graphs" koji imaju iste parametre kao graf $LS_{n-3}(n-1)$ definiran od $n-5$ međusobno ortogonalnih latinskih kvadrata reda $n-1$.

Za $n = 5$ dobijemo jedinstvenu $(16_3; 2, 2)$ konfiguraciju i Shrikhandeov graf, koji **nije** $LS_2(4) = R_4$. Za $n = 7$ graf **nije** $LS_4(6)$ jer ne postoje ortogonalni latinski kvadrati reda 6.

Familija s parametrima koji ne odgovaraju $spg(s, t, \alpha, \mu)$

U klasičnoj projektivnoj ravnini $\mathcal{P} = PG(2, q)$ svi trokuti su međusobno ekvivalentni i dobivamo samo jednu jako regularnu konfiguraciju.

Familija s parametrima koji ne odgovaraju $spg(s, t, \alpha, \mu)$

U klasičnoj projektivnoj ravnini $\mathcal{P} = PG(2, q)$ svi trokuti su međusobno ekvivalentni i dobivamo samo jednu jako regularnu konfiguraciju.

Od neklasičnih ravnina dobivamo više neizomorfnih konfiguracija:

Ravnina	$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#SRCf	Ravnina	$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#SRCf
$PG(2, 9)$	768	1	Hughesova	144	1
Hallova	768	1		48	1
	96	2		32	1
	12	2		18	1
	6	1		12	3
Dualna Hallova	768	1		6	4
	96	2		4	3
	12	2		2	1
	6	1		1	1

Familija s parametrima koji ne odgovaraju $spg(s, t, \alpha, \mu)$

U klasičnoj projektivnoj ravnini $\mathcal{P} = PG(2, q)$ svi trokuti su međusobno ekvivalentni i dobivamo samo jednu jako regularnu konfiguraciju.

Od neklasičnih ravnina dobivamo više neizomorfnih konfiguracija:

Ravnina	$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#SRCf	Ravnina	$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#SRCf
$PG(2, 9)$	768	1	Hughesova	144	1
Hallova	768	1		48	1
	96	2		32	1
	12	2		18	1
	6	1		12	3
Dualna Hallova	768	1		6	4
	96	2		4	3
	12	2		2	1
	6	1		1	1

Ukupan broj konstruiranih $(64_7; 26, 30)$ konfiguracija: 29.

Familija s parametrima koji ne odgovaraju $spg(s, t, \alpha, \mu)$

U klasičnoj projektivnoj ravnini $\mathcal{P} = PG(2, q)$ svi trokuti su međusobno ekvivalentni i dobivamo samo jednu jako regularnu konfiguraciju.

Od neklasičnih ravnina dobivamo više neizomorfnih konfiguracija:

Ravnina	$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#SRCf	Ravnina	$\lvert \mathrm{Aut} \rvert$	#SRCf
$PG(2, 9)$	768	1	Hughesova	144	1
Hallova	768	1		48	1
	96	2		32	1
	12	2		18	1
	6	1		12	3
Dualna Hallova	768	1		6	4
	96	2		4	3
	12	2		2	1
	6	1		1	1

Ukupan broj konstruiranih $(64_7; 26, 30)$ konfiguracija: 29. Jesu li to sve?

Familija s parametrima koji ne odgovaraju $spg(s, t, \alpha, \mu)$

Pitanje 2:

Može li se svaka $((n-1)^2_{n-2}; (n-4)^2+1, (n-3)(n-4))$ konfiguracija proširiti do (jedinstvene) projektivne ravnine reda n?

Familija s parametrima koji ne odgovaraju $spg(s, t, \alpha, \mu)$

Pitanje 2:

Može li se svaka $((n-1)^2_{n-2}; (n-4)^2+1, (n-3)(n-4))$ konfiguracija proširiti do (jedinstvene) projektivne ravnine reda n?

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	n	#Ravnina	#SRCf	#SSRCf	#SRG
3	$(16_3; 2, 2)$	5	**1**	**1**	**1**	**2**
4	$(25_4; 5, 6)$	6	**0**	**0**	**0**	**15**
5	$(36_5; 10, 12)$	7	**1**	1	1	**32 548**
9	$(49_6; 17, 20)$	8	**1**	1	1	727
13	$(64_7; 26, 30)$	9	**4**	29	11	500 000
14	$(81_8; 37, 42)$	10	**0**	?	?	21 392 603
19	$(100_9; 50, 56)$	11	1	1	1	+
26	$(121_{10}; 65, 72)$	12	?	?	?	+
30	$(144_{11}; 82, 90)$	13	1	1	1	+
35	$(169_{12}; 101, 110)$	14	**0**	?	?	+
40	$(196_{13}; 122, 132)$	15	?	?	?	+

Familija s parametrima koji ne odgovaraju $spg(s, t, \alpha, \mu)$

Pitanje 2:

Ako se svaka $((n-1)^2_{n-2}; (n-4)^2+1, (n-3)(n-4))$ konfiguracija može proširiti do jedinstvene projektivne ravnine reda n...

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	n	#Ravnina	#SRCf	#SSRCf	#SRG
3	$(16_3; 2, 2)$	5	**1**	**1**	**1**	**2**
4	$(25_4; 5, 6)$	6	**0**	**0**	**0**	**15**
5	$(36_5; 10, 12)$	7	**1**	**1**	**1**	**32 548**
9	$(49_6; 17, 20)$	8	**1**	**1**	**1**	727
13	$(64_7; 26, 30)$	9	**4**	**29**	**11**	500 000
14	$(81_8; 37, 42)$	10	**0**	**0**	**0**	21 392 603
19	$(100_9; 50, 56)$	11	1	1	1	+
26	$(121_{10}; 65, 72)$	12	?	?	?	+
30	$(144_{11}; 82, 90)$	13	1	1	1	+
35	$(169_{12}; 101, 110)$	14	**0**	**0**	**0**	+
40	$(196_{13}; 122, 132)$	15	?	?	?	+

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

$G =$ grupa reda v, $D \subseteq G$, $|D| = k$.

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

$G =$ grupa reda v, $D \subseteq G$, $|D| = k$.

Diferencijski skup s parametrima $(v, k, 1) \rightsquigarrow$ projektivna ravnina.

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

$G =$ grupa reda v, $D \subseteq G$, $|D| = k$.

Diferencijski skup s parametrima $(v, k, 1) \rightsquigarrow$ projektivna ravnina.

Deficijentni diferencijski skup $\rightsquigarrow$ simetrična (v_k) konfiguracija.

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

$G =$ grupa reda v, $D \subseteq G$, $|D| = k$.

Diferencijski skup s parametrima $(v, k, 1) \rightsquigarrow$ projektivna ravnina.

Deficijentni diferencijski skup $\rightsquigarrow$ simetrična (v_k) konfiguracija.

Jaki deficijentni diferencijski skup $\rightsquigarrow$ jako regularna konfiguracija.

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

$G =$ grupa reda v, $D \subseteq G$, $|D| = k$.

Diferencijski skup s parametrima $(v, k, 1) \rightsquigarrow$ projektivna ravnina.

Deficijentni diferencijski skup $\rightsquigarrow$ simetrična (v_k) konfiguracija.

Jaki deficijentni diferencijski skup $\rightsquigarrow$ jako regularna konfiguracija.

Za D kažemo da je jaki deficijentni diferencijski skup (SDDS) za $(v_k; \lambda, \mu)$ ako zadovoljava:

1. $|\Delta(D)| = k(k-1)$,
2. za svaki $x \in \Delta(D)$ vrijedi $|\Delta(D) \cap x\Delta(D)| = \lambda$,
3. za svaki $x \notin \Delta(D)$ vrijedi $|\Delta(D) \cap x\Delta(D)| = \mu$.

Pritom je $\Delta(D) = \{d_1^{-1} d_2 \mid d_1, d_2 \in D, d_1 \neq d_2\}$ "skup razlika" od D.

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

Teorem.

Neka je G grupa i $D \subseteq G$ jaki deficijentni diferencijski skup za $(v_k; \lambda, \mu)$. Onda je $\operatorname{dev} D = \{gD \mid g \in G\}$ skup pravaca jako regularne $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije s grupom automorfizama G koja djeluje regularno na točke i pravce. Obrnuto, svaku jako regularnu $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguraciju koja ima takvu grupu automorfizama G možemo dobiti od SDDS-a u G.

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

Teorem.

Neka je G grupa i $D \subseteq G$ jaki deficijentni diferencijski skup za $(v_k; \lambda, \mu)$. Onda je $\operatorname{dev} D = \{gD \mid g \in G\}$ skup pravaca jako regularne $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije s grupom automorfizama G koja djeluje regularno na točke i pravce. Obrnuto, svaku jako regularnu $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguraciju koja ima takvu grupu automorfizama G možemo dobiti od SDDS-a u G.

Primjer 1. Konfiguracija dobivena brisanjem trokuta iz $PG(2, q)$, $q \geq 5$, može se konstruirati pomoću SDDS-a u grupi $G = \mathbb{F}_q^* \times \mathbb{F}_q^*$:

$$D = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{F}_q^* \setminus \{-1\}\}.$$

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

Teorem.

Neka je G grupa i $D \subseteq G$ jaki deficijentni diferencijski skup za $(v_k; \lambda, \mu)$. Onda je $\operatorname{dev} D = \{gD \mid g \in G\}$ skup pravaca jako regularne $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije s grupom automorfizama G koja djeluje regularno na točke i pravce. Obrnuto, svaku jako regularnu $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguraciju koja ima takvu grupu automorfizama G možemo dobiti od SDDS-a u G.

Primjer 1. Konfiguracija dobivena brisanjem trokuta iz $PG(2, q)$, $q \geq 5$, može se konstruirati pomoću SDDS-a u grupi $G = \mathbb{F}_q^* \times \mathbb{F}_q^*$:

$$D = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{F}_q^* \setminus \{-1\}\}.$$

Primjer 2. Konfiguracije dobivene od Hallove i dualne Hallove ravnine reda 9 mogu se konstruirati pomoću SDDS-ova u grupi $G = Q_8 \times Q_8$:

$$D_1 = \{(1,1), (i,-k), (j,k), (k,-j), (-i,j), (-j,i), (-k,-i)\},$$

$$D_2 = \{(1,1), (i,-k), (j,j), (k,-j), (-i,-i), (-j,i), (-k,k)\}.$$

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

Primjer 3. Skup $D = \{7, 8, 11\}$ je SDDS u cikličkoj grupi $G = \mathbb{Z}_{13}$

$\rightsquigarrow$ ciklička $(13_3; 2, 3)$ konfiguracija.

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

Primjer 3. Skup $D = \{7, 8, 11\}$ je SDDS u cikličkoj grupi $G = \mathbb{Z}_{13}$

$\rightsquigarrow$ ciklička $(13_3; 2, 3)$ konfiguracija.

Pitanje 3:

Je li ovo jedini primjer cikličke jako regularne konfiguracije?
(prave i primitivne; Singerovi diferencijski skupovi $\rightsquigarrow$ $PG(2, q)$ su cikličke)

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

Primjer 3. Skup $D = \{7, 8, 11\}$ je SDDS u cikličkoj grupi $G = \mathbb{Z}_{13}$

$\rightsquigarrow$ ciklička $(13_3; 2, 3)$ konfiguracija.

Pitanje 3:

Je li ovo jedini primjer cikličke jako regularne konfiguracije?
(prave i primitivne; Singerovi diferencijski skupovi $\rightsquigarrow$ $PG(2, q)$ su cikličke)

Poznata hipoteza: cikličke Hadamardove matrice postoje samo za redove $n = 1$ i $n = 4$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

Primjer 3. Skup $D = \{7, 8, 11\}$ je SDDS u cikličkoj grupi $G = \mathbb{Z}_{13}$

$\rightsquigarrow$ ciklička $(13_3; 2, 3)$ konfiguracija.

Pitanje 3:

Je li ovo jedini primjer cikličke jako regularne konfiguracije?
(prave i primitivne; Singerovi diferencijski skupovi $\rightsquigarrow$ $PG(2, q)$ su cikličke)

Poznata hipoteza: cikličke Hadamardove matrice postoje samo za redove $n = 1$ i $n = 4$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dokaz za $n = 2^k$, $k \geq 3$:

R. P. Stanley, *Algebraic Combinatorics. Walks, Trees, Tableaux, and More*, 2nd edition, Springer, 2018.

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

Primjer 3. Skup $D = \{7, 8, 11\}$ je SDDS u cikličkoj grupi $G = \mathbb{Z}_{13}$

$\rightsquigarrow$ ciklička $(13_3; 2, 3)$ konfiguracija.

Pitanje 3:

Je li ovo jedini primjer cikličke jako regularne konfiguracije?
(prave i primitivne; Singerovi diferencijski skupovi $\rightsquigarrow$ $PG(2, q)$ su cikličke)

Poznata hipoteza: cikličke Hadamardove matrice postoje samo za redove $n = 1$ i $n = 4$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dokaz za $n = 2^k$, $k \geq 3$:

R. P. Stanley, *Algebraic Combinatorics. Walks, Trees, Tableaux, and More*, 2nd edition, Springer, 2018.

R. J. Turyn: dokaz za $n = 8k$ i neke redove oblika $n = 4(2k + 1)$.

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

S. L. Ma, *A survey of partial difference sets*, Des. Codes Cryptogr. **4** (1994), no. 3, 221–261.

Parcijalni diferencijski skup s parametrima (v, k, λ, μ): za svaki $x \in G$, $x \neq 1$, broj parova $(d_1, d_2) \in D \times D$ takvih da je $x = d_1 d_2^{-1}$ je λ ako je $x \in D$, a μ ako $x \notin D$.

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

S. L. Ma, *A survey of partial difference sets*, Des. Codes Cryptogr. **4** (1994), no. 3, 221–261.

Parcijalni diferencijski skup s parametrima (v, k, λ, μ): za svaki $x \in G$, $x \neq 1$, broj parova $(d_1, d_2) \in D \times D$ takvih da je $x = d_1 d_2^{-1}$ je λ ako je $x \in D$, a μ ako $x \notin D$.

Za $\lambda = \mu$, to je obični (v, k, λ) diferencijski skup.

Ako je $\lambda \neq \mu$, onda vrijedi $D = D^{(-1)}$. Ako uz to $1 \notin D$, Cayleyev graf generiran s D je jako regularan s parametrima $SRG(v, k, \lambda, \mu)$. Takve PDS-ove nazivamo regularnim.

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

S. L. Ma, *A survey of partial difference sets*, Des. Codes Cryptogr. **4** (1994), no. 3, 221–261.

Parcijalni diferencijski skup s parametrima (v, k, λ, μ): za svaki $x \in G$, $x \neq 1$, broj parova $(d_1, d_2) \in D \times D$ takvih da je $x = d_1 d_2^{-1}$ je λ ako je $x \in D$, a μ ako $x \notin D$.

Za $\lambda = \mu$, to je obični (v, k, λ) diferencijski skup.

Ako je $\lambda \neq \mu$, onda vrijedi $D = D^{(-1)}$. Ako uz to $1 \notin D$, Cayleyev graf generiran s D je jako regularan s parametrima $SRG(v, k, \lambda, \mu)$. Takve PDS-ove nazivamo regularnim.

K. H. Leung, S. L. Ma, B. Schmidt, *Proper partial geometries with Singer groups and pseudogeometric partial difference sets*, J. Combin. Theory Ser. A **115** (2008), no. 1, 147–177.

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

PDS je pseudogeometrijski ako je regularan i ima parametre oblika $v = (s+1)(st+\alpha)/\alpha$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$, a geometrijski ako zaista dolazi od parcijalne geometrije $pg(s,t,\alpha)$ s grupom automorfizama G koja djeluje regularno na točke.

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

PDS je pseudogeometrijski ako je regularan i ima parametre oblika $v = (s+1)(st+\alpha)/\alpha$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$, a geometrijski ako zaista dolazi od parcijalne geometrije $pg(s,t,\alpha)$ s grupom automorfizama G koja djeluje regularno na točke.

Pitanje 4:

Veza SDDS-ova i (pseudo)geometrijskih PDS-ova?

Jaki deficijentni diferencijski skupovi

PDS je pseudogeometrijski ako je regularan i ima parametre oblika $v = (s+1)(st+\alpha)/\alpha$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$, a geometrijski ako zaista dolazi od parcijalne geometrije $pg(s,t,\alpha)$ s grupom automorfizama G koja djeluje regularno na točke.

Pitanje 4:

Veza SDDS-ova i (pseudo)geometrijskih PDS-ova?

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, preprint. https://arxiv.org/abs/2104.04880

GAP sadrži *The Small Groups Library*. Klasificirali smo SDDS-ove u svim grupama reda $v \leq 200$. Dobili smo dosta primjera jako regularnih konfiguracija, od kojih smo neke uspjeli generalizirati do općih familija.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Primjer.

SDDS za $(155_7; 17, 9)$ postoji u grupi $G = \mathbb{Z}_{31} : \mathbb{Z}_5$.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Primjer.

SDDS za $(155_7; 17, 9)$ postoji u grupi $G = \mathbb{Z}_{31} : \mathbb{Z}_5$.

Puna grupa automorfizama odgovarajuće $(155_7; 17, 9)$ konfiguracije je $P\Gamma L(5, 2)$

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Primjer.

SDDS za $(155_7; 17, 9)$ postoji u grupi $G = \mathbb{Z}_{31} : \mathbb{Z}_5$.

Puna grupa automorfizama odgovarajuće $(155_7; 17, 9)$ konfiguracije je $P\Gamma L(5, 2) \rightsquigarrow$ u pozadini je projektivni prostor $PG(4, 2)$!

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Primjer.

SDDS za $(155_7; 17, 9)$ postoji u grupi $G = \mathbb{Z}_{31} : \mathbb{Z}_5$.

Puna grupa automorfizama odgovarajuće $(155_7; 17, 9)$ konfiguracije je $P\Gamma L(5, 2) \rightsquigarrow$ u pozadini je projektivni prostor $PG(4, 2)$!

Konstrukcija

TOČKE: pravci u $PG(4, q)$, PRAVCI: 2-ravnine u $PG(4, q)$, incidencija: $\subseteq$

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Primjer.

SDDS za $(155_7; 17, 9)$ postoji u grupi $G = \mathbb{Z}_{31} : \mathbb{Z}_5$.

Puna grupa automorfizama odgovarajuće $(155_7; 17, 9)$ konfiguracije je $P\Gamma L(5, 2) \rightsquigarrow$ u pozadini je projektivni prostor $PG(4, 2)$!

Konstrukcija

TOČKE: pravci u $PG(4, q)$, PRAVCI: 2-ravnine u $PG(4, q)$, incidencija: $\subseteq$

$\rightsquigarrow (v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracija za $v = (q^2 + 1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$,

$k = q^2 + q + 1$, $\lambda = q^3 + 2q^2 + q - 1$, $\mu = (q + 1)^2$

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Primjer.

SDDS za $(155_7; 17, 9)$ postoji u grupi $G = \mathbb{Z}_{31} : \mathbb{Z}_5$.

Puna grupa automorfizama odgovarajuće $(155_7; 17, 9)$ konfiguracije je $P\Gamma L(5, 2) \rightsquigarrow$ u pozadini je projektivni prostor $PG(4, 2)$!

Konstrukcija

TOČKE: pravci u $PG(4, q)$, PRAVCI: 2-ravnine u $PG(4, q)$, incidencija: $\subseteq$

$\rightsquigarrow (v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracija za $v = (q^2 + 1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$,

$k = q^2 + q + 1$, $\lambda = q^3 + 2q^2 + q - 1$, $\mu = (q + 1)^2$

$\rightsquigarrow$ semiparcijalna geometrija $spg(q(q + 1), q(q + 1), q + 1, (q + 1)^2)$

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Primjer.

SDDS za $(155_7; 17, 9)$ postoji u grupi $G = \mathbb{Z}_{31} : \mathbb{Z}_5$.

Puna grupa automorfizama odgovarajuće $(155_7; 17, 9)$ konfiguracije je $P\Gamma L(5, 2) \rightsquigarrow$ u pozadini je projektivni prostor $PG(4, 2)$!

Konstrukcija

TOČKE: pravci u $PG(4, q)$, PRAVCI: 2-ravnine u $PG(4, q)$, incidencija: $\subseteq$

$\rightsquigarrow (v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracija za $v = (q^2 + 1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$,

$k = q^2 + q + 1$, $\lambda = q^3 + 2q^2 + q - 1$, $\mu = (q + 1)^2$

$\rightsquigarrow$ semiparcijalna geometrija $spg(q(q + 1), q(q + 1), q + 1, (q + 1)^2)$

I. Debroey, J. A. Thas, *On semipartial geometries*, J. Comb. Theory A **25** (1978), 242–250.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Familija (g): $LP(n,q)$, $n \geq 3$

TOČKE: pravci u $PG(n,q)$, PRAVCI: 2-ravnine u $PG(n,q)$, incidencija: $\subseteq$

$\rightsquigarrow$ semiparcijalna geometrija $spg(q(q+1), \frac{q^{n-1}-1}{q-1} - 1, q+1, (q+1)^2)$

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Familija (g): $LP(n,q)$, $n \geq 3$

TOČKE: pravci u $PG(n,q)$, PRAVCI: 2-ravnine u $PG(n,q)$, incidencija: $\subseteq$

$\rightsquigarrow$ semiparcijalna geometrija $spg(q(q+1), \frac{q^{n-1}-1}{q-1} - 1, q+1, (q+1)^2)$

$\rightsquigarrow$ parcijalna geometrija ako i samo ako je $n = 3$

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Familija (g): $LP(n,q)$, $n \geq 3$

TOČKE: pravci u $PG(n,q)$, PRAVCI: 2-ravnine u $PG(n,q)$, incidencija: $\subseteq$

$\rightsquigarrow$ semiparcijalna geometrija $spg(q(q+1), \frac{q^{n-1}-1}{q-1} - 1, q+1, (q+1)^2)$

$\rightsquigarrow$ parcijalna geometrija ako i samo ako je $n = 3$

$\rightsquigarrow$ simetrična ako i samo ako je $n = 4$

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Familija (g): $LP(n,q)$, $n \geq 3$

TOČKE: pravci u $PG(n,q)$, PRAVCI: 2-ravnine u $PG(n,q)$, incidencija: $\subseteq$

$\rightsquigarrow$ semiparcijalna geometrija $spg(q(q+1), \frac{q^{n-1}-1}{q-1} - 1, q+1, (q+1)^2)$

$\rightsquigarrow$ parcijalna geometrija ako i samo ako je $n = 3$

$\rightsquigarrow$ simetrična ako i samo ako je $n = 4$

Konstrukcija sa zadanim podgrupama od $P\Gamma L(5,2)$

$\rightsquigarrow$ par dualnih $(155_7; 17, 9)$ konfiguracija s $\mathrm{Aut} \cong (\mathbb{Z}_2)^4 : P\Gamma L(4,2)$

$\rightsquigarrow$ samodualna $(155_7; 17, 9)$ konfiguracija s $\mathrm{Aut} \cong P\Gamma L(4,2)$

(pune grupe nisu tranzitivne i te konfiguracije se ne mogu dobiti od SDDS)

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Teorem.

Za svaku prim potenciju q postoje barem četiri $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije s parametrima $v = (q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$, $k = q^2+q+1$, $\lambda = q^3+2q^2+q-1$, $\mu = (q+1)^2$. Jedna od njih je $LP(4,q)$, a ostale nisu semiparcijalne geometrije.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Teorem.

Za svaku prim potenciju q postoje barem četiri $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije s parametrima $v = (q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$, $k = q^2+q+1$, $\lambda = q^3+2q^2+q-1$, $\mu = (q+1)^2$. Jedna od njih je $LP(4,q)$, a ostale nisu semiparcijalne geometrije.

Dobivaju se "polarity transformacijama" od $LP(4,q)$. Slična konstrukcija:

D. Jungnickel, V. D. Tonchev, *Polarities, quasi-symmetric designs, and Hamada's conjecture*, Des. Codes Cryptogr. **51** (2009), no. 2, 131–140.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Teorem.

Za svaku prim potenciju q postoje barem četiri $(v_k; \lambda, \mu)$ konfiguracije s parametrima $v = (q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$, $k = q^2+q+1$, $\lambda = q^3+2q^2+q-1$, $\mu = (q+1)^2$. Jedna od njih je $LP(4,q)$, a ostale nisu semiparcijalne geometrije.

Dobivaju se "polarity transformacijama" od $LP(4,q)$. Slična konstrukcija:

D. Jungnickel, V. D. Tonchev, *Polarities, quasi-symmetric designs, and Hamada's conjecture*, Des. Codes Cryptogr. **51** (2009), no. 2, 131–140.

Primjer.

SDDS za $(120_8; 28, 24)$ postoji u simetričnoj grupi $G = S_5$.

Puna grupa automorfizama odgovarajuće $(120_8; 28, 24)$ konfiguracije je A_8 (reda 20160) i djeluje flag-tranzitivno.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

$$\left.\begin{array}{lcl} (120_8; 28, 24) & \rightsquigarrow & SRG(120, 56, 28, 24) \\ pg(7, 8, 4) & \rightsquigarrow & SRG(120, 63, 30, 36) \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{komplementarni} \\ \text{grafovi točaka}\end{array}$$

Primjeri jako regularnih konfiguracija

$$\left.\begin{array}{lcl} (120_8; 28, 24) & \rightsquigarrow & SRG(120, 56, 28, 24) \\ pg(7, 8, 4) & \rightsquigarrow & SRG(120, 63, 30, 36) \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{komplementarni} \\ \text{grafovi točaka}\end{array}$$

Te dvije strukture zajedno čine Steinerov 2-$(120, 8, 1)$ dizajn!

A. E. Brouwer, W. H. Haemers, V. D. Tonchev, *Embedding partial geometries in Steiner designs*, in: *Geometry, combinatorial designs and related structures (Spetses, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **245**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 33–41.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

$$\left.\begin{array}{lcl} (120_8; 28, 24) & \rightsquigarrow & SRG(120, 56, 28, 24) \\ pg(7, 8, 4) & \rightsquigarrow & SRG(120, 63, 30, 36) \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{komplementarni} \\ \text{grafovi točaka}\end{array}$$

Te dvije strukture zajedno čine Steinerov 2-$(120, 8, 1)$ dizajn!

A. E. Brouwer, W. H. Haemers, V. D. Tonchev, *Embedding partial geometries in Steiner designs*, in: *Geometry, combinatorial designs and related structures (Spetses, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **245**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 33–41.

Parcijalna geometrija $pg(7, 8, 4)$ je član familije $PQ^+(2n-1, 2)$ s parametrima $pg(2^{2n-1}-1, 2^{2n-1}, 2^{2n-2})$.

F. De Clerck, R. H. Dye, J. A. Thas, *An infinite class of partial geometries associated with the hyperbolic quadric in $PG(4n-1, 2)$*, European J. Combin. **1** (1980), no. 4, 323–326.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Parametri $PQ^+(2n-1,2)$ odgovaraju hipotetičkoj $(v_k;\lambda,\mu)$ konfiguraciji za $v = 2^{2n-1}(2^{2n}-1),\ k = 2^{2n-1},\ \lambda = 2^{2n-2}(2^{2n-1}-1),\ \mu = 2^{2n-1}(2^{2n-2}-1)$ s kojom bi se dopunila do 2-$(v,k,1)$ dizajna, ali Brouwer, Haemers i Tonchev dokazali su da je to moguće samo za $n = 2$.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Parametri $PQ^+(2n-1,2)$ odgovaraju hipotetičkoj $(v_k;\lambda,\mu)$ konfiguraciji za $v = 2^{2n-1}(2^{2n}-1),\ k = 2^{2n-1},\ \lambda = 2^{2n-2}(2^{2n-1}-1),\ \mu = 2^{2n-1}(2^{2n-2}-1)$ s kojom bi se dopunila do 2-$(v,k,1)$ dizajna, ali Brouwer, Haemers i Tonchev dokazali su da je to moguće samo za $n = 2$.

Neizomorfne parcijalne geometrije s istim parametrima kao $PQ^+(2n-1,2)$:

R. Mathon, A. P. Street, *Overlarge sets and partial geometries*, J. Geom. **60** (1997), no. 1–2, 85–104.

F. De Clerck, M. Delanote, *Partial geometries and the triality quadric*, J. Geometry **68** (2000), 34–47.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Parametri $PQ^+(2n-1,2)$ odgovaraju hipotetičkoj $(v_k;\lambda,\mu)$ konfiguraciji za $v = 2^{2n-1}(2^{2n}-1),\ k = 2^{2n-1},\ \lambda = 2^{2n-2}(2^{2n-1}-1),\ \mu = 2^{2n-1}(2^{2n-2}-1)$ s kojom bi se dopunila do 2-$(v,k,1)$ dizajna, ali Brouwer, Haemers i Tonchev dokazali su da je to moguće samo za $n = 2$.

Neizomorfne parcijalne geometrije s istim parametrima kao $PQ^+(2n-1,2)$:

R. Mathon, A. P. Street, *Overlarge sets and partial geometries*, J. Geom. **60** (1997), no. 1–2, 85–104.

F. De Clerck, M. Delanote, *Partial geometries and the triality quadric*, J. Geometry **68** (2000), 34–47.

Pitanje 5:

Mogu li se ti primjeri uložiti u Steinerove 2-dizajne?

Postoje li $(v_k;\lambda,\mu)$ konfiguracije s $v = 2^{2n-1}(2^{2n}-1),\ k = 2^{2n-1},$ $\lambda = 2^{2n-2}(2^{2n-1}-1),\ \mu = 2^{2n-1}(2^{2n-2}-1)$ za $n > 2$?

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Primjer.

Postoje barem četiri $(63_6; 13, 15)$ konfiguracije. Dvije su samodualne s punom grupom automorfizama $PSU(3,3) : \mathbb{Z}_2$ reda 12096, koja djeluje flag-tranzitivno. Uz to postoji dualni par s punom grupom automorfizama $(SL(2,3) : \mathbb{Z}_4) : \mathbb{Z}_2$ reda 192 koja ne djeluje tranzitivno.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Primjer.

Postoje barem četiri $(63_6; 13, 15)$ konfiguracije. Dvije su samodualne s punom grupom automorfizama $PSU(3,3) : \mathbb{Z}_2$ reda 12096, koja djeluje flag-tranzitivno. Uz to postoji dualni par s punom grupom automorfizama $(SL(2,3) : \mathbb{Z}_4) : \mathbb{Z}_2$ reda 192 koja ne djeluje tranzitivno.

Dva tranzitivna primjera ne mogu se dobiti od SDDS jer nemaju podgrupu koja djeluje regularno.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Primjer.

Postoje barem četiri $(63_6; 13, 15)$ konfiguracije. Dvije su samodualne s punom grupom automorfizama $PSU(3,3) : \mathbb{Z}_2$ reda 12096, koja djeluje flag-tranzitivno. Uz to postoji dualni par s punom grupom automorfizama $(SL(2,3) : \mathbb{Z}_4) : \mathbb{Z}_2$ reda 192 koja ne djeluje tranzitivno.

Dva tranzitivna primjera ne mogu se dobiti od SDDS jer nemaju podgrupu koja djeluje regularno.

Ta dva primjera povezana su s najmanjim generaliziranim šesterokutom $GH(2,2)$. To je (63_3) konfiguracija s grafom točaka i pravaca struka 12 i promjera 6. Grafovi su distancijsko regularni, ali nisu jako regularni.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Primjer.

Postoje barem četiri $(63_6; 13, 15)$ konfiguracije. Dvije su samodualne s punom grupom automorfizama $PSU(3,3) : \mathbb{Z}_2$ reda 12096, koja djeluje flag-tranzitivno. Uz to postoji dualni par s punom grupom automorfizama $(SL(2,3) : \mathbb{Z}_4) : \mathbb{Z}_2$ reda 192 koja ne djeluje tranzitivno.

Dva tranzitivna primjera ne mogu se dobiti od SDDS jer nemaju podgrupu koja djeluje regularno.

Ta dva primjera povezana su s najmanjim generaliziranim šesterokutom $GH(2,2)$. To je (63_3) konfiguracija s grafom točaka i pravaca struka 12 i promjera 6. Grafovi su distancijsko regularni, ali nisu jako regularni.

Jako regularnu $(63_6; 13, 15)$ konfiguraciju dobivamo tako da za pravce uzmemo skupove od 6 točaka kolinearnih zadanoj točki od $GH(2,2)$. Graf točaka te konfiguracije je $SRG(63, 30, 13, 15)$.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Drugu samodualnu $(63_6; 13, 15)$ konfiguraciju dobivamo istom konstrukcijom od duala od $GH(2, 2)$.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Drugu samodualnu $(63_6; 13, 15)$ konfiguraciju dobivamo istom konstrukcijom od duala od $GH(2, 2)$.

Pitanje 6:

Može li se ova konstrukcija generalizirati? Postoje li druge jako regularne konfiguracije povezane s generaliziranim šesterokutima i/ili osmerokutima?

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Drugu samodualnu $(63_6; 13, 15)$ konfiguraciju dobivamo istom konstrukcijom od duala od $GH(2, 2)$.

Pitanje 6:

Može li se ova konstrukcija generalizirati? Postoje li druge jako regularne konfiguracije povezane s generaliziranim šesterokutima i/ili osmerokutima?

Primjer.

SDDS za $(96_5; 4, 4)$ postoje u grupama $\mathbb{Z}_4 \times S_4$, $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times A_4) : \mathbb{Z}_2$, $D_8 \times A_4$ i $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times S_4$.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Drugu samodualnu $(63_6; 13, 15)$ konfiguraciju dobivamo istom konstrukcijom od duala od $GH(2, 2)$.

Pitanje 6:

Može li se ova konstrukcija generalizirati? Postoje li druge jako regularne konfiguracije povezane s generaliziranim šesterokutima i/ili osmerokutima?

Primjer.

SDDS za $(96_5; 4, 4)$ postoje u grupama $\mathbb{Z}_4 \times S_4$, $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times A_4) : \mathbb{Z}_2$, $D_8 \times A_4$ i $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times S_4$.

Svi daju istu samodualnu $(96_5; 4, 4)$ konfiguraciju s punom grupom automorfizama $((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) : A_6) : \mathbb{Z}_2$ reda 11520 koja djeluje flag-tranzitivno.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Pridruženi graf točaka i pravaca imaju parametre $SRG(96, 20, 4, 4)$. Generalizirani četverokut $GQ(5, 3) = pg(5, 3, 1)$ ima graf točaka s istim parametrima, ali neizomorfan. Poznato je puno neizomorfnih grafova s tim parametrima:

A. E. Brouwer, J. H. Koolen, M. H. Klin, *A root graph that is locally the line graph of the Petersen graph*, Discrete Math. **264** (2003), no. 1-3, 13–24.

A. Golemac, J. Mandić, T. Vučičić, *New regular partial difference sets and strongly regular graphs with parameters* $(96, 20, 4, 4)$ *and* $(96, 19, 2, 4)$, Electron. J. Combin. **13** (2006), no. 1, Research Paper 88, 10 pp.

Primjeri jako regularnih konfiguracija

Pridruženi graf točaka i pravaca imaju parametre $SRG(96, 20, 4, 4)$. Generalizirani četverokut $GQ(5, 3) = pg(5, 3, 1)$ ima graf točaka s istim parametrima, ali neizomorfan. Poznato je puno neizomorfnih grafova s tim parametrima:

A. E. Brouwer, J. H. Koolen, M. H. Klin, *A root graph that is locally the line graph of the Petersen graph*, Discrete Math. **264** (2003), no. 1-3, 13–24.

A. Golemac, J. Mandić, T. Vučičić, *New regular partial difference sets and strongly regular graphs with parameters* $(96, 20, 4, 4)$ *and* $(96, 19, 2, 4)$, Electron. J. Combin. **13** (2006), no. 1, Research Paper 88, 10 pp.

Pitanje 7:

Postoji li veza između $(96_5; 4, 4)$ **konfiguracije i generaliziranog četverokuta** $GQ(5, 3)$**? Može li se ovaj primjer generalizirati do familije?**

Tablica dopustivih parametara

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	#Cf	#SCf
1	$(10_3; 3, 4)$	**2**	**2**
2	$(13_3; 2, 3)$	**1**	**1**
3	$(16_3; 2, 2)$	**1**	**1**
4	$(25_4; 5, 6)$	**0**	**0**
5	$(36_5; 10, 12)$	1	1
6	$(41_5; 9, 10)$	?	?
7	$(45_4; 3, 3)$	**0**	**0**
8	$(49_4; 5, 2)$	**0**	**0**
9	$(49_6; 17, 20)$	1	1
10	$(50_7; 35, 36)$	211	111
11	$(61_6; 14, 15)$	?	?

Tablica dopustivih parametara

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	#Cf	#SCf
12	$(63_6; 13, 15)$	4	2
13	$(64_7; 26, 30)$	29	11
14	$(81_8; 37, 42)$	?	?
15	$(85_6; 11, 10)$	?	?
16	$(85_7; 20, 21)$	?	?
17	$(96_5; 4, 4)$	1	1
18	$(99_7; 21, 15)$	?	?
19	$(100_9; 50, 56)$	1	1
20	$(105_9; 51, 45)$	?	?
21	$(113_8; 27, 28)$	?	?
22	$(120_8; 28, 24)$	1	1

Tablica dopustivih parametara

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	#Cf	#SCf
23	$(121_5; 9, 2)$	**0**	**0**
24	$(121_6; 11, 6)$	?	?
25	$(121_9; 43, 42)$	?	?
26	$(121_{10}; 65, 72)$	?	?
27	$(125_9; 45, 36)$	?	?
28	$(136_6; 15, 4)$	?	?
29	$(136_9; 36, 40)$	?	?
30	$(144_{11}; 82, 90)$	1	1
31	$(145_9; 35, 36)$	?	?
32	$(153_8; 19, 21)$	?	?
33	$(155_7; 17, 9)$	4	2

Tablica dopustivih parametara

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	#Cf	#SCf
34	$(169_9; 31, 30)$	?	?
35	$(169_{12}; 101, 110)$	?	?
36	$(171_{11}; 73, 66)$	?	?
37	$(175_6; 5, 5)$	?	?
38	$(181_{10}; 44, 45)$	?	?
39	$(196_{10}; 40, 42)$	?	?
40	$(196_{13}; 122, 132)$	?	?
41	$(196_{13}; 125, 120)$	?	?

Tablica dopustivih parametara

No.	$(v_k; \lambda, \mu)$	#Cf	#SCf
34	$(169_9; 31, 30)$	?	?
35	$(169_{12}; 101, 110)$	?	?
36	$(171_{11}; 73, 66)$	?	?
37	$(175_6; 5, 5)$	?	?
38	$(181_{10}; 44, 45)$	?	?
39	$(196_{10}; 40, 42)$	?	?
40	$(196_{13}; 122, 132)$	?	?
41	$(196_{13}; 125, 120)$	?	?

Pitanje 8:

Eliminirati što više upitnika!

Kraj

Hvala na pažnji!