Asocijacijske sheme*

Vedran Krčadinac

Prirodoslovno-matematički fakultet

Sveučilište u Zagrebu

13.4.2023.

* This work was fully supported by the Croatian Science Foundation under the project 9752.

Kratka povijest asocijacijskih shema

Kratka povijest asocijacijskih shema

- **Asocijacijske sheme** (statističari, 1950-e)

Kratka povijest asocijacijskih shema

- **Asocijacijske sheme** (statističari, 1950-e)

R. C. Bose, T. Shimamoto, *Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes*, J. Amer. Statist. Assoc. **47** (1952), 151–184.

R. C. Bose, D. M. Mesner, *On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 21–38.

Kratka povijest asocijacijskih shema

- **Asocijacijske sheme** (statističari, 1950-e)

R. C. Bose, T. Shimamoto, *Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes*, J. Amer. Statist. Assoc. **47** (1952), 151–184.

R. C. Bose, D. M. Mesner, *On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 21–38.

- **Koherentne kofiguracije** (Donald Higman, 1970-e)

Kratka povijest asocijacijskih shema

- **Asocijacijske sheme** (statističari, 1950-e)

R. C. Bose, T. Shimamoto, *Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes*, J. Amer. Statist. Assoc. **47** (1952), 151–184.

R. C. Bose, D. M. Mesner, *On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 21–38.

- **Koherentne kofiguracije** (Donald Higman, 1970-e)

D. G. Higman, *Coherent configurations. I. Ordinary representation theory*, Geometriae Dedicata **4** (1975), no. 1, 1–32.

D. G. Higman, *Coherent configurations. II. Weights*, Geometriae Dedicata **5** (1976), no. 4, 413–424.

Kratka povijest asocijacijskih shema

- **Asocijacijske sheme** (statističari, 1950-e)

R. C. Bose, T. Shimamoto, *Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes*, J. Amer. Statist. Assoc. **47** (1952), 151–184.

R. C. Bose, D. M. Mesner, *On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 21–38.

- **Koherentne kofiguracije** (Donald Higman, 1970-e)

D. G. Higman, *Coherent configurations. I. Ordinary representation theory*, Geometriae Dedicata **4** (1975), no. 1, 1–32.

D. G. Higman, *Coherent configurations. II. Weights*, Geometriae Dedicata **5** (1976), no. 4, 413–424.

$\rightsquigarrow$ "Teorija grupa bez grupa"

Kratka povijest asocijacijskih shema

- **Celularni prsteni** (sovjetski matematičari, 1970-e)

Kratka povijest asocijacijskih shema

- **Celularni prsteni** (sovjetski matematičari, 1970-e)

B. Weisfeiler, A. A. Lehman, *Reduction of a graph to a canonical form and an algebra which appears in this process*, Scientific-Technological Investigations **2** (1968), 12–16.

I. A. Faradžev, M. H. Klin, M. E. Muzichuk, *Cellular rings and groups of automorphisms of graphs*, Investigations in algebraic theory of combinatorial objects, 1–152, Math. Appl. (Soviet Ser.), 84, Kluwer Acad. Publ., 1994.

Kratka povijest asocijacijskih shema

- **Celularni prsteni** (sovjetski matematičari, 1970-e)

B. Weisfeiler, A. A. Lehman, *Reduction of a graph to a canonical form and an algebra which appears in this process*, Scientific-Technological Investigations **2** (1968), 12–16.

I. A. Faradžev, M. H. Klin, M. E. Muzichuk, *Cellular rings and groups of automorphisms of graphs*, Investigations in algebraic theory of combinatorial objects, 1–152, Math. Appl. (Soviet Ser.), 84, Kluwer Acad. Publ., 1994.

- **Disertacija Phillipe Delsartea** (1973.)

Kratka povijest asocijacijskih shema

- **Celularni prsteni** (sovjetski matematičari, 1970-e)

B. Weisfeiler, A. A. Lehman, *Reduction of a graph to a canonical form and an algebra which appears in this process*, Scientific-Technological Investigations **2** (1968), 12–16.

I. A. Faradžev, M. H. Klin, M. E. Muzichuk, *Cellular rings and groups of automorphisms of graphs*, Investigations in algebraic theory of combinatorial objects, 1–152, Math. Appl. (Soviet Ser.), 84, Kluwer Acad. Publ., 1994.

- **Disertacija Phillipe Delsartea** (1973.)

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. 1973, no. 10, vi+97 pp.

Kratka povijest asocijacijskih shema

- **Knjige**

E. Bannai, T. Ito, *Algebraic combinatorics. I. Association schemes*, The Benjamin/Cummings Publishing Co., 1984.

A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, 1989.

C. D. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall, 1993.

R. A. Bailey, *Association schemes. Designed experiments, algebra and combinatorics*, Cambridge University Press, 2004.

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021.

Što je asocijacijska shema?

Što je asocijacijska shema?

Coherent configurations

A. E. Brouwer

Abstract

Definition and a few examples.

0.1 Relations

A *coherent configuration* is a finite set X (of *points*) together with a collection $\mathcal{R} = \{R_i \mid i \in I\}$ of nonempty binary relations on X, satisfying the following four conditions:

(i) $\mathcal{R}$ is a partition of $X \times X$, that is, any ordered pair of points is in a unique relation R_i.

(ii) There is a subset H of the index set I such that $\{R_h \mid h \in H\}$ is a partition of the diagonal $\{(x, x) \mid x \in X\}$.

(iii) For each R_i, its converse $\{(y, x) \mid (x, y) \in R_i\}$ is also one of the relations in $\mathcal{R}$, say, $R_{i'}$.

(iv) For $i, j, k \in I$ and $(x, y) \in R_k$, the number of $z \in X$ such that $(x, z) \in R_i$ and $(z, y) \in R_j$ is a constant p^k_{ij} that does not depend on the choice of x, y.

Coherent configurations were introduced by Higman in order to 'do group theory without groups', see example (ii) below.

The number $|I|$ of relations is called the *rank* of the coherent configuration.

From (ii) we get a partition of X into sets X_h $(h \in H)$ called *fibers*, defined by $R_h = \{(x, x) \mid x \in X_h\}$ for $h \in H$. It follows from (iv) that for any $i \in I$ we have $R_i \subseteq X_s \times X_t$ for certain fibers X_s, X_t. Consequently, any subset H_0 of H determines a sub-cc with point set $\bigcup_{h \in H_0} X_h$.

Regularni grafovi

Regularni grafovi

Graf je regularan ako su svi vrhovi istog stupnja.

Regularni grafovi

Graf je regularan ako su svi vrhovi istog stupnja.

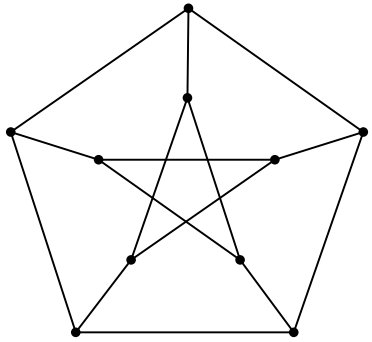
Snark je netrivijalan 3-regularan graf s bridno kromatskim brojem 4.

Regularni grafovi

Graf je regularan ako su svi vrhovi istog stupnja.

Snark je netrivijalan 3-regularan graf s bridno kromatskim brojem 4.

Primjeri:

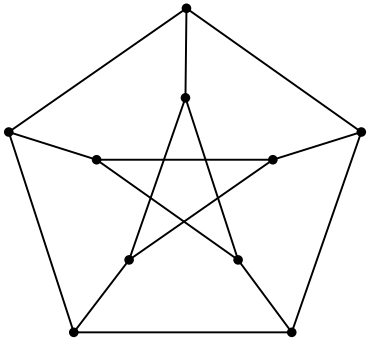


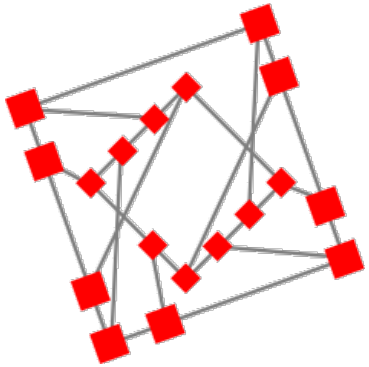
Regularni grafovi

Graf je regularan ako su svi vrhovi istog stupnja.

Snark je netrivijalan 3-regularan graf s bridno kromatskim brojem 4.

Primjeri:



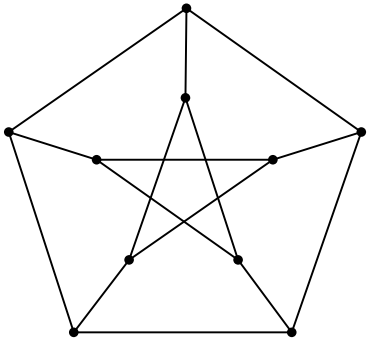


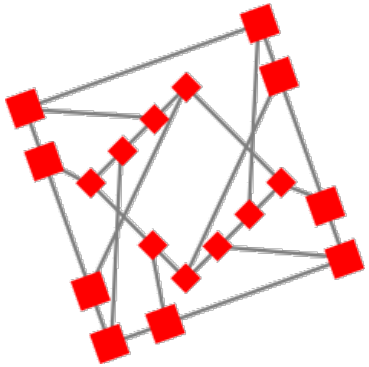
Regularni grafovi

Graf je regularan ako su svi vrhovi istog stupnja.

Snark je netrivijalan 3-regularan graf s bridno kromatskim brojem 4.

Primjeri:





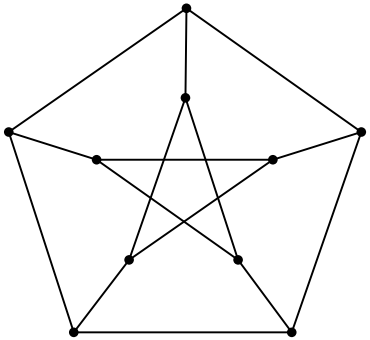
Regularan graf stupnja k i struka g s najmajim mogućim brojem vrhova zove se (k, g)-rešetka (eng. cage).

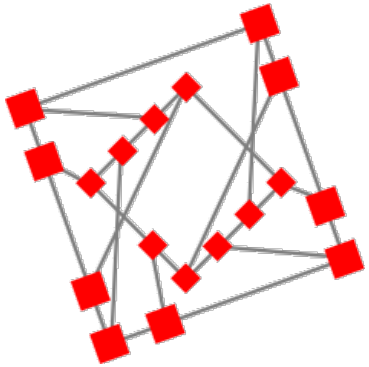
Regularni grafovi

Graf je regularan ako su svi vrhovi istog stupnja.

Snark je netrivijalan 3-regularan graf s bridno kromatskim brojem 4.

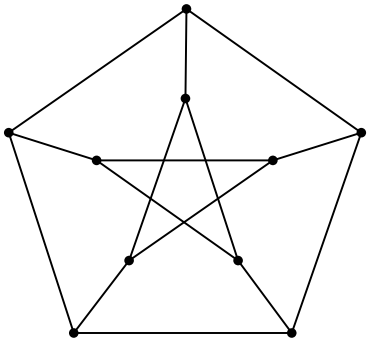
Primjeri:





Regularan graf stupnja k i struka g s najmajim mogućim brojem vrhova zove se (k, g)-rešetka (eng. cage).

Primjeri:

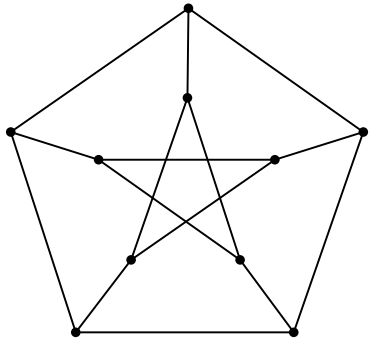


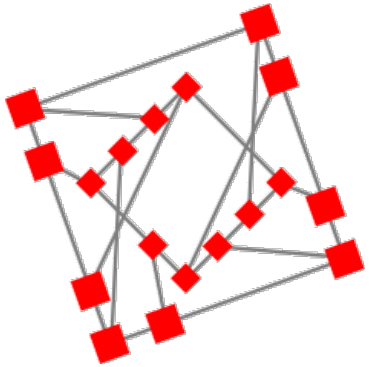
Regularni grafovi

Graf je regularan ako su svi vrhovi istog stupnja.

Snark je netrivijalan 3-regularan graf s bridno kromatskim brojem 4.

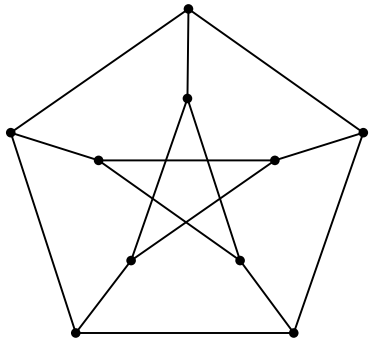
Primjeri:

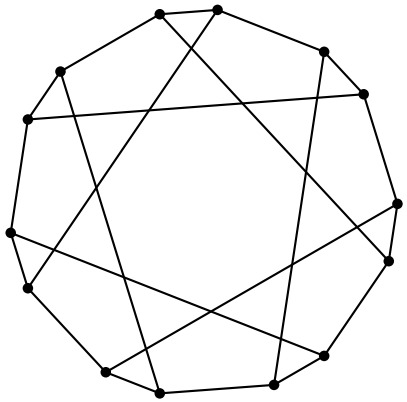




Regularan graf stupnja k i struka g s najmajim mogućim brojem vrhova zove se (k, g)-rešetka (eng. cage).

Primjeri:





Regularni grafovi

G. Erskine, J. Tuite, *Small graphs and hypergraphs of given degree and girth*, Electron. J. Combin. **30** (2023), no. 1, P1.57.

G. Exoo, R. Jajcay, *Dynamic cage survey*, Electron. J. Combin. DS16 (2008), Dynamic Surveys, 48 pp.

Regularni grafovi

G. Erskine, J. Tuite, *Small graphs and hypergraphs of given degree and girth*, Electron. J. Combin. **30** (2023), no. 1, P1.57.

G. Exoo, R. Jajcay, *Dynamic cage survey*, Electron. J. Combin. DS16 (2008), Dynamic Surveys, 48 pp.

Jako regularan graf s parametrima (v, k, λ, μ) ima v vrhova, k-regularan je i svaka dva vrha imaju λ zajedničkih susjeda ako su susjedni, a ako nisu susjedni imaju μ zajedničkih susjeda.

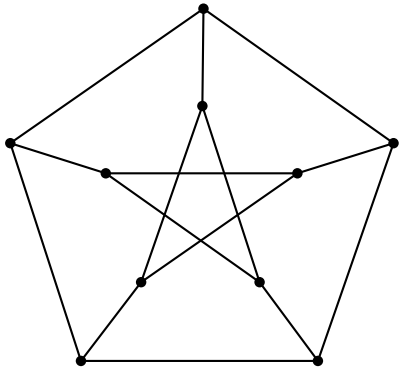
Regularni grafovi

G. Erskine, J. Tuite, *Small graphs and hypergraphs of given degree and girth*, Electron. J. Combin. **30** (2023), no. 1, P1.57.

G. Exoo, R. Jajcay, *Dynamic cage survey*, Electron. J. Combin. DS16 (2008), Dynamic Surveys, 48 pp.

Jako regularan graf s parametrima (v, k, λ, μ) ima v vrhova, k-regularan je i svaka dva vrha imaju λ zajedničkih susjeda ako su susjedni, a ako nisu susjedni imaju μ zajedničkih susjeda.

Primjeri:



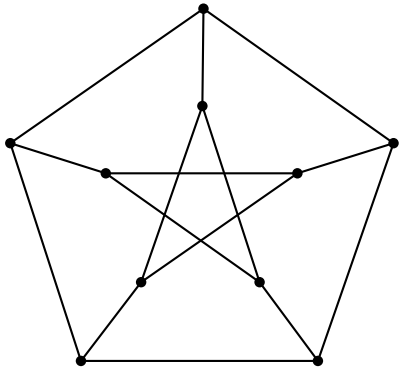
Regularni grafovi

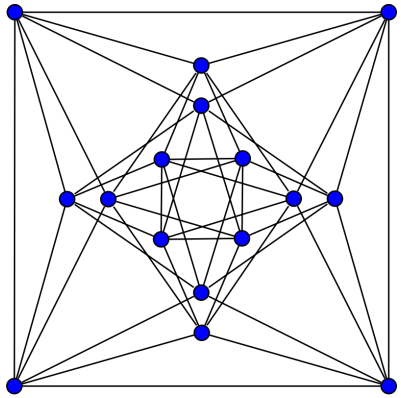
G. Erskine, J. Tuite, *Small graphs and hypergraphs of given degree and girth*, Electron. J. Combin. **30** (2023), no. 1, P1.57.

G. Exoo, R. Jajcay, *Dynamic cage survey*, Electron. J. Combin. DS16 (2008), Dynamic Surveys, 48 pp.

Jako regularan graf s parametrima (v, k, λ, μ) ima v vrhova, k-regularan je i svaka dva vrha imaju λ zajedničkih susjeda ako su susjedni, a ako nisu susjedni imaju μ zajedničkih susjeda.

Primjeri:





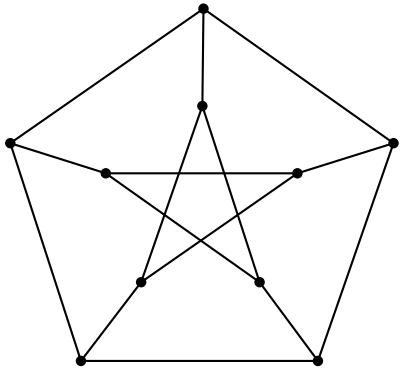
Regularni grafovi

G. Erskine, J. Tuite, *Small graphs and hypergraphs of given degree and girth*, Electron. J. Combin. **30** (2023), no. 1, P1.57.

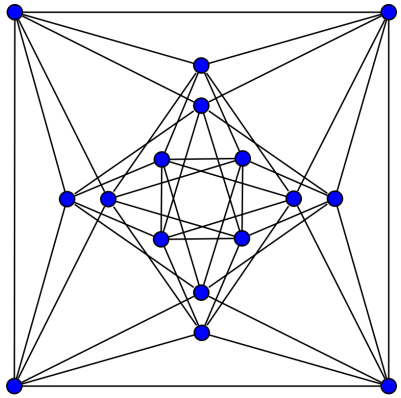
G. Exoo, R. Jajcay, *Dynamic cage survey*, Electron. J. Combin. DS16 (2008), Dynamic Surveys, 48 pp.

Jako regularan graf s parametrima (v, k, λ, μ) ima v vrhova, k-regularan je i svaka dva vrha imaju λ zajedničkih susjeda ako su susjedni, a ako nisu susjedni imaju μ zajedničkih susjeda.

Primjeri:



$(10, 3, 0, 1)$



$(16, 6, 2, 2)$

Jako regularni grafovi

R. C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. **13** (1963), 389–419.

Jako regularni grafovi

R. C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. **13** (1963), 389–419.

A. E. Brouwer, H. Van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, Cambridge University Press, 2022.

Jako regularni grafovi

R. C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math. **13** (1963), 389–419.

A. E. Brouwer, H. Van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, Cambridge University Press, 2022.

> *As pointed out in the preface, this is a book the mathematics world has long been waiting for. Famous predecessors such as Delsarte's thesis on association schemes, Bannai's book on algebraic combinatorics and the monograph by Brouwer, Cohen, and Neumaier on distance regular graphs did not exactly address the topic of strongly regular graphs.*
>
> *—Ulrich Tamm, MathSciNet*

Jako regularni grafovi

https://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab.html

Parameters of Strongly Regular Graphs

Below tables with parameters for strongly regular graphs.

The columns are:

- existence
- v - number of vertices
- k - valency
- λ - number of common neighbours of two adjacent vertices
- μ - number of common neighbours of two nonadjacent vertices
- r^f - positive eigenvalue with multiplicity
- s^g - negative eigenvalue with multiplicity
- comments

The comments are undocumented at present. Ask.

1-50 vertices
51-100 vertices
101-150 vertices
151-200 vertices
201-250 vertices
251-300 vertices
301-350 vertices
351-400 vertices
401-450 vertices
451-500 vertices

Jako regularni grafovi

https://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab101

Prev Up Next

	v	k	λ	μ	r^f	s^g	comments
+	101	50	24	25	4.525^{50}	-5.525^{50}	Paley(101); 2-graph*
!	105	26	13	4	11^{14}	-2^{90}	Triangular graph T(15)
		78	55	66	1^{90}	-12^{14}	
!	105	32	4	12	2^{84}	-10^{20}	Aut L(3,4) on flags (rk 4) - Goethals & Seidel, unique by Coolsaet
		72	51	45	9^{20}	-3^{84}	
?	105	40	15	15	5^{48}	-5^{56}	
		64	38	40	4^{56}	-6^{48}	
?	105	52	21	30	2^{84}	-11^{20}	
		52	29	22	10^{20}	-3^{84}	
-	105	52	25	26	4.623^{52}	-5.623^{52}	Conf
+	109	54	26	27	4.720^{54}	-5.720^{54}	Paley(109); 2-graph*
?	111	30	5	9	3^{74}	-7^{36}	
		80	58	56	6^{36}	-4^{74}	
+	111	44	19	16	7^{36}	-4^{74}	S(2,4,37)
		66	37	42	3^{74}	-8^{36}	
!	112	30	2	10	2^{90}	-10^{21}	unique by Cameron, Goethals & Seidel; subconstituent of McLaughlin graph; q222=0; $O^-(6,3)$ polar graph; GQ(3,9)

Jako regularni grafovi

Teorem.

Povezan graf $G \neq K_v$ je jako regularan s parametrima (v, k, λ, μ) ako i samo ako ima točno tri svojstvene vrijednosti $\theta_0 = k$, θ_1 i θ_2. U tom slučaju vrijedi $\lambda = k + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2$ i $\mu = k + \theta_1\theta_2$.

Jako regularni grafovi

Teorem.

Povezan graf $G \neq K_v$ je jako regularan s parametrima (v, k, λ, μ) ako i samo ako ima točno tri svojstvene vrijednosti $\theta_0 = k$, θ_1 i θ_2. U tom slučaju vrijedi $\lambda = k + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2$ i $\mu = k + \theta_1\theta_2$.

V. Krčadinac, *A new partial geometry pg*$(5, 5, 2)$, J. Combin. Theory Ser. A **183** (2021), Paper No. 105493.

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, Des. Codes Cryptogr. **90** (2022), no. 8, 1881–1897.

Jako regularni grafovi

Teorem.

Povezan graf $G \neq K_v$ je jako regularan s parametrima (v, k, λ, μ) ako i samo ako ima točno tri svojstvene vrijednosti $\theta_0 = k$, θ_1 i θ_2. U tom slučaju vrijedi $\lambda = k + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1\theta_2$ i $\mu = k + \theta_1\theta_2$.

V. Krčadinac, *A new partial geometry pg*$(5, 5, 2)$, J. Combin. Theory Ser. A **183** (2021), Paper No. 105493.

M. Abreu, M. Funk, V. Krčadinac, D. Labbate, *Strongly regular configurations*, Des. Codes Cryptogr. **90** (2022), no. 8, 1881–1897.

V. Krčadinac, R. Vlahović, *New quasi-symmetric designs by the Kramer-Mesner method*, Discrete Math. **339** (2016), no. 12, 2884–2890.

V. Krčadinac, R. Vlahović Kruc, *Quasi-symmetric designs on* 56 *points*, Adv. Math. Commun. **15** (2021), no. 4, 633–646.

Distancijsko regularni grafovi

Povezan jako regularan graf ima dijametar $d = 2$.

Distancijsko regularni grafovi

Povezan jako regularan graf ima dijametar $d = 2$.

Neka je G povezan graf dijametra d i x jedan njegov vrh. Skup svih vrhova na udaljenosti i od x označavamo $V_i(x) := \{y \in V(G) \mid d(x, y) = i\}$.

Distancijsko regularni grafovi

Povezan jako regularan graf ima dijametar $d = 2$.

Neka je G povezan graf dijametra d i x jedan njegov vrh. Skup svih vrhova na udaljenosti i od x označavamo $V_i(x) := \{y \in V(G) \mid d(x, y) = i\}$.

Particija skupa vrhova: $V(G) = V_0(x) \cup V_1(x) \cup \cdots \cup V_d(x)$.

Distancijsko regularni grafovi

Povezan jako regularan graf ima dijametar $d = 2$.

Neka je G povezan graf dijametra d i x jedan njegov vrh. Skup svih vrhova na udaljenosti i od x označavamo $V_i(x) := \{y \in V(G) \mid d(x, y) = i\}$.

Particija skupa vrhova: $V(G) = V_0(x) \cup V_1(x) \cup \cdots \cup V_d(x)$.

Za G kažemo da je distancijsko regularan ako broj $|V_i(x) \cap V_j(y)|$ ovisi samo o i, j te udaljenosti $d(x, y)$, a ne o izboru vrhova $x, y \in V(G)$.

Distancijsko regularni grafovi

Povezan jako regularan graf ima dijametar $d = 2$.

Neka je G povezan graf dijametra d i x jedan njegov vrh. Skup svih vrhova na udaljenosti i od x označavamo $V_i(x) := \{y \in V(G) \mid d(x, y) = i\}$.

Particija skupa vrhova: $V(G) = V_0(x) \cup V_1(x) \cup \cdots \cup V_d(x)$.

Za G kažemo da je distancijsko regularan ako broj $|V_i(x) \cap V_j(y)|$ ovisi samo o i, j te udaljenosti $d(x, y)$, a ne o izboru vrhova $x, y \in V(G)$.

Za G kažemo da je distancijsko tranzitivan ako za svaka dva para vrhova (x_1, x_2) i (y_1, y_2) na istoj udaljenosti $d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2)$ postoji automorfizam $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ takav da je $\alpha(x_1) = y_1$ i $\alpha(x_2) = y_2$.

Distancijsko regularni grafovi

Povezan jako regularan graf ima dijametar $d = 2$.

Neka je G povezan graf dijametra d i x jedan njegov vrh. Skup svih vrhova na udaljenosti i od x označavamo $V_i(x) := \{y \in V(G) \mid d(x, y) = i\}$.

Particija skupa vrhova: $V(G) = V_0(x) \cup V_1(x) \cup \cdots \cup V_d(x)$.

Za G kažemo da je distancijsko regularan ako broj $|V_i(x) \cap V_j(y)|$ ovisi samo o i, j te udaljenosti $d(x, y)$, a ne o izboru vrhova $x, y \in V(G)$.

Za G kažemo da je distancijsko tranzitivan ako za svaka dva para vrhova (x_1, x_2) i (y_1, y_2) na istoj udaljenosti $d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2)$ postoji automorfizam $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ takav da je $\alpha(x_1) = y_1$ i $\alpha(x_2) = y_2$.

Teorem.

Distancijsko tranzitivni grafovi su distancijsko regularni, ali obrat ne vrijedi.

Distancijsko regularni grafovi

Povezan jako regularan graf ima dijametar $d = 2$.

Neka je G povezan graf dijametra d i x jedan njegov vrh. Skup svih vrhova na udaljenosti i od x označavamo $V_i(x) := \{y \in V(G) \mid d(x, y) = i\}$.

Particija skupa vrhova: $V(G) = V_0(x) \cup V_1(x) \cup \cdots \cup V_d(x)$.

Za G kažemo da je distancijsko regularan ako broj $|V_i(x) \cap V_j(y)|$ ovisi samo o i, j te udaljenosti $d(x, y)$, a ne o izboru vrhova $x, y \in V(G)$.

Za G kažemo da je distancijsko tranzitivan ako za svaka dva para vrhova (x_1, x_2) i (y_1, y_2) na istoj udaljenosti $d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2)$ postoji automorfizam $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ takav da je $\alpha(x_1) = y_1$ i $\alpha(x_2) = y_2$.

Teorem.

Distancijsko tranzitivni grafovi su distancijsko regularni, ali obrat ne vrijedi.

Najmanji protuprimjer: Shrikhandeov jako regularni graf $(16, 6, 2, 2)$.

Distancijsko regularni grafovi

Teorem.

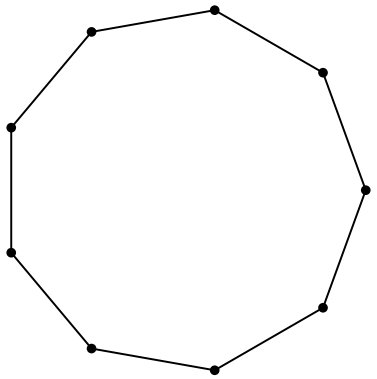
Povezan graf je jako regularan ako i samo ako je distancijsko regularan dijametra $d = 2$.

Distancijsko regularni grafovi

Teorem.

Povezan graf je jako regularan ako i samo ako je distancijsko regularan dijametra $d = 2$.

Primjer: poligoni (n-terokuti) su familija distancijsko regularnih grafova neomeđenog dijametra $d = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

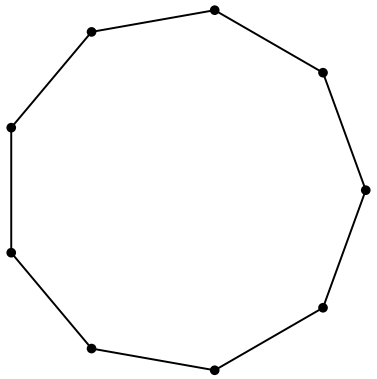


Distancijsko regularni grafovi

Teorem.

Povezan graf je jako regularan ako i samo ako je distancijsko regularan dijametra $d = 2$.

Primjer: poligoni (n-terokuti) su familija distancijsko regularnih grafova neomeđenog dijametra $d = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.



Generalizirani n-terokuti (Jacques Tits, 1959.) su klasa incidencijskih geometrija s analognim svojstvom kao parcijalne geometrije: graf kolinearnosti je distancijsko regularan. Međutim, po Feit-Higmanovu teoremu je $n \in \{2, 3, 4, 6, 8\}$ i dijametar tih grafova je omeđen.

Distancijsko regularni grafovi

E. R. van Dam, J. H. Koolen, H. Tanaka, *Distance-regular graphs*, Electron. J. Combin. DS22 (2016), Dynamic Surveys, 156 pp.

Klasične familije distancijsko regularnih grafova neomeđenog dijametra:

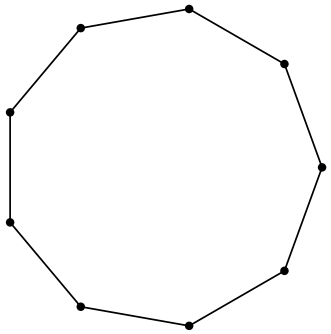
	D	b	α	β
Johnson graph $J(n,D), n \geqslant 2D$	D	1	1	$n-D$
Grassmann graph $J_q(n,D)$, $n \geqslant 2D$; twisted Grassmann graph $(n=2D+1)$	D	q	q	$\frac{q^{n-D+1}-1}{q-1}-1$
Hamming graph $H(D,e)$; Doob graph $(e=4)$	D	1	0	$e-1$
Halved Cube $\frac{1}{2}H(n,2)$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	1	2	$2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$
Bilinear forms graph $Bil(D \times e, q)$, $D \leqslant e$	D	q	$q-1$	q^e-1
Alternating forms graph $Alt(n,q)$, $m = 2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	q^2	q^2-1	q^m-1
Hermitian forms graph $Her(D,q^2)$	D	$-q$	$-q-1$	$-(-q)^D-1$
Quadratic forms graph $Qua(n,q)$, $m = 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$	$\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$	q^2	q^2-1	q^m-1
Dual polar graph; Hemmeter graph $(e=0)$; ${}^2\mathcal{A}_{2D-1}(\sqrt{q})$ also:	D D	q $-\sqrt{q}$	0 $\sqrt{q}\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}$	q^e $\sqrt{q}\frac{1+(-\sqrt{q})^D}{1-\sqrt{q}}$
Half dual polar graph $\mathcal{D}_{n,n}(q)$, $m = 2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$; Ustimenko graph	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	q^2	q^2+q	$\frac{q^{m+1}-1}{q-1}-1$

Distancijsko regularni grafovi

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Skup vrhova od G označimo $X = V(G)$, a broj vrhova $n = |X|$.

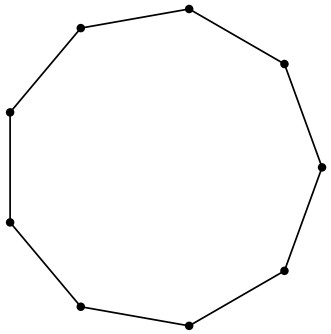
Distancijsko regularni grafovi

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Skup vrhova od G označimo $X = V(G)$, a broj vrhova $n = |X|$.



Distancijsko regularni grafovi

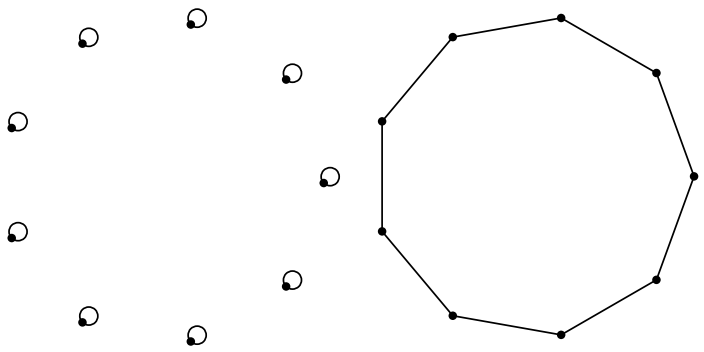
Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Skup vrhova od G označimo $X = V(G)$, a broj vrhova $n = |X|$.



Za $i = 0, \ldots, d$, neka je G_i graf s istim skupom vrhova X u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $d_G(x, y) = i$.

Distancijsko regularni grafovi

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Skup vrhova od G označimo $X = V(G)$, a broj vrhova $n = |X|$.

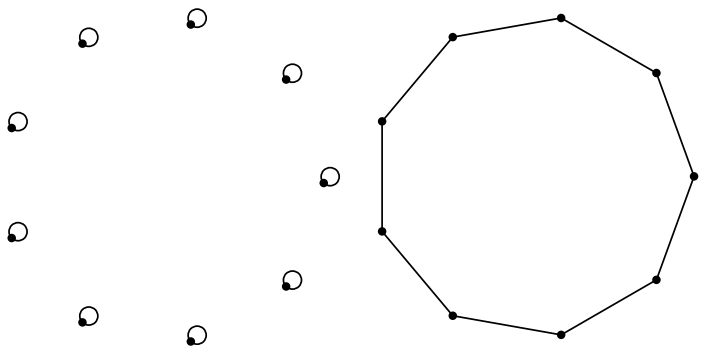


Za $i = 0, \ldots, d$, neka je G_i graf s istim skupom vrhova X u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $d_G(x, y) = i$.

G_0 sadrži samo petlje

Distancijsko regularni grafovi

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Skup vrhova od G označimo $X = V(G)$, a broj vrhova $n = |X|$.



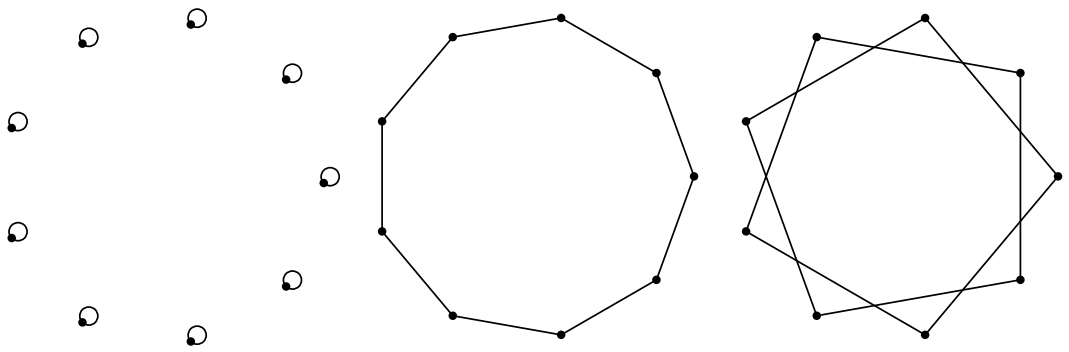
Za $i = 0, \ldots, d$, neka je G_i graf s istim skupom vrhova X u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $d_G(x, y) = i$.

G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

Distancijsko regularni grafovi

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Skup vrhova od G označimo $X = V(G)$, a broj vrhova $n = |X|$.



Za $i = 0, \ldots, d$, neka je G_i graf s istim skupom vrhova X u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $d_G(x, y) = i$.

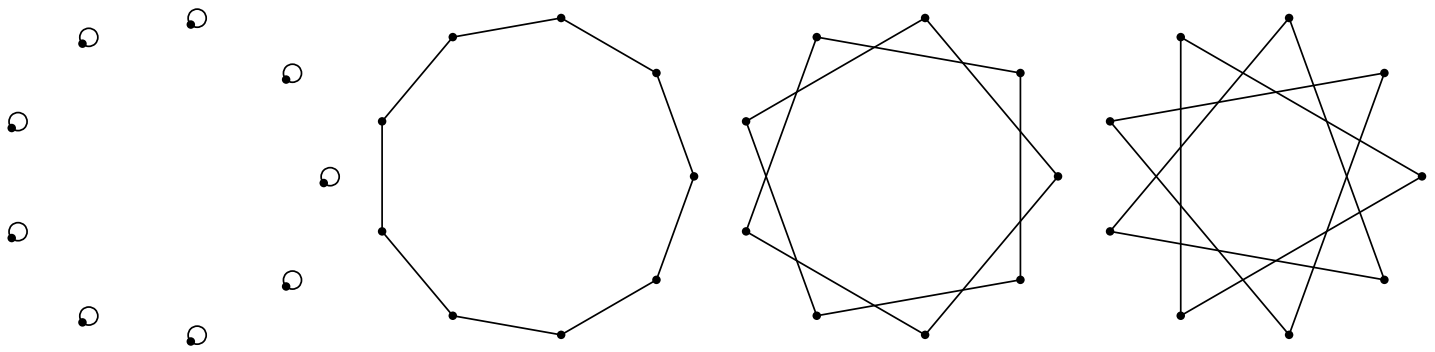
G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

G_2

Distancijsko regularni grafovi

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Skup vrhova od G označimo $X = V(G)$, a broj vrhova $n = |X|$.



Za $i = 0, \ldots, d$, neka je G_i graf s istim skupom vrhova X u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $d_G(x, y) = i$.

G_0 sadrži samo petlje

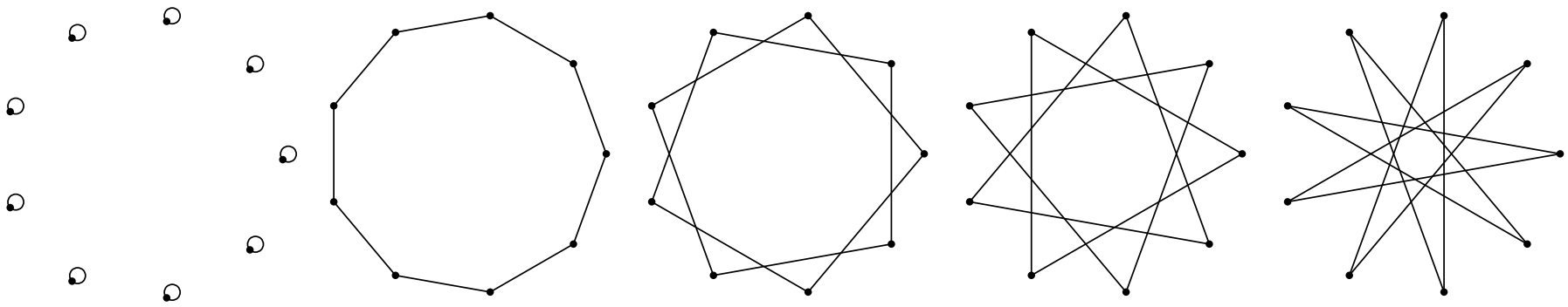
$G_1 = G$

G_2

G_3

Distancijsko regularni grafovi

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Skup vrhova od G označimo $X = V(G)$, a broj vrhova $n = |X|$.



Za $i = 0, \ldots, d$, neka je G_i graf s istim skupom vrhova X u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $d_G(x, y) = i$.

G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

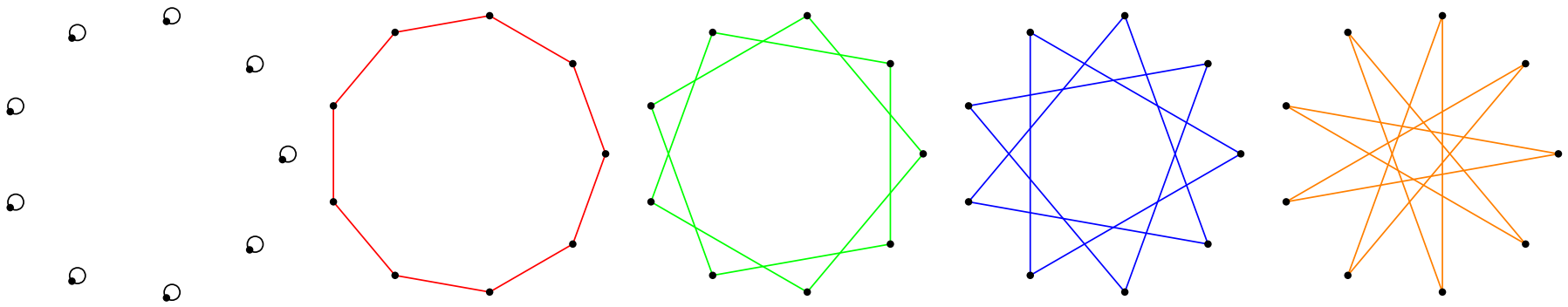
G_2

G_3

G_4

Distancijsko regularni grafovi

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Skup vrhova od G označimo $X = V(G)$, a broj vrhova $n = |X|$.



Za $i = 0, \ldots, d$, neka je G_i graf s istim skupom vrhova X u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $d_G(x, y) = i$.

G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

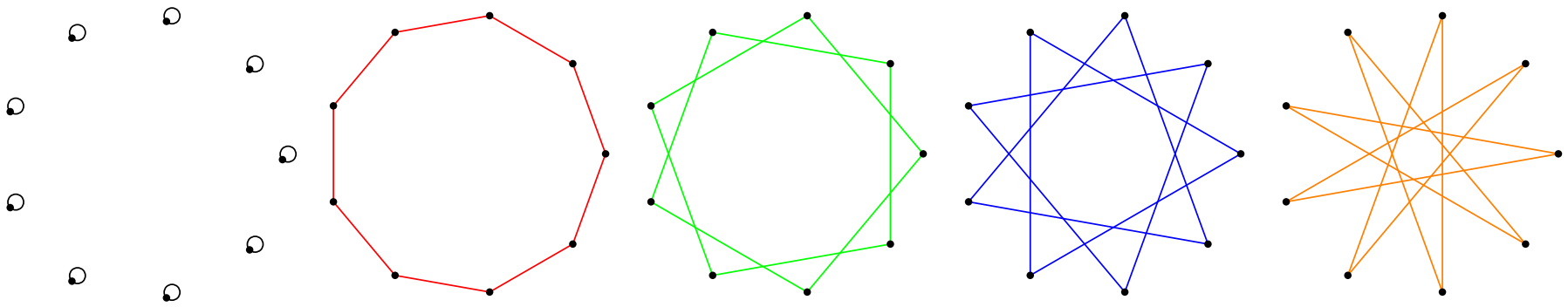
G_2

G_3

G_4

Distancijsko regularni grafovi

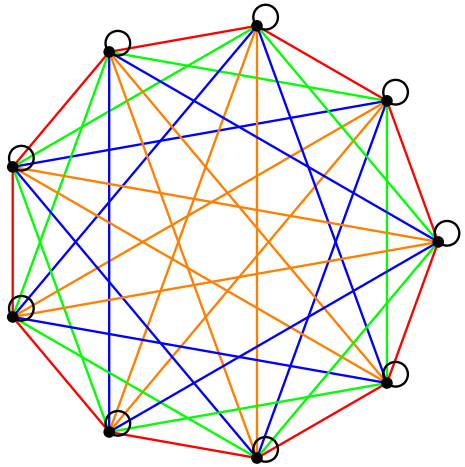
Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Skup vrhova od G označimo $X = V(G)$, a broj vrhova $n = |X|$.



Za $i = 0, \ldots, d$, neka je G_i graf s istim skupom vrhova X u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $d_G(x, y) = i$.

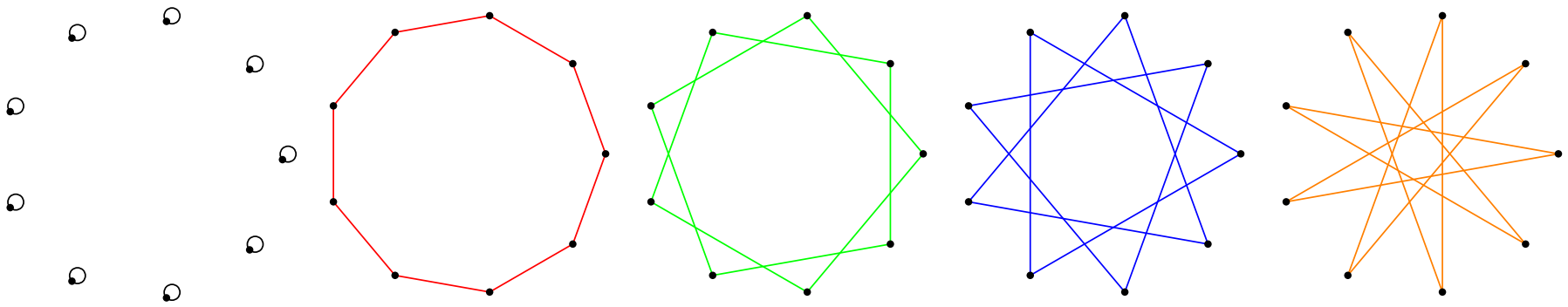
G_0 sadrži samo petlje

$$\left.\begin{array}{l} G_1 = G \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{array}\right\} \text{ čine particiju od } K_n$$



Distancijsko regularni grafovi

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Skup vrhova od G označimo $X = V(G)$, a broj vrhova $n = |X|$.



Za $i = 0, \ldots, d$, neka je G_i graf s istim skupom vrhova X u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $d_G(x, y) = i$.

G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

G_2

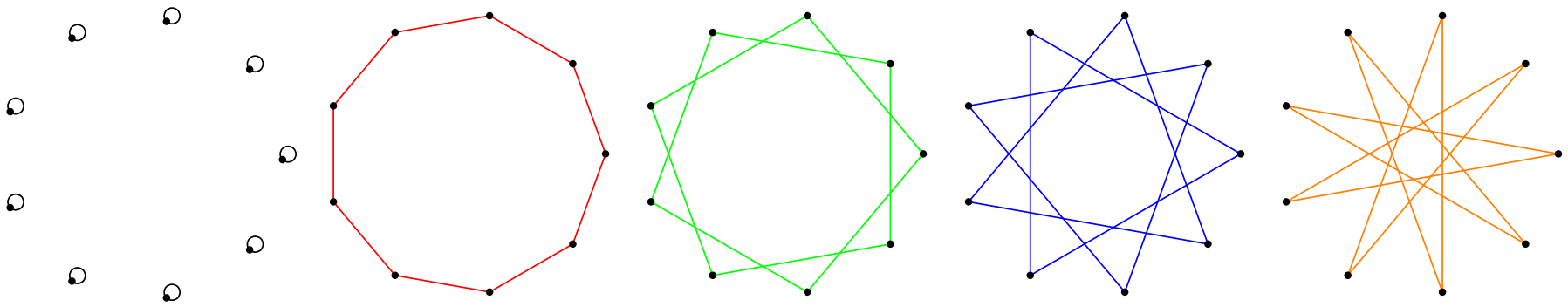
G_3

G_4

Neka su $x, y \in X$, $d(x, y) = \ell$.

Distancijsko regularni grafovi

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Skup vrhova od G označimo $X = V(G)$, a broj vrhova $n = |X|$.



Za $i = 0, \ldots, d$, neka je G_i graf s istim skupom vrhova X u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $d_G(x, y) = i$.

G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

G_2

G_3

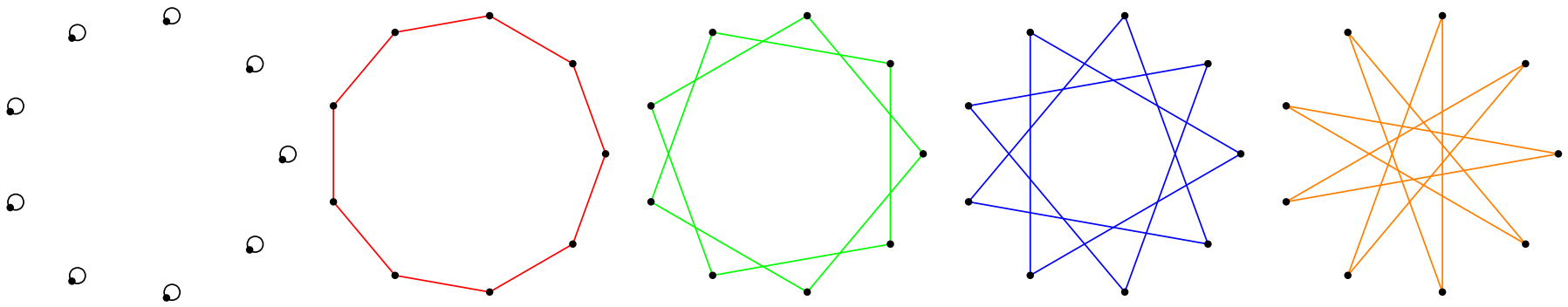
G_4

Neka su $x, y \in X$, $d(x, y) = \ell$.

$$p_{ij}^{\ell} = |V_i(x) \cap V_j(y)|$$

Distancijsko regularni grafovi

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Skup vrhova od G označimo $X = V(G)$, a broj vrhova $n = |X|$.



Za $i = 0, \ldots, d$, neka je G_i graf s istim skupom vrhova X u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $d_G(x, y) = i$.

G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

G_2

G_3

G_4

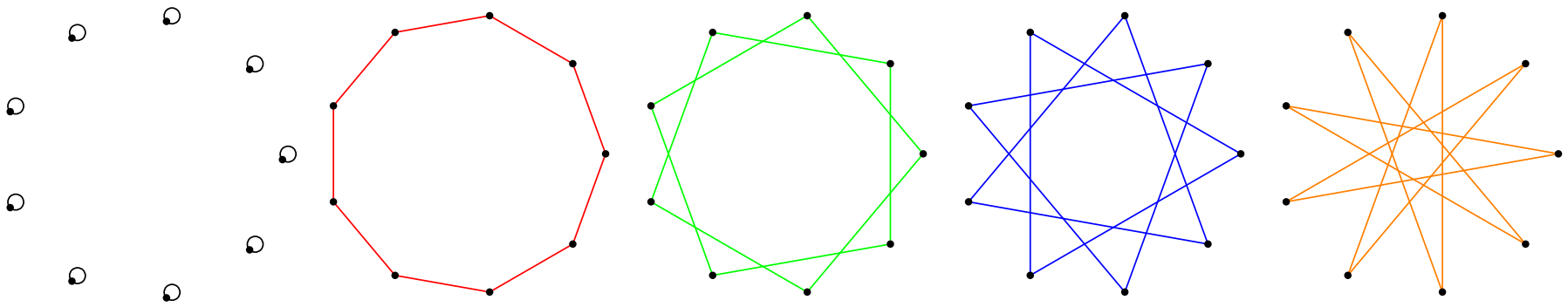
Neka su $x, y \in X$, $d(x, y) = \ell$.

$$p_{ij}^{\ell} = |V_i(x) \cap V_j(y)|$$

$$= \text{broj vrhova } z \text{ takvih da je } d(x, z) = i, \text{ a } d(z, y) = j$$

Distancijsko regularni grafovi

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Skup vrhova od G označimo $X = V(G)$, a broj vrhova $n = |X|$.



Za $i = 0, \ldots, d$, neka je G_i graf s istim skupom vrhova X u kojem su $x, y \in X$ susjedni ako i samo ako je $d_G(x, y) = i$.

G_0 sadrži samo petlje

$G_1 = G$

G_2

G_3

G_4

Neka su $x, y \in X$, $d(x, y) = \ell$.

$$p_{ij}^{\ell} = |V_i(x) \cap V_j(y)|$$

$= $ broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_ℓ, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_ℓ, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Za vrhove x, y takve da je $\{x, y\}$ brid u G_i kažemo da su i-asocirani.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_ℓ, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Za vrhove x, y takve da je $\{x, y\}$ brid u G_i kažemo da su i-asocirani.

Grafovi koji čine asocijacijsku shemu su regularni: G_i je stupnja $n_i = p_{ii}^{0}$.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

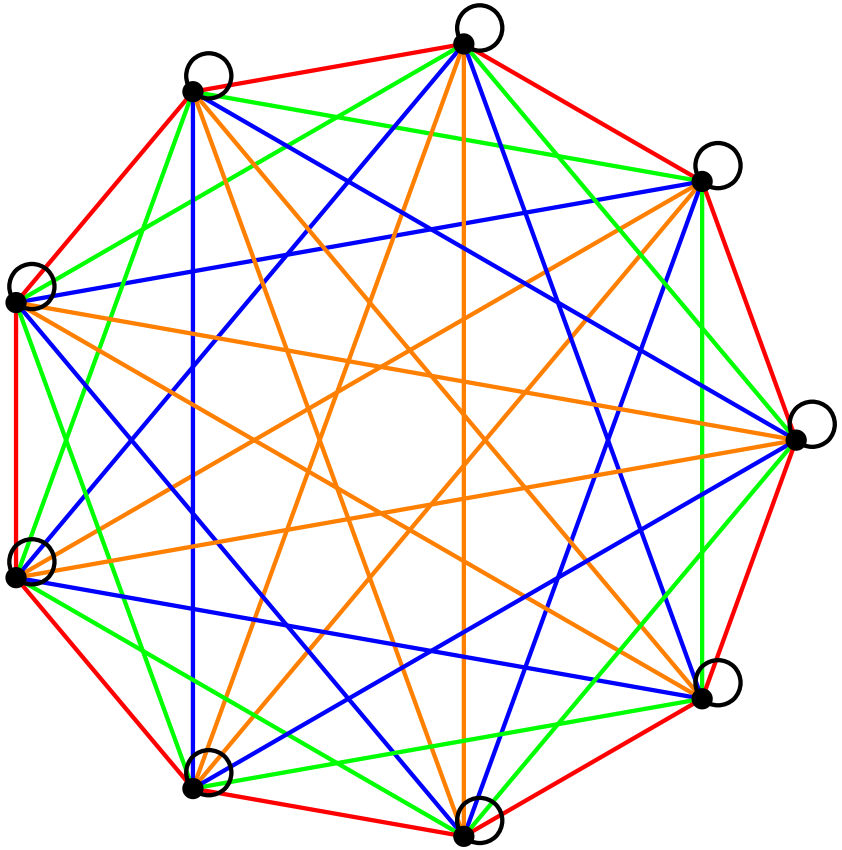
- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_ℓ, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Za vrhove x, y takve da je $\{x, y\}$ brid u G_i kažemo da su i-asocirani.

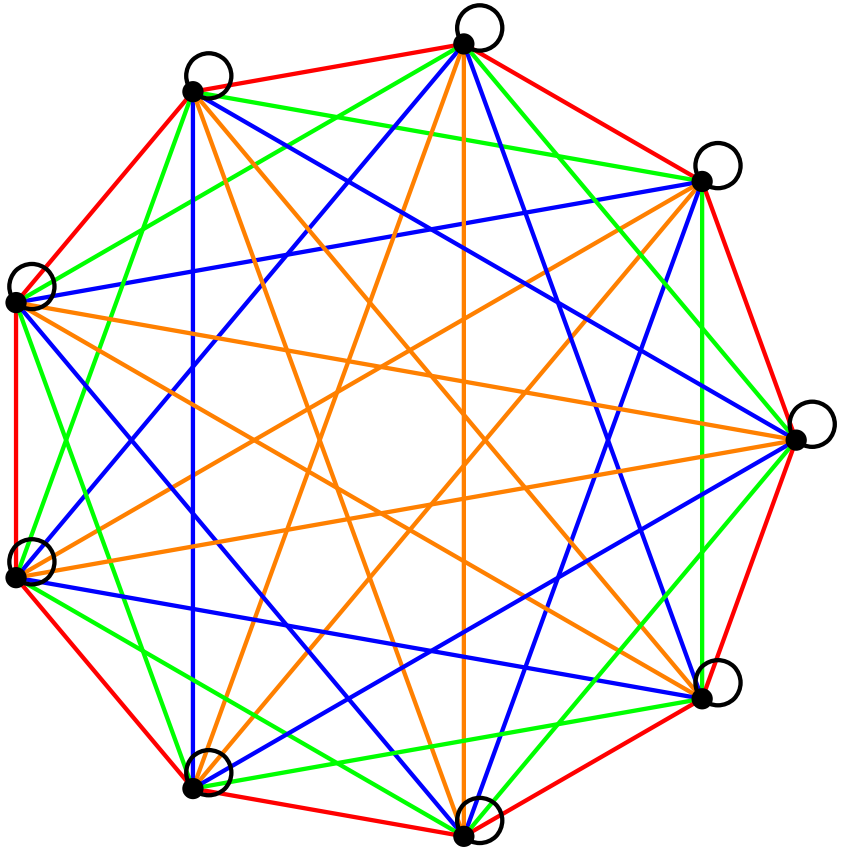
Grafovi koji čine asocijacijsku shemu su regularni: G_i je stupnja $n_i = p_{ii}^0$.

Neka su $A_0, \ldots, A_d$ matrice susjedstva grafova $G_0, \ldots, G_d$. To su simetrične $\{0, 1\}$-matrice tipa $n \times n$. Ekvivalentnu definiciju asocijacijske sheme dobivamo prevođenjem zahtjeva na jezik matrica.

Asocijacijske sheme

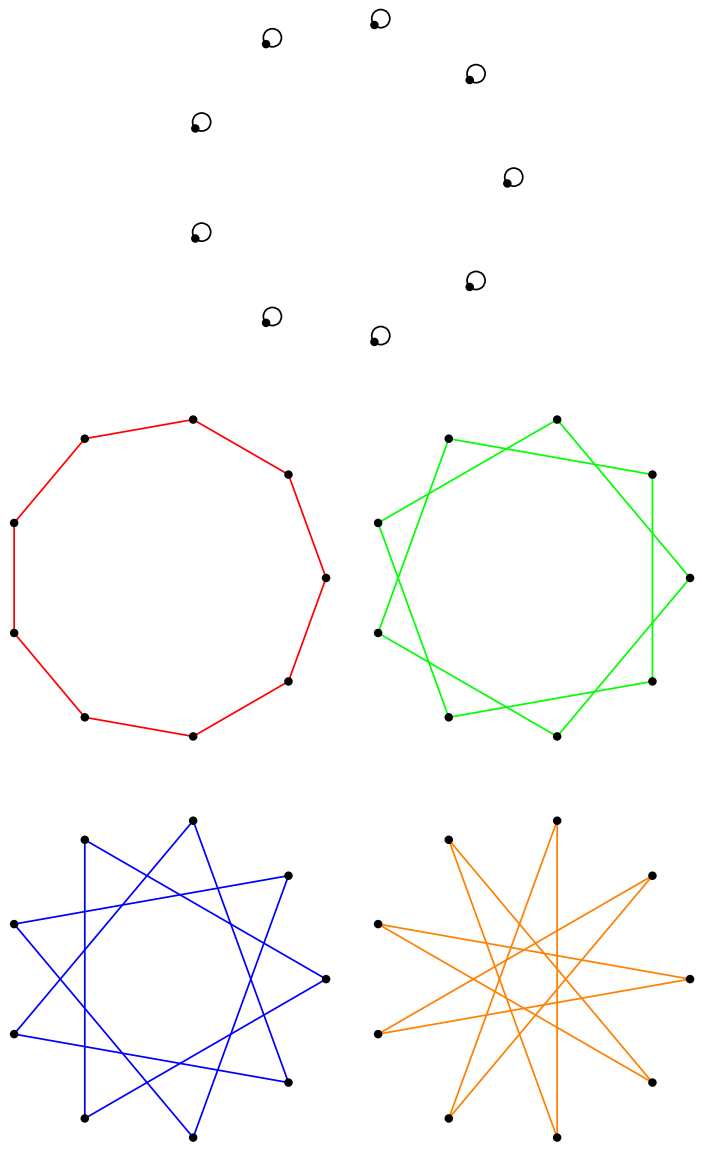


Asocijacijske sheme



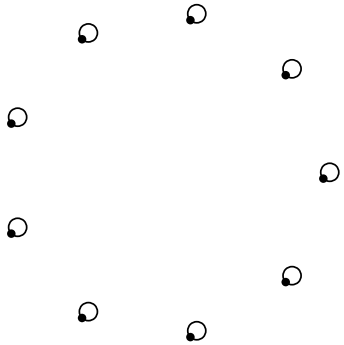
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Asocijacijske sheme

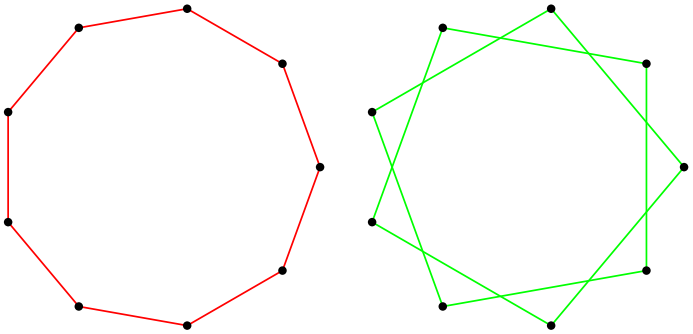


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

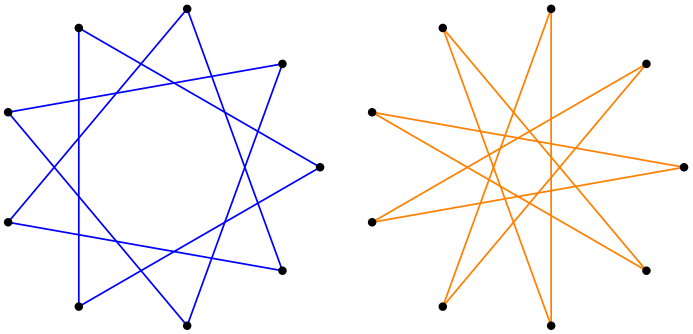
Asocijacijske sheme



$$A_0 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$



$$A_1 = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$



$$A_3 = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od simetričnih $\{0,1\}$-matrica $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takvih da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od simetričnih $\{0,1\}$-matrica $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takvih da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od simetričnih $\{0,1\}$-matrica $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takvih da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$, za sve $i, j \in \{0, \ldots, d\}$.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od simetričnih $\{0,1\}$-matrica $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takvih da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$, za sve $i, j \in \{0, \ldots, d\}$.

Zbog simetričnosti i trećeg svojstva, vrijedi komutativnost $A_i \cdot A_j = A_j \cdot A_i$.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od simetričnih $\{0,1\}$-matrica $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takvih da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$, za sve $i, j \in \{0, \ldots, d\}$.

Zbog simetričnosti i trećeg svojstva, vrijedi komutativnost $A_i \cdot A_j = A_j \cdot A_i$.

Potprostor $\langle A_0, \ldots, A_d \rangle$ od $M_n(\mathbb{R})$ je komutativna algebra s jedinicom, koju zovemo Bose-Mesnerovom algebrom sheme.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od simetričnih $\{0,1\}$-matrica $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takvih da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$, za sve $i, j \in \{0, \ldots, d\}$.

Zbog simetričnosti i trećeg svojstva, vrijedi komutativnost $A_i \cdot A_j = A_j \cdot A_i$.

Potprostor $\langle A_0, \ldots, A_d \rangle$ od $M_n(\mathbb{R})$ je komutativna algebra s jedinicom, koju zovemo Bose-Mesnerovom algebrom sheme.

Budući da su matrice $A_0, \ldots, A_d$ simetrične i komutiraju, možemo ih simultano dijagonalizirati. Neka su $p_i(j)$, $j = 0, \ldots, d$ svojstvene vrijednosti matrice A_i s kratnostima redom $m_0, \ldots, m_d$, a $E_0, \ldots, E_d$ matrice ortogonalnih projekcija na odgovarajuće svojstvene potprostore. To je još jedna baza Bose-Mesnerove algebre.

Dualnost u Bose-Mesnerovoj algebri

- $\{A_0, \ldots, A_d\}$ je baza Schurovih idempotenta
- $A_i \circ A_j = \begin{cases} A_i, & i = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$
- $A_0 = I$
- $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$
- $A_i \cdot E_j = p_i(j)\, E_j$
- $A_i = \sum_{j=0}^{d} p_i(j) E_j$
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$

- $\{E_0, \ldots, E_d\}$ je baza glavnih idempotenta
- $E_i \cdot E_j = \begin{cases} E_i, & i = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$
- $E_0 = \frac{1}{n} J$
- $\sum_{i=0}^{d} E_i = I$
- $E_i \circ A_j = \frac{1}{n} q_i(j)\, A_j$
- $E_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} q_i(j) A_j$
- $E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{d} q_{ij}^{\ell} E_\ell$

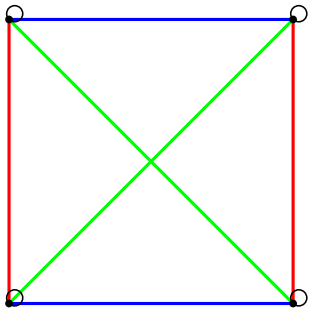
P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Neka grafovi $G_0, \ldots, G_d$ čine asocijacijsku shemu i neka su $A_0, \ldots, A_d$ odgovarajuće matrice susjedstva. Ako je neki od grafova dijametra d, recimo G_1, onda mora biti distancijsko regularan, a ostali grafovi (u prikladnom poretku) nastaju od metrike u G_1. Takve asocijacijske sheme zovemo metričkim.

P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Neka grafovi $G_0, \ldots, G_d$ čine asocijacijsku shemu i neka su $A_0, \ldots, A_d$ odgovarajuće matrice susjedstva. Ako je neki od grafova dijametra d, recimo G_1, onda mora biti distancijsko regularan, a ostali grafovi (u prikladnom poretku) nastaju od metrike u G_1. Takve asocijacijske sheme zovemo metričkim.

Primjer: asocijacijska shema grupe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nije metrička.

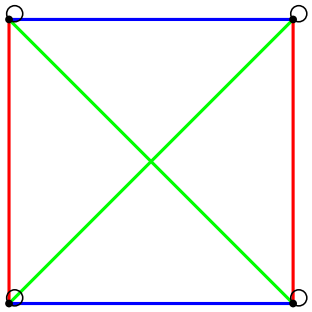


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Neka grafovi $G_0, \ldots, G_d$ čine asocijacijsku shemu i neka su $A_0, \ldots, A_d$ odgovarajuće matrice susjedstva. Ako je neki od grafova dijametra d, recimo G_1, onda mora biti distancijsko regularan, a ostali grafovi (u prikladnom poretku) nastaju od metrike u G_1. Takve asocijacijske sheme zovemo metričkim.

Primjer: asocijacijska shema grupe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nije metrička.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Za asocijacijsku shemu kažemo da je P-polinomijalna ako Schurove idempotente $A_0, \ldots, A_d$ možemo numerirati tako da za svaki $i = 0, \ldots, d$ postoji polinom f_i stupnja i za koji je $A_i = f_i(A_1)$.

P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{A}$ ekvivalentno je:

- $\mathcal{A}$ je metrička, tj. dolazi od distancijsko regularnog grafa.

P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{A}$ ekvivalentno je:

- $\mathcal{A}$ je metrička, tj. dolazi od distancijsko regularnog grafa.
- $\mathcal{A}$ je P-polinomijalna.

P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{A}$ ekvivalentno je:

- $\mathcal{A}$ je metrička, tj. dolazi od distancijsko regularnog grafa.
- $\mathcal{A}$ je P-polinomijalna.
- U nekoj numeraciji za presječne brojeve vrijedi $p_{ij}^{\ell} = 0$ ako je $\ell > i + j$ te $p_{ij}^{\ell} \neq 0$ ako je $\ell = i + j$.

P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{A}$ ekvivalentno je:

- $\mathcal{A}$ je metrička, tj. dolazi od distancijsko regularnog grafa.
- $\mathcal{A}$ je P-polinomijalna.
- U nekoj numeraciji za presječne brojeve vrijedi $p_{ij}^{\ell} = 0$ ako je $\ell > i + j$ te $p_{ij}^{\ell} \neq 0$ ako je $\ell = i + j$.
- U nekoj numeraciji za svaki $i = 0, \ldots, d$ postoji polinom f_i stupnja i takav da svojstvene vrijednosti sheme zadovoljavaju $p_i(j) = f_i(p_1(j))$, $j = 0, \ldots, d$.

P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{A}$ ekvivalentno je:

- $\mathcal{A}$ je metrička, tj. dolazi od distancijsko regularnog grafa.
- $\mathcal{A}$ je P-polinomijalna.
- U nekoj numeraciji za presječne brojeve vrijedi $p_{ij}^{\ell} = 0$ ako je $\ell > i + j$ te $p_{ij}^{\ell} \neq 0$ ako je $\ell = i + j$.
- U nekoj numeraciji za svaki $i = 0, \ldots, d$ postoji polinom f_i stupnja i takav da svojstvene vrijednosti sheme zadovoljavaju $p_i(j) = f_i(p_1(j))$, $j = 0, \ldots, d$.

Za asocijacijsku shemu kažemo da je Q-polinomijalna ako glavne idempotente $E_0, \ldots, E_d$ možemo numerirati tako da za svaki $i = 0, \ldots, d$ postoji polinom f_i stupnja i za koji je $E_i = f_i \circ (E_1)$.

P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{A}$ ekvivalentno je:

- $\mathcal{A}$ je Q-polinomijalna.

P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{A}$ ekvivalentno je:

- $\mathcal{A}$ je Q-polinomijalna.
- U nekoj numeraciji za Kreinove parametre vrijedi $q_{ij}^{\ell} = 0$ ako je $\ell > i + j$ te $q_{ij}^{\ell} \neq 0$ ako je $\ell = i + j$.

P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{A}$ ekvivalentno je:

- $\mathcal{A}$ je Q-polinomijalna.
- U nekoj numeraciji za Kreinove parametre vrijedi $q_{ij}^{\ell} = 0$ ako je $\ell > i + j$ te $q_{ij}^{\ell} \neq 0$ ako je $\ell = i + j$.
- U nekoj numeraciji za svaki $i = 0, \ldots, d$ postoji polinom f_i stupnja i takav da dualne svojstvene vrijednosti zadovoljavaju $q_i(j) = f_i(q_1(j))$, $j = 0, \ldots, d$.

P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{A}$ ekvivalentno je:

- $\mathcal{A}$ je Q-polinomijalna.
- U nekoj numeraciji za Kreinove parametre vrijedi $q_{ij}^{\ell} = 0$ ako je $\ell > i + j$ te $q_{ij}^{\ell} \neq 0$ ako je $\ell = i + j$.
- U nekoj numeraciji za svaki $i = 0, \ldots, d$ postoji polinom f_i stupnja i takav da dualne svojstvene vrijednosti zadovoljavaju $q_i(j) = f_i(q_1(j))$, $j = 0, \ldots, d$.

Q-polinomijalne sheme nemaju lijepu kombinatornu karakterizaciju!

P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{A}$ ekvivalentno je:

- $\mathcal{A}$ je Q-polinomijalna.
- U nekoj numeraciji za Kreinove parametre vrijedi $q_{ij}^{\ell} = 0$ ako je $\ell > i + j$ te $q_{ij}^{\ell} \neq 0$ ako je $\ell = i + j$.
- U nekoj numeraciji za svaki $i = 0, \ldots, d$ postoji polinom f_i stupnja i takav da dualne svojstvene vrijednosti zadovoljavaju $q_i(j) = f_i(q_1(j))$, $j = 0, \ldots, d$.

Q-polinomijalne sheme nemaju lijepu kombinatornu karakterizaciju!

Imaju primjene u kvantnoj teoriji informacija: skupovi ekviangularnih pravaca, *mutually unbiased bases*.

P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{A}$ ekvivalentno je:

- $\mathcal{A}$ je Q-polinomijalna.
- U nekoj numeraciji za Kreinove parametre vrijedi $q_{ij}^{\ell} = 0$ ako je $\ell > i + j$ te $q_{ij}^{\ell} \neq 0$ ako je $\ell = i + j$.
- U nekoj numeraciji za svaki $i = 0, \ldots, d$ postoji polinom f_i stupnja i takav da dualne svojstvene vrijednosti zadovoljavaju $q_i(j) = f_i(q_1(j))$, $j = 0, \ldots, d$.

Q-polinomijalne sheme nemaju lijepu kombinatornu karakterizaciju!

Imaju primjene u kvantnoj teoriji informacija: skupovi ekviangularnih pravaca, *mutually unbiased bases*.

Sve poznate familije asocijacijskih shema s neomeđenim brojem klasa d su istovremeno P- i Q-polinomijalne!

P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Teorem.

Za asocijacijsku shemu $\mathcal{A}$ ekvivalentno je:

- $\mathcal{A}$ je Q-polinomijalna.
- U nekoj numeraciji za Kreinove parametre vrijedi $q_{ij}^{\ell} = 0$ ako je $\ell > i + j$ te $q_{ij}^{\ell} \neq 0$ ako je $\ell = i + j$.
- U nekoj numeraciji za svaki $i = 0, \ldots, d$ postoji polinom f_i stupnja i takav da dualne svojstvene vrijednosti zadovoljavaju $q_i(j) = f_i(q_1(j))$, $j = 0, \ldots, d$.

Q-polinomijalne sheme nemaju lijepu kombinatornu karakterizaciju!

Imaju primjene u kvantnoj teoriji informacija: skupovi ekviangularnih pravaca, *mutually unbiased bases*.

Sve poznate familije asocijacijskih shema s neomeđenim brojem klasa d su istovremeno P- i Q-polinomijalne!

Hipoteza (Bannai, Ito): za d dovoljno velik, primitivna asocijacijska shema s d klasa je P-polinomijalna ako i samo ako je Q-polinomijalna.

Asocijacijske sheme

V. Krčadinac, R. Vlahović Kruc, *Schematic 4-designs*, Discrete Math. **346** (2023), no. 7, Paper No. 113385.

Asocijacijske sheme

V. Krčadinac, R. Vlahović Kruc, *Schematic 4-designs*, Discrete Math. **346** (2023), no. 7, Paper No. 113385.

Abstract. We study 4-designs with three intersection numbers. By the Cameron-Delsarte theorem, the blocks form a symmetric three-class association scheme. This imposes strong restrictions on the parameters of such designs. We calculate the eigenvalues of the association scheme from the design parameters and determine all admissible parameters with at most 1000 points. An infinite family of admissible parameters is discovered. Designs with small admissible parameters exist and are related to the quadratic residue codes.

Asocijacijske sheme

V. Krčadinac, R. Vlahović Kruc, *Schematic 4-designs*, Discrete Math. **346** (2023), no. 7, Paper No. 113385.

Abstract. We study 4-designs with three intersection numbers. By the Cameron-Delsarte theorem, the blocks form a symmetric three-class association scheme. This imposes strong restrictions on the parameters of such designs. We calculate the eigenvalues of the association scheme from the design parameters and determine all admissible parameters with at most 1000 points. An infinite family of admissible parameters is discovered. Designs with small admissible parameters exist and are related to the quadratic residue codes.

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$, blokovi kao skup vrhova i veličine presjeka kao relacije susjedstva tvore asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Asocijacijske sheme

L. Relić, *Asocijacijske sheme*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2022.

Asocijacijske sheme

L. Relić, *Asocijacijske sheme*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2022.

Akademska godina 2023./24.

$\rightsquigarrow$ **Kolegij na doktorskom studiju o asocijacijskim shemama!**

Asocijacijske sheme

L. Relić, *Asocijacijske sheme*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2022.

Akademska godina 2023./24.

$\rightsquigarrow$ **Kolegij na doktorskom studiju o asocijacijskim shemama!**

EPP

https://web.math.pmf.unizg.hr/acco/index.p 110%

HRZZ Croatian Science Foundation

Algorithmic Constructions of Combinatorial Objects (ACCO)

Grant no. IP-2020-02-9752 supported by the Croatian Science Foundation.

- Home
- Members
- Seminars
- Data & software
- Publications
- Presentations
- Meetings

Algorithmic Constructions of Combinatorial Objects

The topic of this research project are constructions of combinatorial objects with additional algebraic structure, such as quasi-symmetric designs, schematic designs, q-analogs of designs, difference sets, (semi)partial geometries, and generalisations. Results in algebraic combinatorics impose restrictions on the parameters and properties of such objects that can be exploited to narrow-down the search space and develop specialised algorithms for their construction and classification.

Research objectives

- Development of algorithmic methods for the construction and classification of combinatorial objects with strong algebraic structure. These methods utilise known algebraic and combinatorial properties of the objects to handle larger parameters and problems that have been out of reach with traditional construction methods.
- Widening of theoretical knowledge about combinatorial objects that are the topic of research. Interesting theorems are often discovered and proved on the basis of available examples. It is expected that the results of the project will lead to such discoveries.
- Development of a software package, implemented in GAP, for the construction and analysis of combinatorial objects.

EPP

https://web.math.pmf.unizg.hr/acco/members.p 110%

HRZZ Croatian Science Foundation

Algorithmic Constructions of Combinatorial Objects (ACCO)

Grant no. IP-2020-02-9752 supported by the Croatian Science Foundation.

- Home
- Members
- Seminars
- Data & software
- Publications
- Presentations
- Meetings

Algorithmic Constructions of Combinatorial Objects

Principal investigator

- Vedran Krčadinac, associate professor, Faculty of Science, University of Zagreb.

Research group

- Filip Martinović, PhD student, Faculty of Electrical Engineering and Computing, University of Zagreb.
- Anamari Nakić, associate professor, Faculty of Electrical Engineering and Computing, University of Zagreb.
- Mario Osvin Pavčević, full professor, Faculty of Electrical Engineering and Computing, University of Zagreb.
- Lucija Relić, PhD student, Faculty of Science, University of Zagreb.
- Kristijan Tabak, lecturer, Rochester Institute of Technology Croatia.
- Renata Vlahović Kruc, postdoctoral researcher, Faculty of Science, University of Zagreb.

EPP

https://web.math.pmf.unizg.hr/acco/data.php 110%

HRZZ Croatian Science Foundation

Algorithmic Constructions of Combinatorial Objects (ACCO)

Grant no. IP-2020-02-9752 supported by the Croatian Science Foundation.

- Home
- Members
- Seminars
- Data & software
- Publications
- Presentations
- Meetings

Algorithmic Constructions of Combinatorial Objects

Tables of combinatorial objects

- Steiner 2-designs
- Quasi-symmetric designs
- Strongly regular configurations
- Cubes of symmetric designs

Software

- **Schematic 4-designs** (GitHub repository)

  Program to compute admissible parameters of Schematic 4-designs. See this paper.

- **Prescribed Automorphism Groups** (web page, GitHub repository)

  A GAP package for constructing combinatorial objects with prescribed automorphism groups. See the manual.

EPP

https://web.math.pmf.unizg.hr/acco/meetin 110%

HRZZ Croatian Science Foundation

Algorithmic Constructions of Combinatorial Objects (ACCO)

Grant no. IP-2020-02-9752 supported by the Croatian Science Foundation.

- Home
- Members
- Seminars
- Data & software
- Publications
- Presentations
- Meetings

Algorithmic Constructions of Combinatorial Objects

Description

Combinatorial Constructions Conference (CCC) is a conference on Combinatorics supported by the Croatian Science Foundation in scope of the project IP-2020-02-9752. It is scheduled for April 7-13, 2024 with talks from Monday (April 8) to Friday (April 12). The main topics include Design Theory, Finite Geometry, Graph Theory, Coding Theory, Cryptography, Algebraic Combinatorics, Finite Fields and their Applications.

Venue

The conference will take place at the Centre for Advanced Academic Studies (CAAS) in Dubrovnik, Croatia. Dubrovnik is a beautiful medieval city included in the UNESCO World Heritage List.

Kraj

Hvala na pažnji!