Mozaici simetričnih dizajna*

Vedran Krčadinac

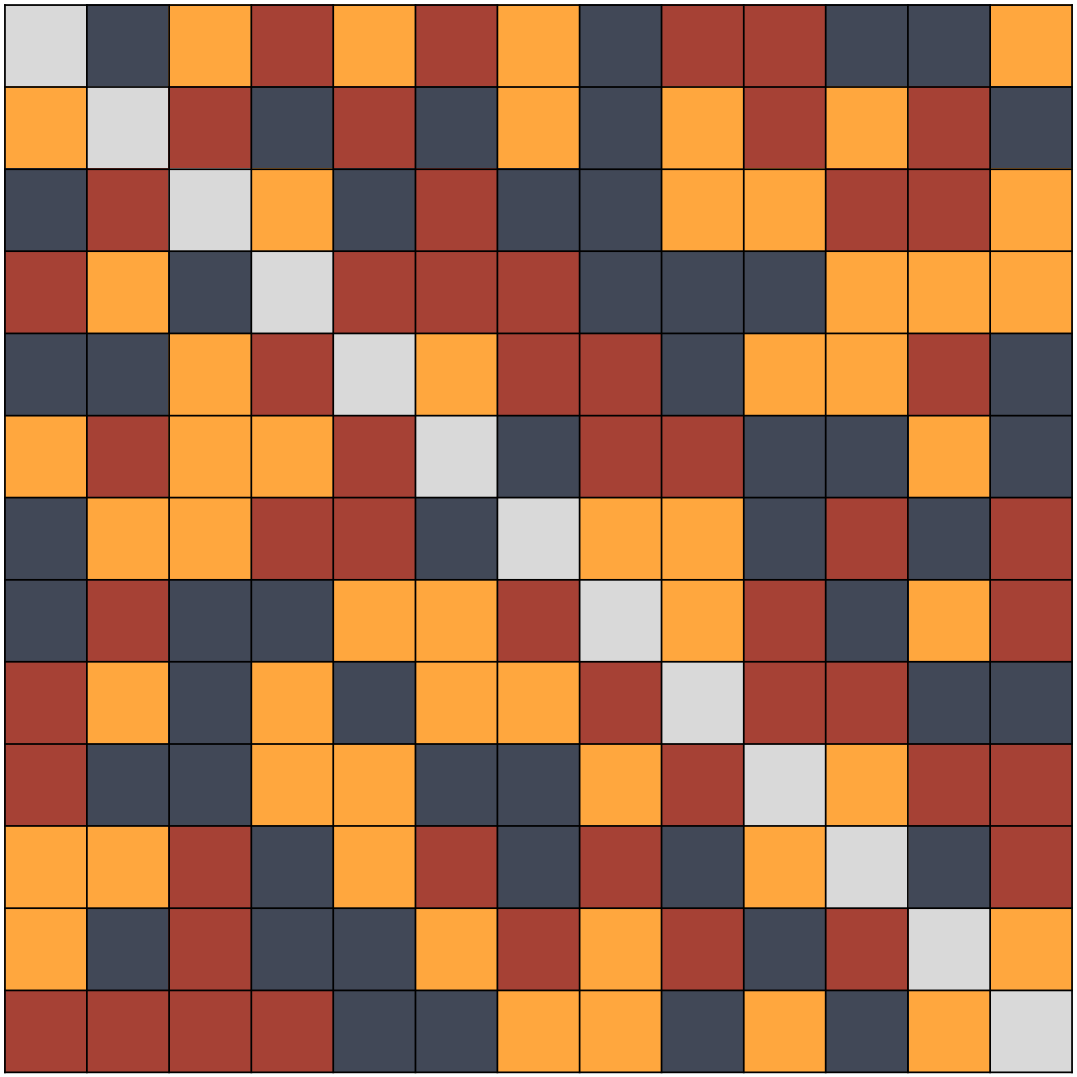
PMF-MO

11.12.2023.

* This work was fully supported by the Croatian Science Foundation under the project 9752.

Antiohijski mozaik

Mozaik $(13, 4, 1)$ dizajna



Mozaik $(13, 4, 1)$ dizajna

$$\begin{bmatrix}
0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\
3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \\
1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\
2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\
3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\
2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\
1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\
3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\
3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0
\end{bmatrix}$$

Mozaik $(13, 4, 1)$ dizajna

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Mozaik $(13, 4, 1)$ dizajna

$$\begin{bmatrix}
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\
2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Mozaik $(13, 4, 1)$ dizajna

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0
\end{bmatrix}$$

Mozaik $(13, 4, 1)$ dizajna $\oplus$ $(13, 1, 0)$ dizajn

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Mozaici t-dizajna

O. W. Gnilke, M. Greferath, M. O. Pavčević, *Mosaics of combinatorial designs*, Des. Codes Cryptogr. **86** (2018), no. 1, 85–95.

Mozaici t-dizajna

O. W. Gnilke, M. Greferath, M. O. Pavčević, *Mosaics of combinatorial designs*, Des. Codes Cryptogr. **86** (2018), no. 1, 85–95.

$$t_1\text{-}(v, k_1, \lambda_1) \oplus t_2\text{-}(v, k_2, \lambda_2) \oplus \cdots \oplus t_c\text{-}(v, k_c, \lambda_c)$$

Mozaici t-dizajna

O. W. Gnilke, M. Greferath, M. O. Pavčević, *Mosaics of combinatorial designs*, Des. Codes Cryptogr. **86** (2018), no. 1, 85–95.

$$t_1\text{-}(v, k_1, \lambda_1) \oplus t_2\text{-}(v, k_2, \lambda_2) \oplus \cdots \oplus t_c\text{-}(v, k_c, \lambda_c)$$

Uvodni primjer:

$$2\text{-}(13, 4, 1) \oplus 2\text{-}(13, 4, 1) \oplus 2\text{-}(13, 4, 1) \oplus 2\text{-}(13, 1, 0)$$

Mozaici t-dizajna

O. W. Gnilke, M. Greferath, M. O. Pavčević, *Mosaics of combinatorial designs*, Des. Codes Cryptogr. **86** (2018), no. 1, 85–95.

$$t_1\text{-}(v, k_1, \lambda_1) \oplus t_2\text{-}(v, k_2, \lambda_2) \oplus \cdots \oplus t_c\text{-}(v, k_c, \lambda_c)$$

Uvodni primjer:

$$2\text{-}(13, 4, 1) \oplus 2\text{-}(13, 4, 1) \oplus 2\text{-}(13, 4, 1) \oplus 2\text{-}(13, 1, 0)$$

Trivijalni primjer:

$$t\text{-}(v, k, \lambda) \oplus t\text{-}(v, v - k, \overline{\lambda})$$

Mozaici t-dizajna

O. W. Gnilke, M. Greferath, M. O. Pavčević, *Mosaics of combinatorial designs*, Des. Codes Cryptogr. **86** (2018), no. 1, 85–95.

$$t_1\text{-}(v, k_1, \lambda_1) \oplus t_2\text{-}(v, k_2, \lambda_2) \oplus \cdots \oplus t_c\text{-}(v, k_c, \lambda_c)$$

Uvodni primjer:

$$2\text{-}(13, 4, 1) \oplus 2\text{-}(13, 4, 1) \oplus 2\text{-}(13, 4, 1) \oplus 2\text{-}(13, 1, 0)$$

Trivijalni primjer:

$$t\text{-}(v, k, \lambda) \oplus t\text{-}(v, v-k, \overline{\lambda})$$

$$\overline{\lambda} = \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{t}{s} \lambda_s = \lambda \frac{\binom{v-t}{k}}{\binom{v-t}{k-t}}$$

Mozaici t-dizajna

Teorem.

Za svaku prim potenciju q postoji q-mozaik afinih ravnina:

$$2\text{-}(q^2, q, 1) \oplus \cdots \oplus 2\text{-}(q^2, q, 1)$$

Mozaici t-dizajna

Teorem.

Za svaku prim potenciju q postoji q-mozaik afinih ravnina:

$$2\text{-}(q^2, q, 1) \oplus \cdots \oplus 2\text{-}(q^2, q, 1)$$

Teorem.

Ako postoji rastavljivi t-(v, k, λ) dizajn, onda postoji c-mozaik ($c = v/k$)

$$t\text{-}(v, k, \lambda) \oplus \cdots \oplus t\text{-}(v, k, \lambda).$$

Mozaici t-dizajna

Teorem.

Za svaku prim potenciju q postoji q-mozaik afinih ravnina:

$$2\text{-}(q^2, q, 1) \oplus \cdots \oplus 2\text{-}(q^2, q, 1)$$

Teorem.

Ako postoji rastavljivi t-(v, k, λ) dizajn, onda postoji c-mozaik ($c = v/k$)

$$t\text{-}(v, k, \lambda) \oplus \cdots \oplus t\text{-}(v, k, \lambda).$$

Pitanje. Postoji li mozaik simetričnih dizajna s ovim parametrima?

$$2\text{-}(31, 15, 7) \oplus 2\text{-}(31, 10, 3) \oplus 2\text{-}(31, 6, 1)$$

Mozaici simetričnih dizajna

Mozaici simetričnih dizajna

A. Ćustić, V. Krčadinac, Y. Zhou, *Tiling groups with difference sets*, Electron. J. Combin. **22** (2015), no. 2, Paper 2.56, 13 pp.

Mozaici simetričnih dizajna

A. Ćustić, V. Krčadinac, Y. Zhou, *Tiling groups with difference sets*, Electron. J. Combin. **22** (2015), no. 2, Paper 2.56, 13 pp.

Diferencijski skup u grupi G reda v je $D \subseteq G$, $|D| = k$, takav da za svaki $x \in G \setminus \{1\}$ postoji točno λ parova $(a, b) \in D \times D$ sa $ab^{-1} = x$.

Mozaici simetričnih dizajna

A. Ćustić, V. Krčadinac, Y. Zhou, *Tiling groups with difference sets*, Electron. J. Combin. **22** (2015), no. 2, Paper 2.56, 13 pp.

Diferencijski skup u grupi G reda v je $D \subseteq G$, $|D| = k$, takav da za svaki $x \in G \setminus \{1\}$ postoji točno λ parova $(a, b) \in D \times D$ sa $ab^{-1} = x$.

Razvoj diferencijskog skupa je $\operatorname{dev} D = \{xD \mid x \in G\}$.

Mozaici simetričnih dizajna

A. Ćustić, V. Krčadinac, Y. Zhou, *Tiling groups with difference sets*, Electron. J. Combin. **22** (2015), no. 2, Paper 2.56, 13 pp.

Diferencijski skup u grupi G reda v je $D \subseteq G$, $|D| = k$, takav da za svaki $x \in G \setminus \{1\}$ postoji točno λ parova $(a, b) \in D \times D$ sa $ab^{-1} = x$.

Razvoj diferencijskog skupa je $\operatorname{dev} D = \{xD \mid x \in G\}$.

Teorem.

Ako je $D \subseteq G$ diferencijski skup, onda je $\operatorname{dev} G$ skup blokova simetričnog (v, k, λ) dizajna sa skupom točaka G. Taj dizajn ima grupu automorfizama izomorfnu s G koja djeluje regularno na točke i blokove.

Mozaici simetričnih dizajna

A. Ćustić, V. Krčadinac, Y. Zhou, *Tiling groups with difference sets*, Electron. J. Combin. **22** (2015), no. 2, Paper 2.56, 13 pp.

Diferencijski skup u grupi G reda v je $D \subseteq G$, $|D| = k$, takav da za svaki $x \in G \setminus \{1\}$ postoji točno λ parova $(a, b) \in D \times D$ sa $ab^{-1} = x$.

Razvoj diferencijskog skupa je $\operatorname{dev} D = \{xD \mid x \in G\}$.

Teorem.

Ako je $D \subseteq G$ diferencijski skup, onda je $\operatorname{dev} G$ skup blokova simetričnog (v, k, λ) dizajna sa skupom točaka G. Taj dizajn ima grupu automorfizama izomorfnu s G koja djeluje regularno na točke i blokove.

Obrnuto, ako simetrični (v, k, λ) dizajn ima regularnu grupu automorfizama G, onda taj dizajn nastaje od diferencijskog skupa u G.

Mozaici simetričnih dizajna

Popločavanje grupe G je familija u parovima disjunktnih (v, k, λ) diferencijskih skupova $D_1, \ldots, D_c$ takva da je $D_1 \cup \cdots \cup D_c = G \setminus \{1\}$.

Mozaici simetričnih dizajna

Popločavanje grupe G je familija u parovima disjunktnih (v, k, λ) diferencijskih skupova $D_1, \ldots, D_c$ takva da je $D_1 \cup \cdots \cup D_c = G \setminus \{1\}$.

Primjer. Popločavanje grupe $\mathbb{Z}_{31}$ sa $(31, 6, 1)$ diferencijskim skupovima:

$$D_1 = \{1, 5, 11, 24, 25, 27\}$$

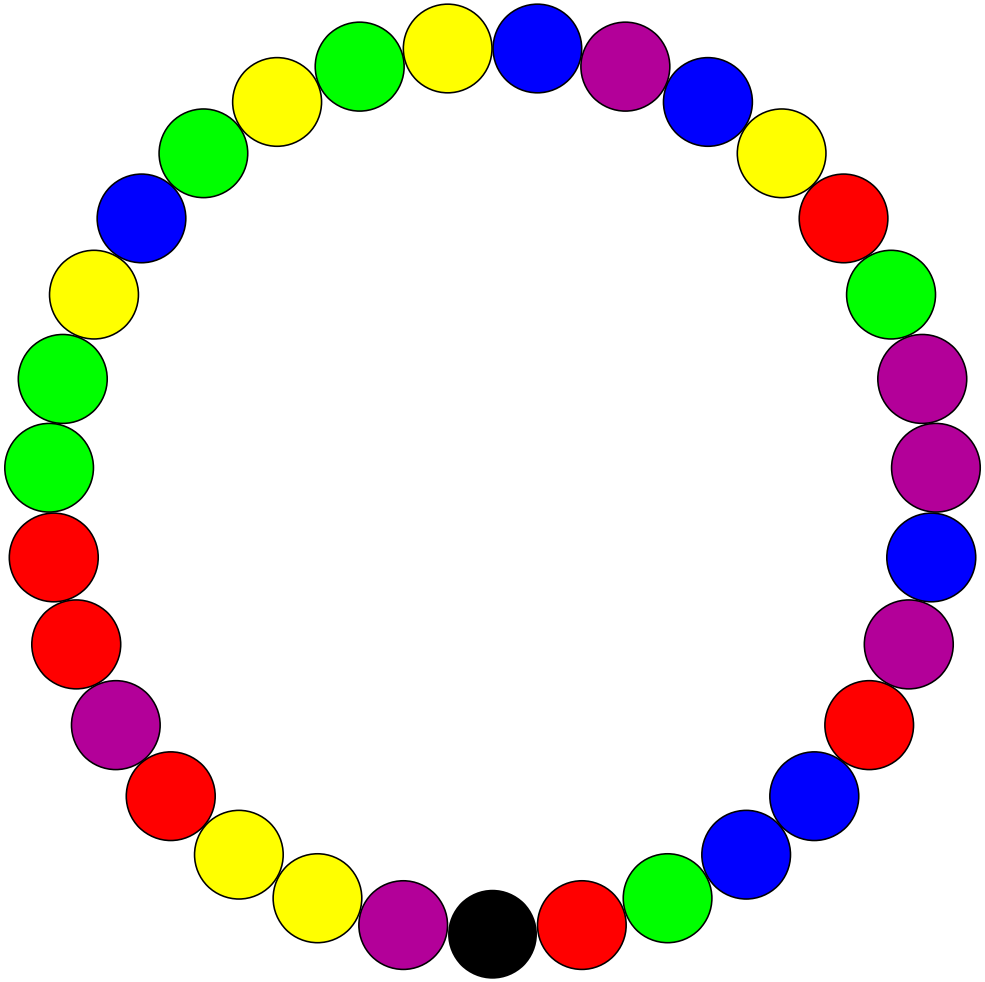
$$D_2 = \{2, 10, 17, 19, 22, 23\}$$

$$D_3 = \{3, 4, 7, 13, 15, 20\}$$

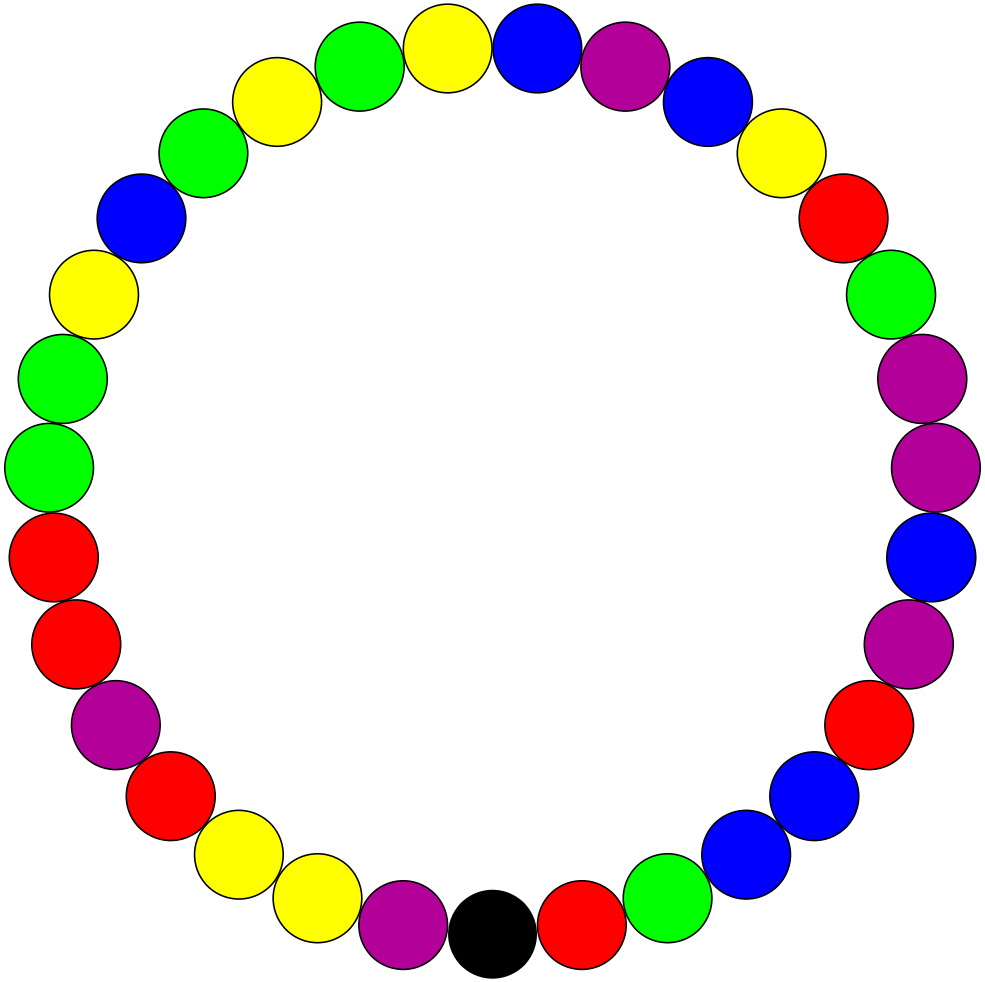
$$D_4 = \{6, 8, 9, 14, 26, 30\}$$

$$D_5 = \{12, 16, 18, 21, 28, 29\}$$

Mozaici simetričnih dizajna



Mozaici simetričnih dizajna



https://www.imaginary.org/gallery/difference-bracelets

Mozaici simetričnih dizajna

Languages search About Projects Participate Contact Get Access

IMAGINARY
open mathematics

Events Programs Galleries Hands-On Films Texts Exhibitions

gallery

Difference bracelets

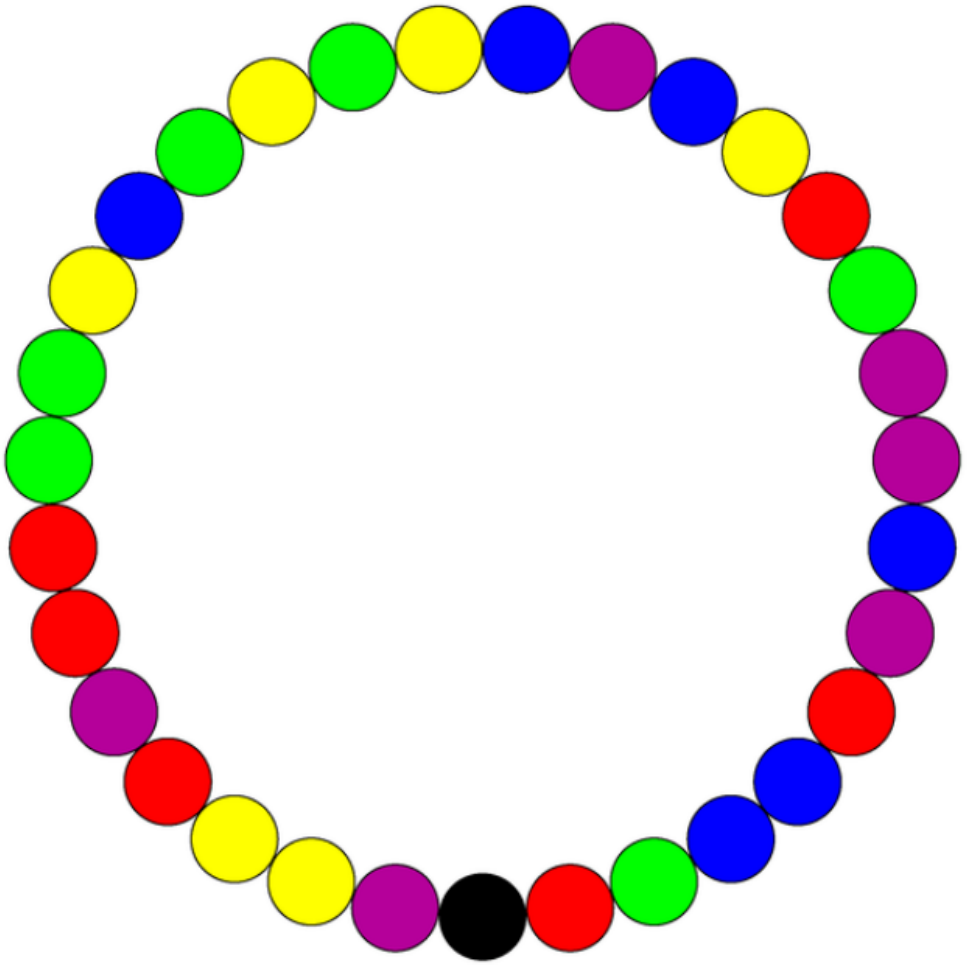
Submitted by

Vedran Krčadinac

A difference bracelet consists of v beads. There are k beads of n colours and one black bead ($v = k\,n + 1$). The beads are arranged so that there are exactly λ equally coloured beads at each possible distance for every colour. The distance of a pair of beads is the number of moves to get from one to the other, either clockwise or counter-clockwise (every pair of beads has two distances). Such an arrangement is called a (v,k,λ) bracelet. The number of colours can be computed as $n = v / (k - 1)$. The gallery contains pictures of bracelets with parameters (7,3,1), (11,5,2), (19,9,4), (31,6,1), (37,9,2), and (73,9,1).

The beads of any single colour represent a (v,k,λ) difference set in the cyclic group of order v. The black bead is the identity element. Bracelets are in fact tilings of cyclic groups with difference sets. The concept has been defined and studied in the paper *A.Ćustić, V.Krčadinac, Y.Zhou, Tiling Groups with Difference Sets, Electronic Journal of Combinatorics 22 (2015) #P2.56.*

Mozaici simetričnih dizajna



A (31, 6, 1) bracelet

The bracelet consists of 6 beads in each of 5 colours and a black bead. For every colour and every distance from 1 to 30, there is exactly one pair of beads in the specified colour at the specified distance. The colours define (31,6,1) cyclic difference sets giving rise to projective planes of order 5.

More Galleries

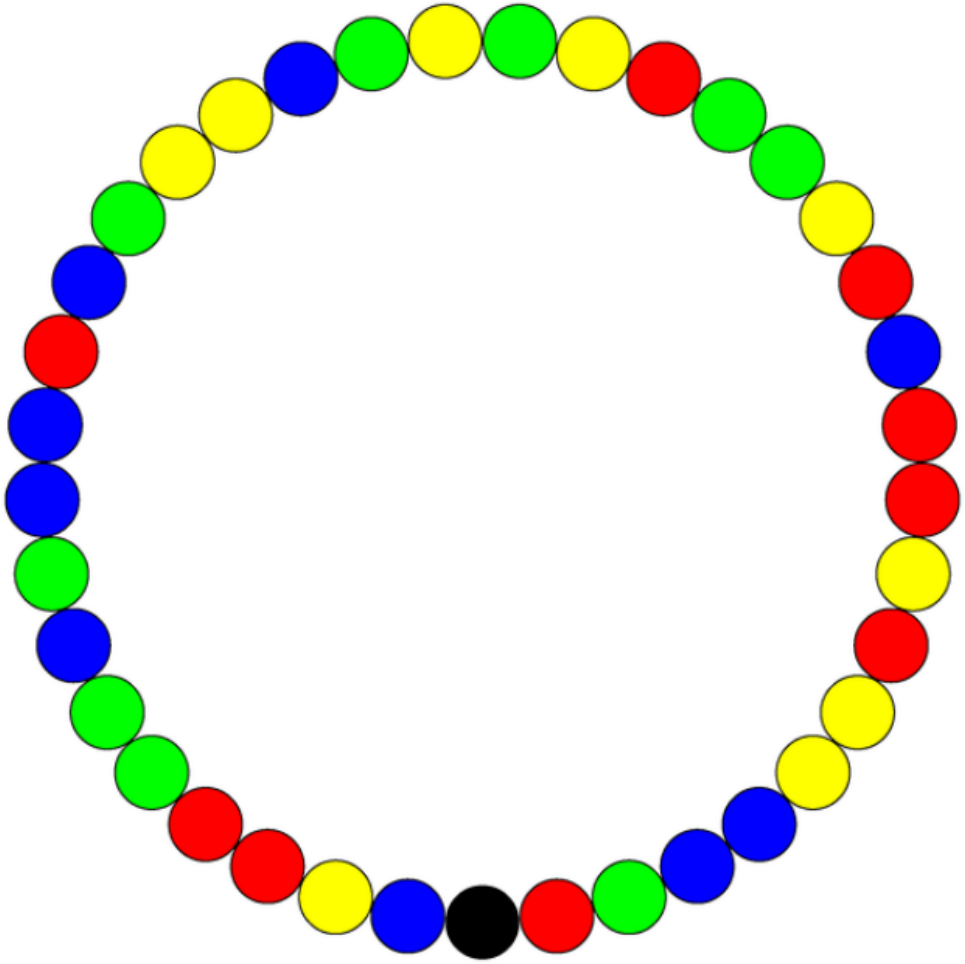
Mozaici simetričnih dizajna

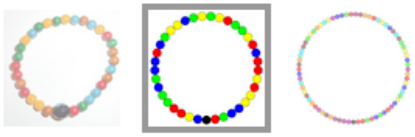
A model of the (31, 6, 1) bracelet

Difference bracelets cannot be built without the black bead, representing the identity element of the group. A slightly larger faceted bead was used here.

More Galleries

Mozaici simetričnih dizajna



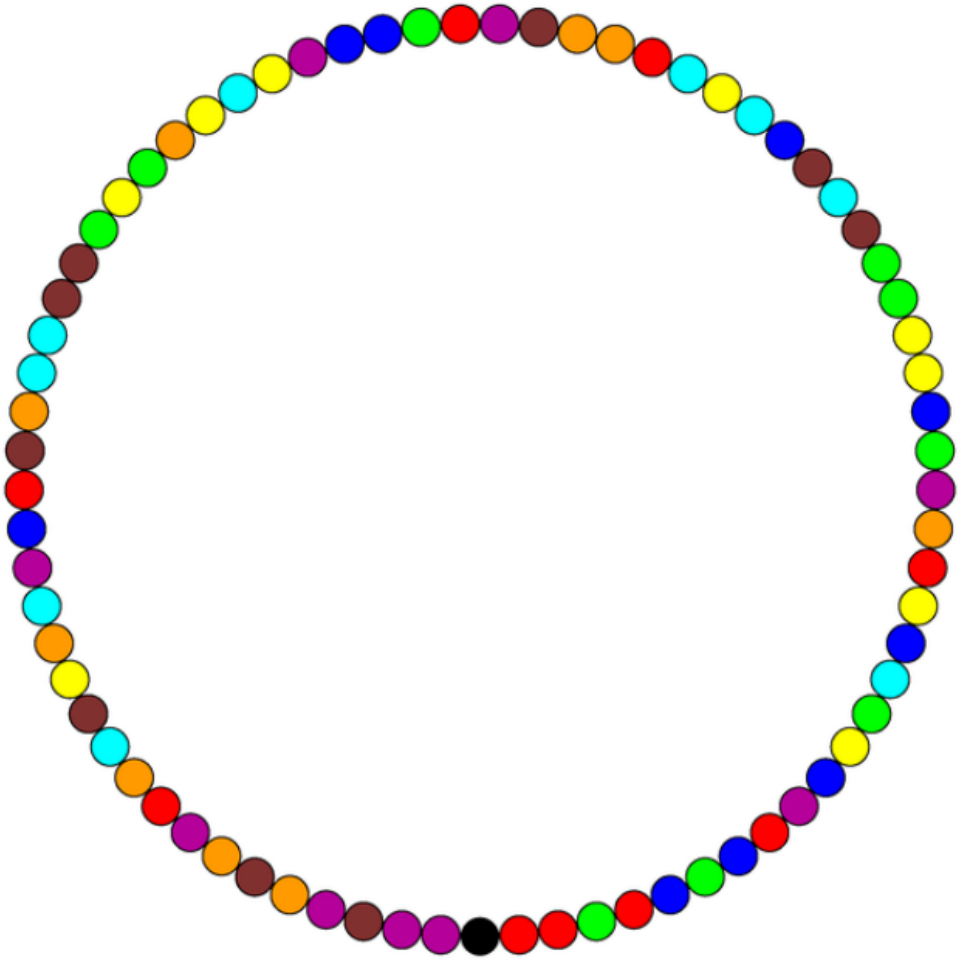


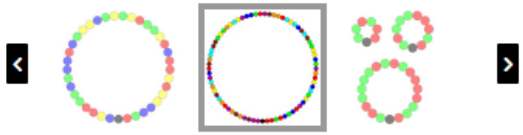
A (37,9,2) bracelet

The red beads in this (37,9,2) bracelet correspond to the fourth powers in the field of order 37. This is a multiplicative subgroup, and the other colours correspond to its cosets.

More Galleries

Mozaici simetričnih dizajna



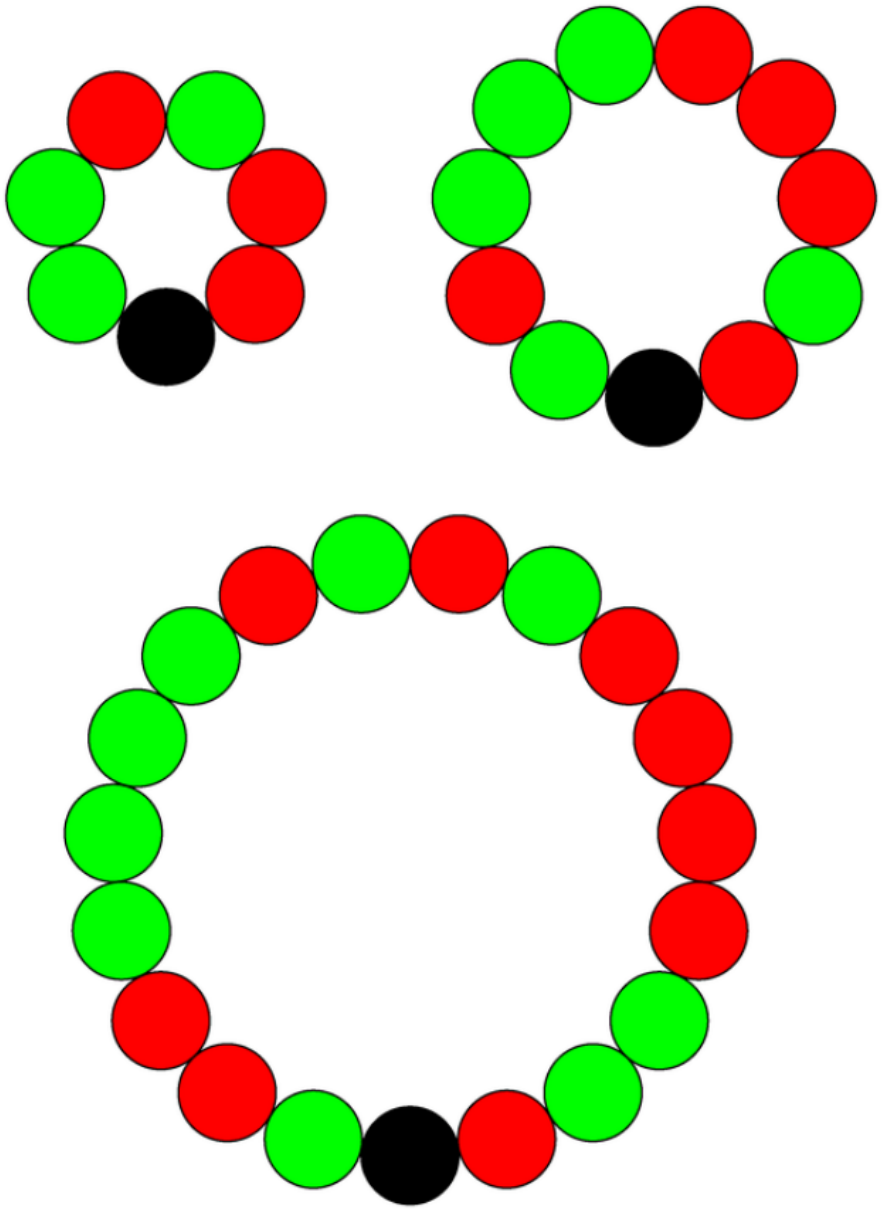


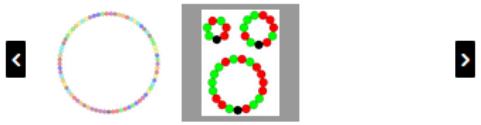
A (73, 9, 1) bracelet

This large bracelet or necklace was constructed from the eighth powers in the field of order 73. The colours represent (73,9,1) cyclic difference sets, giving rise to projective planes of order 8.

More Galleries

Mozaici simetričnih dizajna

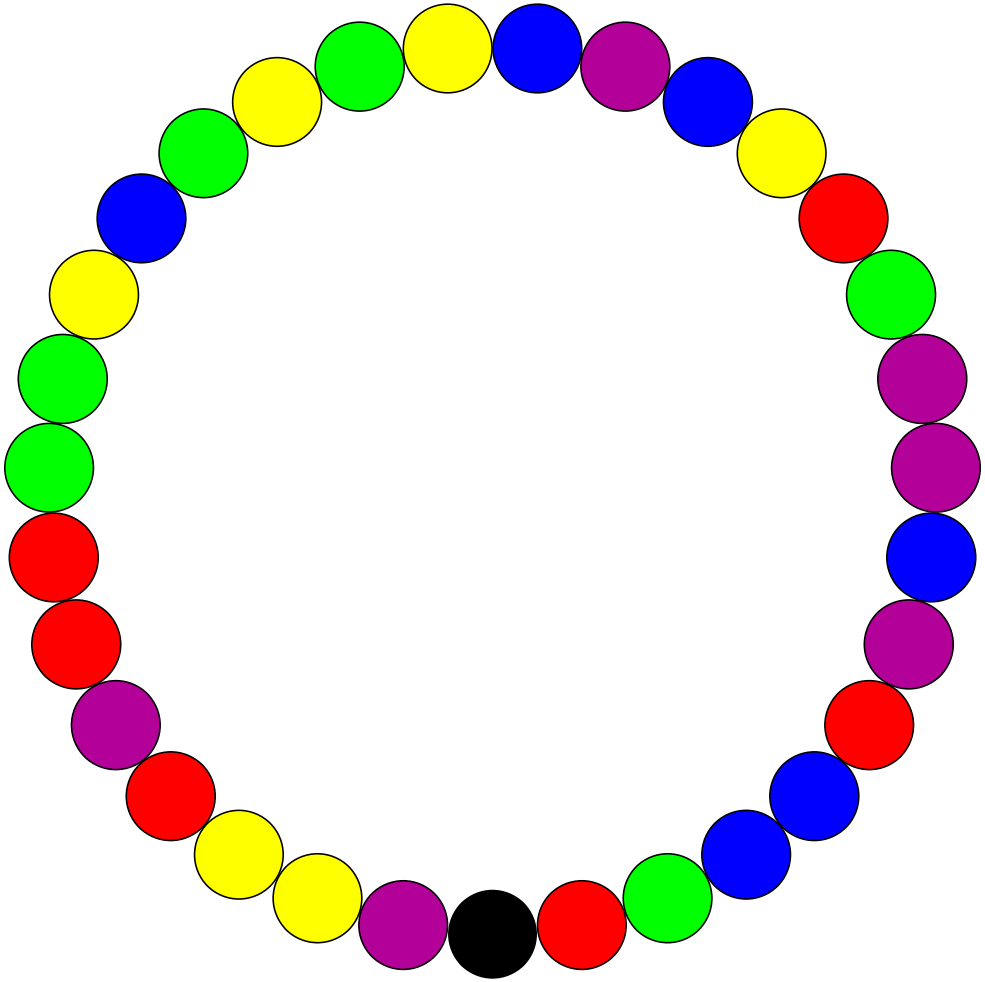




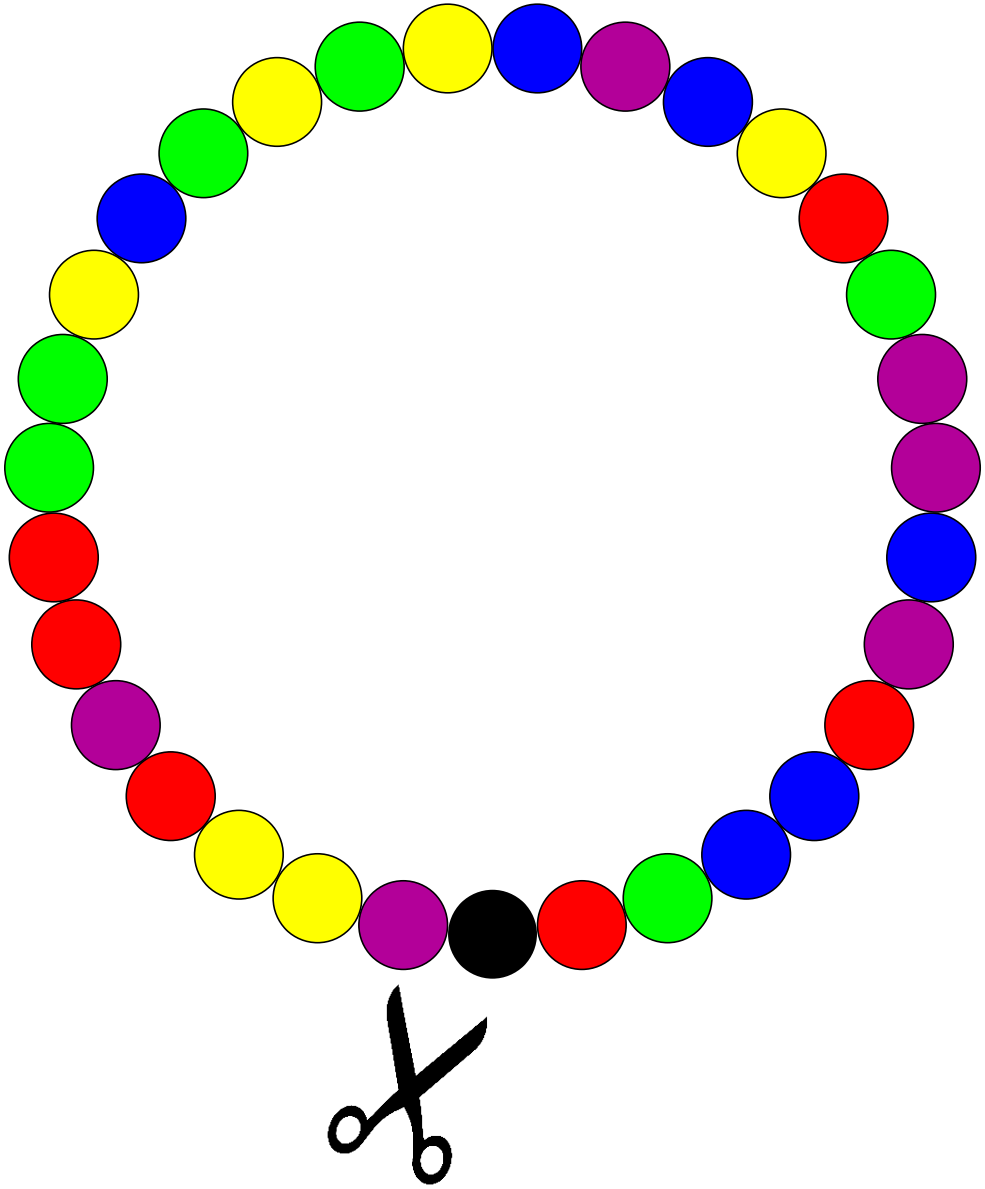
Bracelets of two colours

Bracelets of two colours can be built whenever v is a prime congruent to 3 modulo 4. The picture shows (7,3,1), (11,5,2) and (19,9,4) bracelets. Red corresponds to the squares and green to the non-squares in the field of order v.

Mozaici simetričnih dizajna

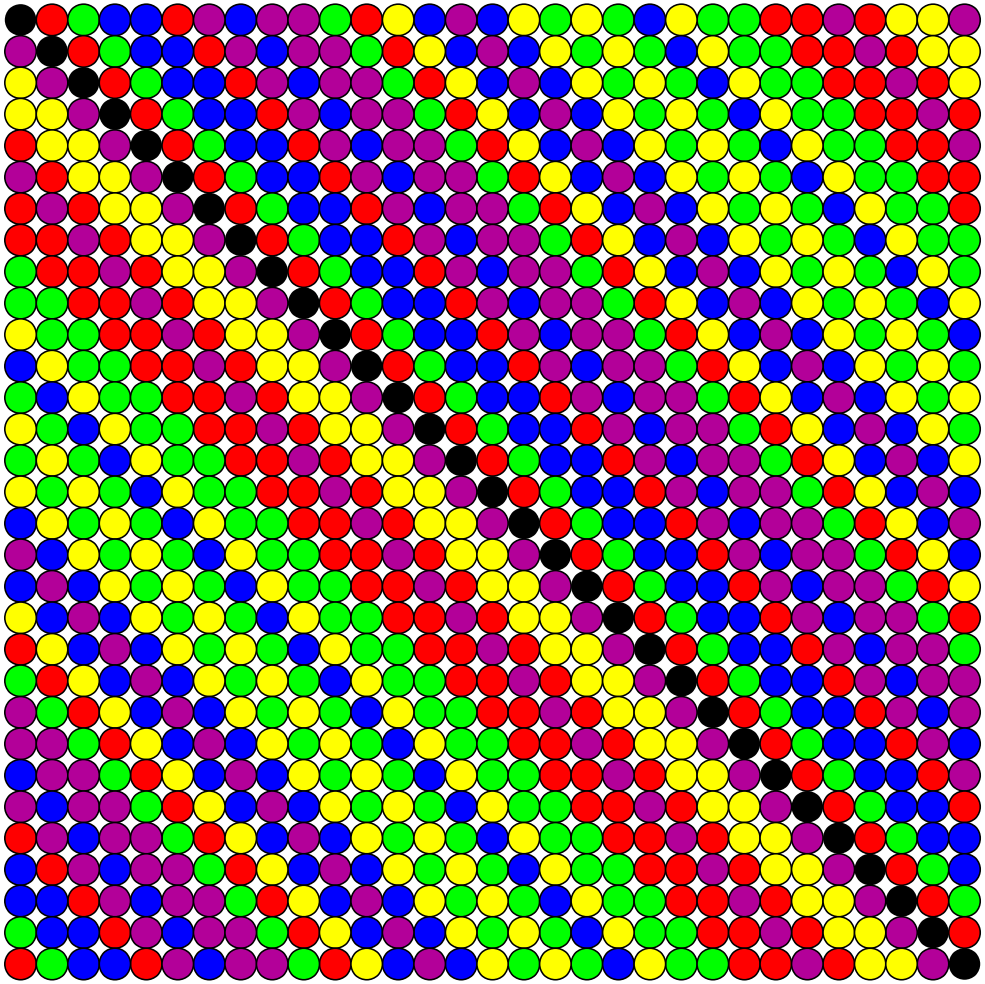


Mozaici simetričnih dizajna

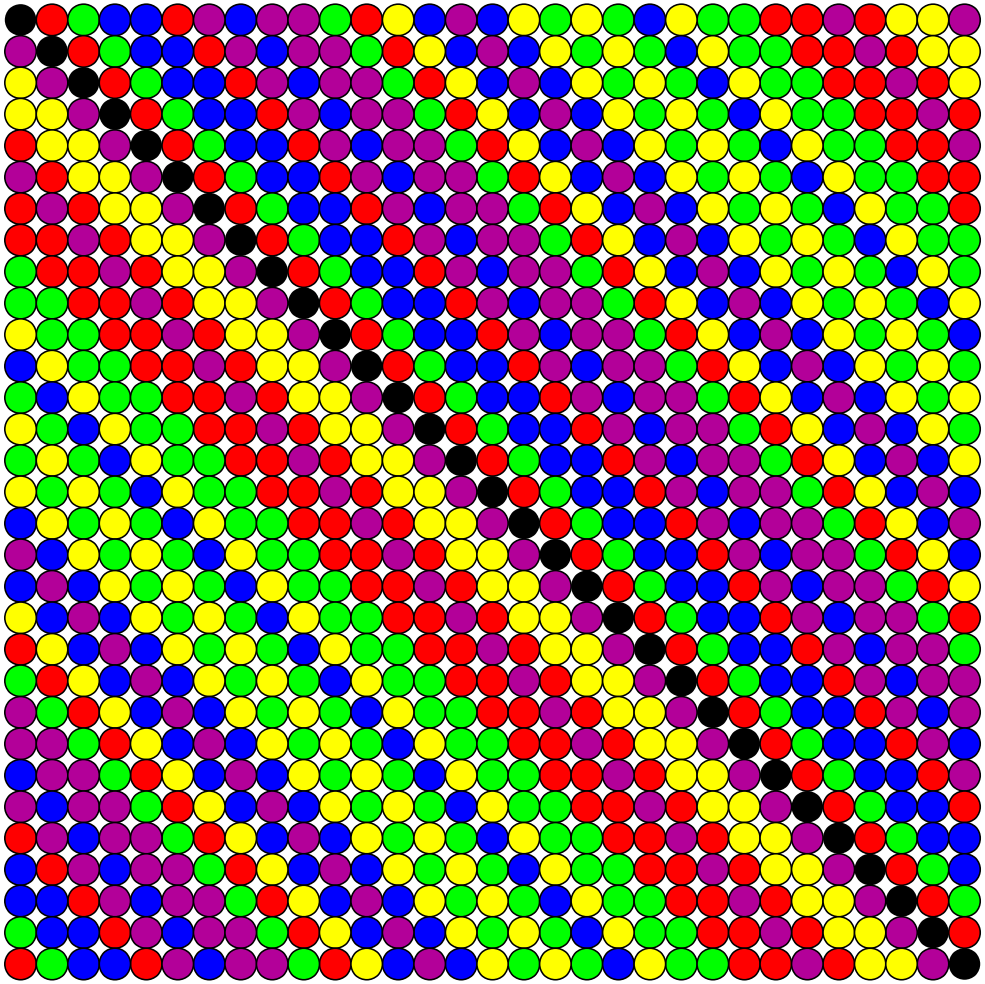


Mozaici simetričnih dizajna

Mozaici simetričnih dizajna



Mozaici simetričnih dizajna



$$(31,6,1) \oplus (31,6,1) \oplus (31,6,1) \oplus (31,6,1) \oplus (31,6,1) \oplus (31,1,0)$$

Mozaici simetričnih dizajna

Teorem.

Ako postoji popločavanje grupe (v, k, λ) diferencijskim skupovima, onda je $c = (v-1)/k = (k-1)/\lambda$ prirodan broj i postoji $(c+1)$-mozaik

$$(v, k, \lambda) \oplus \cdots \oplus (v, k, \lambda) \oplus (v, 1, 0)$$

Mozaici simetričnih dizajna

Teorem.

Ako postoji popločavanje grupe (v, k, λ) diferencijskim skupovima, onda je $c = (v-1)/k = (k-1)/\lambda$ prirodan broj i postoji $(c+1)$-mozaik

$$(v, k, \lambda) \oplus \cdots \oplus (v, k, \lambda) \oplus (v, 1, 0)$$

Teorem.

Neka je $\mathbb{F}_q$ konačno polje i D diferencijski skup u aditivnoj grupi koji je uz to podgrupa mutliplikativne grupe $\mathbb{F}_q^*$. Onda je kvocijent $\mathbb{F}_q^*/D$ popločavanje aditivne grupe $\mathbb{F}_q$.

Mozaici simetričnih dizajna

Teorem.

Ako postoji popločavanje grupe (v, k, λ) diferencijskim skupovima, onda je $c = (v-1)/k = (k-1)/\lambda$ prirodan broj i postoji $(c+1)$-mozaik

$$(v, k, \lambda) \oplus \cdots \oplus (v, k, \lambda) \oplus (v, 1, 0)$$

Teorem.

Neka je $\mathbb{F}_q$ konačno polje i D diferencijski skup u aditivnoj grupi koji je uz to podgrupa mutliplikativne grupe $\mathbb{F}_q^*$. Onda je kvocijent $\mathbb{F}_q^*/D$ popločavanje aditivne grupe $\mathbb{F}_q$.

Primjer. $\mathbb{F}_q^{(2)} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q = 4t+3$ (Paleyevi diferencijski skupovi)

Mozaici simetričnih dizajna

Teorem.

Ako postoji popločavanje grupe (v, k, λ) diferencijskim skupovima, onda je $c = (v-1)/k = (k-1)/\lambda$ prirodan broj i postoji $(c+1)$-mozaik

$$(v, k, \lambda) \oplus \cdots \oplus (v, k, \lambda) \oplus (v, 1, 0)$$

Teorem.

Neka je $\mathbb{F}_q$ konačno polje i D diferencijski skup u aditivnoj grupi koji je uz to podgrupa mutliplikativne grupe $\mathbb{F}_q^*$. Onda je kvocijent $\mathbb{F}_q^*/D$ popločavanje aditivne grupe $\mathbb{F}_q$.

Primjer. $\mathbb{F}_q^{(2)} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q = 4t+3$ (Paleyevi diferencijski skupovi)

$$(q, \tfrac{q-1}{2}, \tfrac{q-3}{4}) \oplus (q, \tfrac{q-1}{2}, \tfrac{q-3}{4}) \oplus (q, 1, 0)$$

Mozaici simetričnih dizajna

Primjer. $\mathbb{F}_q^{(4)} = \{x^4 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q = 4t^2 + 3$, t neparan

Mozaici simetričnih dizajna

Primjer. $\mathbb{F}_q^{(4)} = \{x^4 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q = 4t^2 + 3$, t neparan

$$(q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, 1, 0)$$

Mozaici simetričnih dizajna

Primjer. $\mathbb{F}_q^{(4)} = \{x^4 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q = 4t^2 + 3$, t neparan

$$(q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, 1, 0)$$

Primjer. $\mathbb{F}_q^{(8)} = \{x^8 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q = 8t^2 + 1 = 64u^2 + 9$, t, u neparni

Mozaici simetričnih dizajna

Primjer. $\mathbb{F}_q^{(4)} = \{x^4 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q = 4t^2 + 3$, t neparan

$$(q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, 1, 0)$$

Primjer. $\mathbb{F}_q^{(8)} = \{x^8 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q = 8t^2 + 1 = 64u^2 + 9$, t, u neparni

$$(q, \tfrac{q-1}{8}, \tfrac{q-9}{64}) \oplus \cdots \oplus (q, \tfrac{q-1}{8}, \tfrac{q-9}{64}) \oplus (q, 1, 0)$$

Mozaici simetričnih dizajna

Primjer. $\mathbb{F}_q^{(4)} = \{x^4 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q = 4t^2 + 3$, t neparan

$$(q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, \tfrac{q-1}{4}, \tfrac{q-5}{16}) \oplus (q, 1, 0)$$

Primjer. $\mathbb{F}_q^{(8)} = \{x^8 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q = 8t^2 + 1 = 64u^2 + 9$, t, u neparni

$$(q, \tfrac{q-1}{8}, \tfrac{q-9}{64}) \oplus \cdots \oplus (q, \tfrac{q-1}{8}, \tfrac{q-9}{64}) \oplus (q, 1, 0)$$

Primjer popločavanja $(31, 6, 1)$ diferencijskim skupovima $\{D_1, \ldots, D_5\}$ ne nastaje od podgrupe $\mathbb{F}_{31}^*$. Međutim, D_i su unije po dvije susjedne klase podgrupe $\langle 5 \rangle = \{1, 5, 25\}$. To je jedini takav primjer koji smo našli.

Mozaici simetričnih dizajna

Diferencijski skup u Abelovoj grupi je normaliziran ako mu je suma elemenata jednaka 0. Svi poznati primjeri popločavanja sastoje se od normaliziranih diferencijskih skupova.

Mozaici simetričnih dizajna

Diferencijski skup u Abelovoj grupi je normaliziran ako mu je suma elemenata jednaka 0. Svi poznati primjeri popločavanja sastoje se od normaliziranih diferencijskih skupova.

Hipoteza. Diferencijski skupovi od kojih se sastoji popločavanje komutativne grupe moraju biti normalizirani.

U članku smo dokazali za popločavanja s dva diferencijska skupa.

Mozaici simetričnih dizajna

Diferencijski skup u Abelovoj grupi je normaliziran ako mu je suma elemenata jednaka 0. Svi poznati primjeri popločavanja sastoje se od normaliziranih diferencijskih skupova.

Hipoteza. Diferencijski skupovi od kojih se sastoji popločavanje komutativne grupe moraju biti normalizirani.

U članku smo dokazali za popločavanja s dva diferencijska skupa.

K. Tabak, *Normalized difference set tiling conjecture*, J. Combin. Des. **26** (2018), no. 10, 505–513.

Teorem.

Hipoteza je istinita u svim grupama neparnog reda ako je $\lambda = 1$ ili diferencijski skupovi od kojih se sastoji popločavanje imaju netrivijalni multiplikator.

Mozaici simetričnih dizajna

(v, k, λ)	Grupa	Popločavanje	Homogeni mozaik
$(7, 3, 1)$	$\mathbb{Z}_7$	Paley	$\exists$
$(11, 5, 2)$	$\mathbb{Z}_{11}$	Paley	$\exists$
$(13, 4, 1)$	$\mathbb{Z}_{13}$	$\nexists$	$\exists$
$(15, 7, 3)$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\nexists$	$\exists$
$(19, 9, 4)$	$\mathbb{Z}_{19}$	Paley	$\exists$
$(21, 5, 1)$	$\mathbb{Z}_{21}$	$\nexists$	?
$(21, 5, 1)$	$\mathbb{Z}_7 : \mathbb{Z}_3$	$\nexists$	
$(23, 11, 5)$	$\mathbb{Z}_{23}$	Paley	$\exists$
$(27, 13, 6)$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	Paley	$\exists$
$(27, 13, 6)$	$\mathbb{Z}_9 : \mathbb{Z}_3$	Primjer 11	
$(31, 6, 1)$	$\mathbb{Z}_{31}$	Primjer 2	$\exists$

Mozaici simetričnih dizajna

(v, k, λ)	Grupa	Popločavanje	Homogeni mozaik
$(31, 10, 3)$	–	–	?
$(31, 15, 7)$	$\mathbb{Z}_{31}$	Paley	$\exists$
$(35, 17, 8)$	$\mathbb{Z}_{35}$	$\nexists$	$\mathbf{\exists}$
$(37, 9, 2)$	$\mathbb{Z}_{37}$	$\mathbb{F}_{37}^{*}/\mathbb{F}_{37}^{(4)}$	$\exists$
$(39, 19, 9)$	–	–	$\mathbf{\exists}$
$(40, 13, 4)$	$\mathbb{Z}_{40}$	$\nexists$	?
$(40, 13, 4)$	$\mathbb{Z}_5 : \mathbb{Z}_8$	$\nexists$	
$(43, 21, 10)$	$\mathbb{Z}_{43}$	Paley	$\exists$
$(47, 23, 11)$	$\mathbb{Z}_{47}$	Paley	$\exists$
$(49, 16, 5)$	–	–	?

Homogeni mozaici

Mozaik je homogen ako se sastoji od dizajna s istim parametrima:

$$\underbrace{t\text{-}(v,k,\lambda) \oplus \cdots \oplus t\text{-}(v,k,\lambda)}_{v/k \text{ puta}}$$

Homogeni mozaici

Mozaik je homogen ako se sastoji od dizajna s istim parametrima:

$$\underbrace{t\text{-}(v,k,\lambda) \oplus \cdots \oplus t\text{-}(v,k,\lambda)}_{v/k \text{ puta}}$$

Primjer. Što predstavlja homogeni mozaik simetričnih dizajna s $k = 1$?

$$\underbrace{(v,1,0) \oplus \cdots \oplus (v,1,0)}_{v \text{ puta}}$$

Homogeni mozaici

Mozaik je homogen ako se sastoji od dizajna s istim parametrima:

$$\underbrace{t\text{-}(v,k,\lambda) \oplus \cdots \oplus t\text{-}(v,k,\lambda)}_{v/k \text{ puta}}$$

Primjer. Što predstavlja homogeni mozaik simetričnih dizajna s $k = 1$?

$$\underbrace{(v,1,0) \oplus \cdots \oplus (v,1,0)}_{v \text{ puta}}$$

Propozicija.

Za $k \geq 2$ ne postoje homogeni mozaici simetričnih dizajna.

Homogeni mozaici

Mozaik je homogen ako se sastoji od dizajna s istim parametrima:

$$\underbrace{t\text{-}(v,k,\lambda) \oplus \cdots \oplus t\text{-}(v,k,\lambda)}_{v/k \text{ puta}}$$

Primjer. Što predstavlja homogeni mozaik simetričnih dizajna s $k = 1$?

$$\underbrace{(v,1,0) \oplus \cdots \oplus (v,1,0)}_{v \text{ puta}}$$

Propozicija.

Za $k \geq 2$ ne postoje homogeni mozaici simetričnih dizajna.

Dokaz. $\lambda(v-1) = k(k-1) \quad \Rightarrow \quad v = k \cdot \left(\frac{k-1}{\lambda} + \frac{1}{k}\right)$

(Ne)homogeni mozaici

U simetričnom slučaju ovakve mozaike smatramo homogenim:

$$\underbrace{(v,k,\lambda) \oplus \cdots \oplus (v,k,\lambda)}_{(v-1)/k \text{ puta}} \oplus (v,1,0).$$

(Ne)homogeni mozaici

U simetričnom slučaju ovakve mozaike smatramo homogenim:

$$\underbrace{(v,k,\lambda) \oplus \cdots \oplus (v,k,\lambda)}_{(v-1)/k \text{ puta}} \oplus (v,1,0).$$

Pitanje. Postoje li uopće nehomogeni mozaici, osim trivijalnih primjera?

$$t\text{-}(v,k,\lambda) \oplus t\text{-}(v,v-k,\overline{\lambda})$$

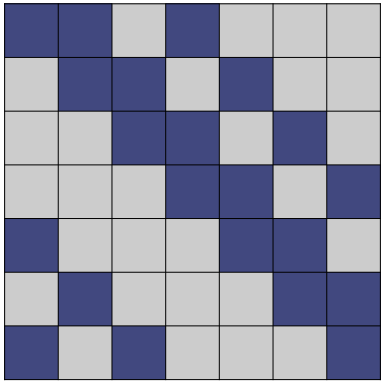
(Ne)homogeni mozaici

U simetričnom slučaju ovakve mozaike smatramo homogenim:

$$\underbrace{(v,k,\lambda) \oplus \cdots \oplus (v,k,\lambda)}_{(v-1)/k \text{ puta}} \oplus (v,1,0).$$

Pitanje. Postoje li uopće nehomogeni mozaici, osim trivijalnih primjera?

$$t\text{-}(v,k,\lambda) \oplus t\text{-}(v,v-k,\overline{\lambda})$$



$(7,3,1)$

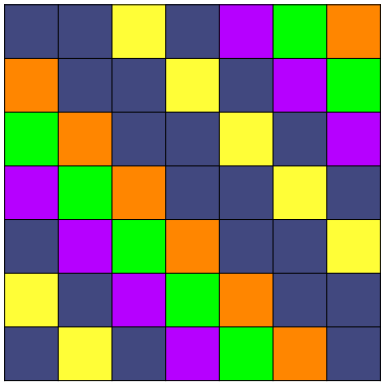
(Ne)homogeni mozaici

U simetričnom slučaju ovakve mozaike smatramo homogenim:

$$\underbrace{(v,k,\lambda) \oplus \cdots \oplus (v,k,\lambda)}_{(v-1)/k \text{ puta}} \oplus (v,1,0).$$

Pitanje. Postoje li uopće nehomogeni mozaici, osim trivijalnih primjera?

$$t\text{-}(v,k,\lambda) \oplus t\text{-}(v,v-k,\overline{\lambda})$$



$$(7,3,1) \oplus (7,1,0) \oplus (7,1,0) \oplus (7,1,0) \oplus (7,1,0)$$

(Ne)homogeni mozaici

Teorem.

Svaki parcijalni mozaik simetričnih dizajna

$$(v, k_1, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus (v, k_c, \lambda_c), \qquad \sum_{i=1}^{c} k_i < v$$

može se dopuniti do potpunog mozaika dodavanjem $(v, 1, 0)$ dizajna.

(Ne)homogeni mozaici

Teorem.

Svaki parcijalni mozaik simetričnih dizajna

$$(v, k_1, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus (v, k_c, \lambda_c), \qquad \sum_{i=1}^{c} k_i < v$$

može se dopuniti do potpunog mozaika dodavanjem $(v, 1, 0)$ dizajna.

Teorem (Hallov teorem o braku).

Neka je G bipartitan graf s biparticijom $V = X \cup Y$. Za skup vrhova $A \subseteq V$ označimo s $N(A)$ skup svih vrhova susjednih nekom vrhu iz A. Graf G dopušta sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz X ako i samo ako vrijedi uvjet $|N(A)| \geq |A|$, za svaki $A \subseteq X$.

(Ne)homogeni mozaici

Teorem.

Svaki parcijalni mozaik simetričnih dizajna

$$(v, k_1, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus (v, k_c, \lambda_c), \qquad \sum_{i=1}^{c} k_i < v$$

može se dopuniti do potpunog mozaika dodavanjem $(v, 1, 0)$ dizajna.

Teorem (Hallov teorem o braku).

Neka je G bipartitan graf s biparticijom $V = X \cup Y$. Za skup vrhova $A \subseteq V$ označimo s $N(A)$ skup svih vrhova susjednih nekom vrhu iz A. Graf G dopušta sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz X ako i samo ako vrijedi uvjet $|N(A)| \geq |A|$, za svaki $A \subseteq X$.

Korolar.

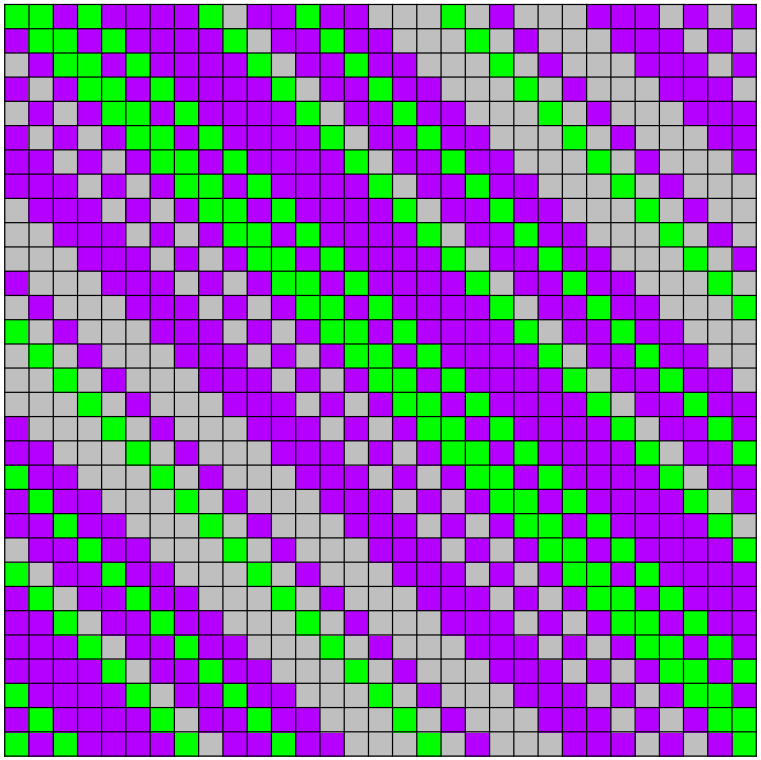
Svaki regularan bipartitan graf dopušta savršeno sparivanje.

Parcijalni mozaici

Prebrojavanje koliko ima savršenih sparivanja u bipartitnom grafu ekvivalentno je izračunavanju permanente 0-1 matrice, a to je #P-potpun problem (Valiantov teorem).

Parcijalni mozaici

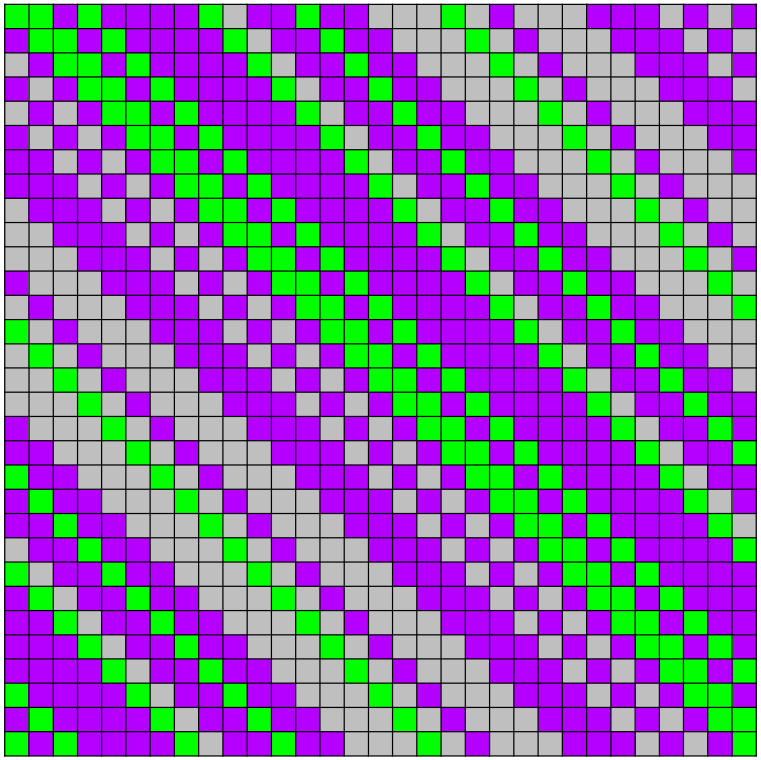
Prebrojavanje koliko ima savršenih sparivanja u bipartitnom grafu ekvivalentno je izračunavanju permanente 0-1 matrice, a to je #P-potpun problem (Valiantov teorem).



$(31, 6, 1) \oplus (31, 15, 7)$

Parcijalni mozaici

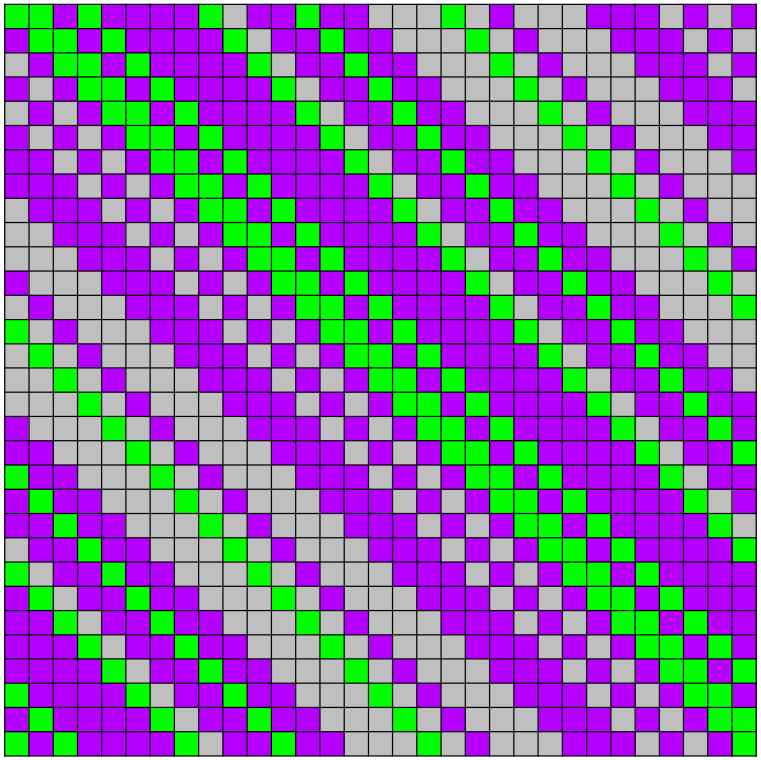
Prebrojavanje koliko ima savršenih sparivanja u bipartitnom grafu ekvivalentno je izračunavanju permanente 0-1 matrice, a to je #P-potpun problem (Valiantov teorem).



$$(31, 6, 1) \oplus (31, 15, 7) \oplus (31, 10, 3)???$$

Parcijalni mozaici

Prebrojavanje koliko ima savršenih sparivanja u bipartitnom grafu ekvivalentno je izračunavanju permanente 0-1 matrice, a to je #P-potpun problem (Valiantov teorem).



Broj neizomorfnih dizajna:

$(31, 6, 1)$: 1

$(31, 10, 3)$: 151

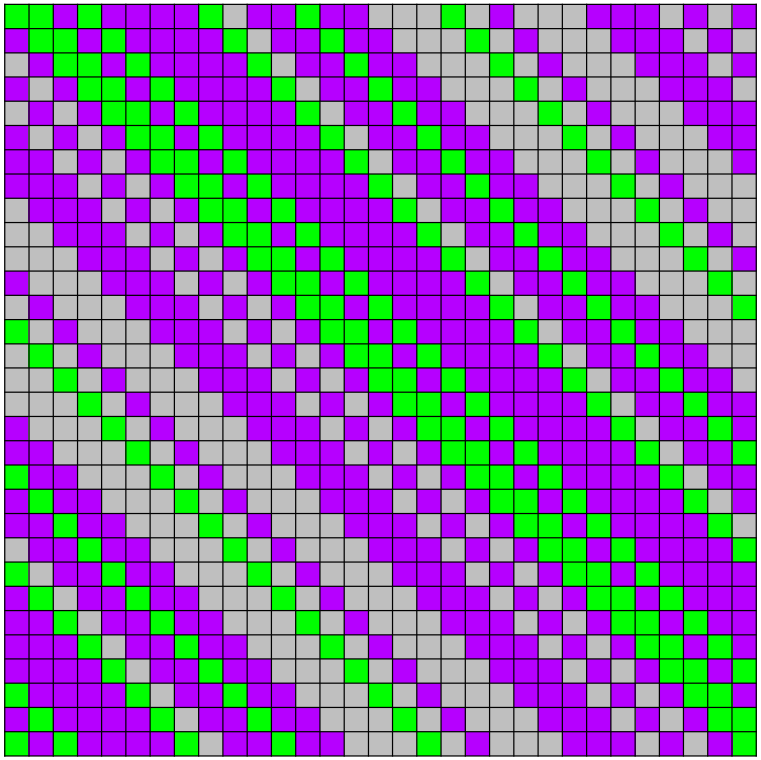
$(31, 15, 7)$:

$\geq 22\,478\,260$

$(31, 6, 1) \oplus (31, 15, 7) \oplus (31, 10, 3)???$

Parcijalni mozaici

Prebrojavanje koliko ima savršenih sparivanja u bipartitnom grafu ekvivalentno je izračunavanju permanente 0-1 matrice, a to je #P-potpun problem (Valiantov teorem).



Broj neizomorfnih dizajna:

$(31, 6, 1)$: 1

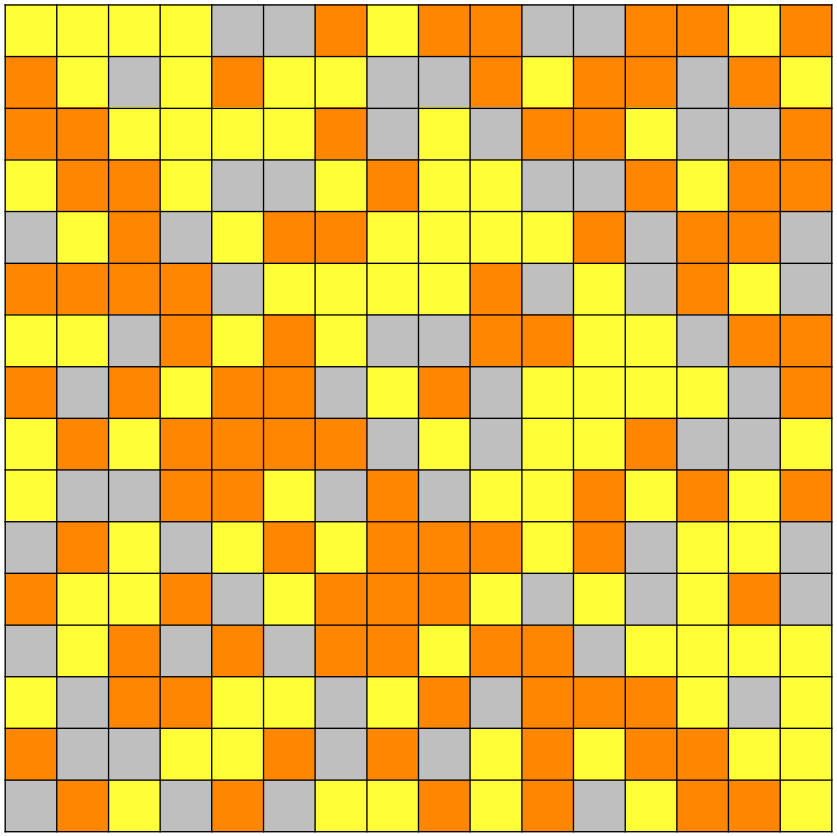
$(31, 10, 3)$: 151

$(31, 15, 7)$:

$\geq 22\,478\,260$

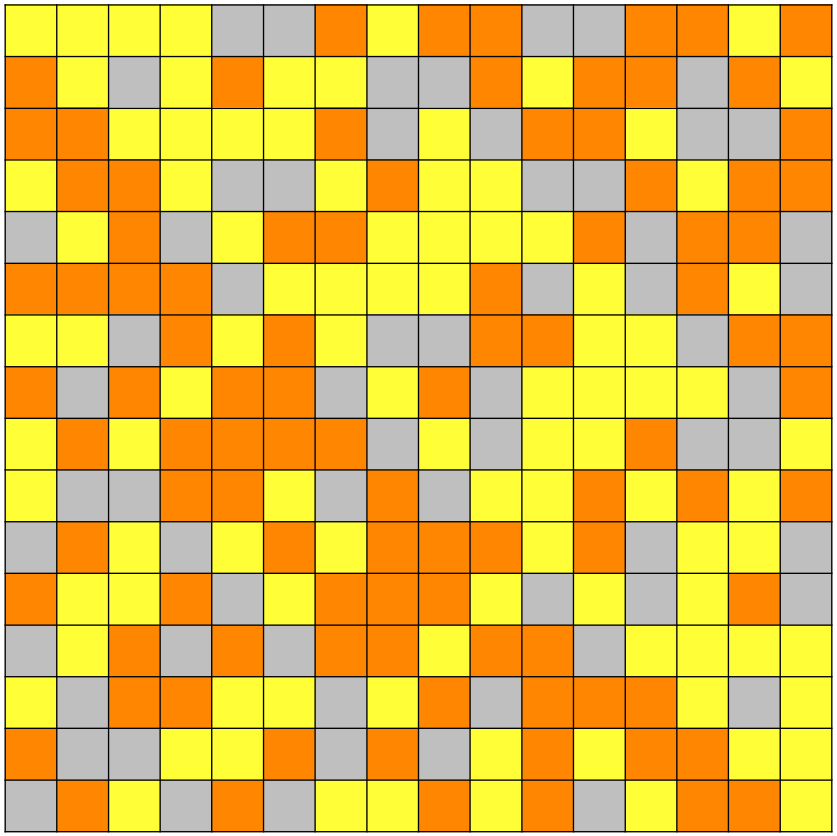
E. Spence, *A complete classification of symmetric* $(31, 10, 3)$ *designs*, Des. Codes Cryptogr. **2** (1992), no. 2, 127–136.

Parcijalni mozaici



$$(16, 6, 2) \oplus (16, 6, 2)$$

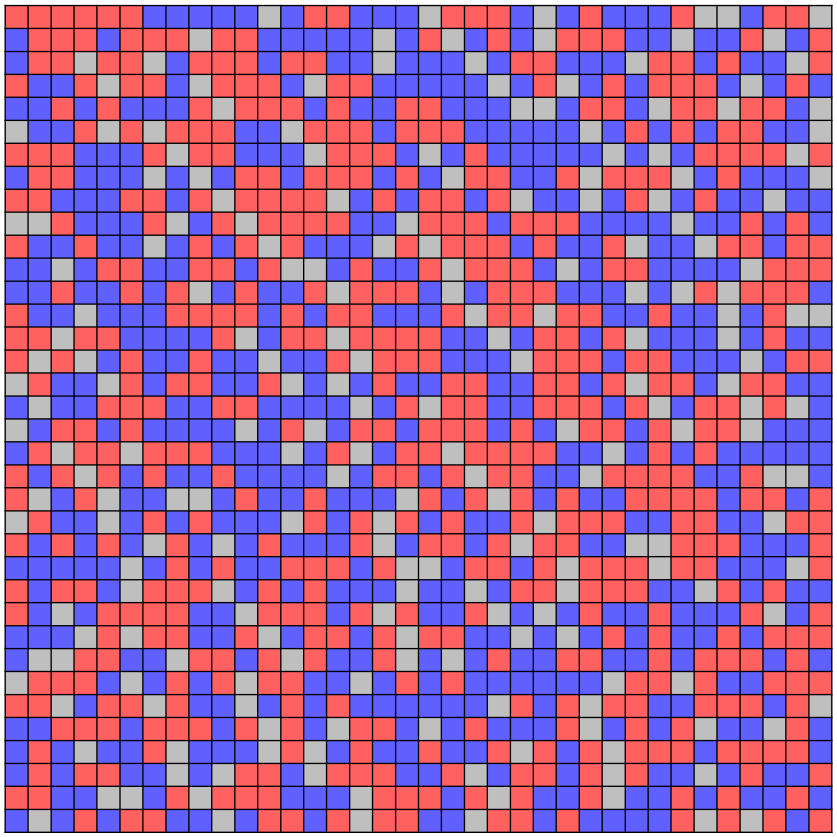
Parcijalni mozaici



$G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$

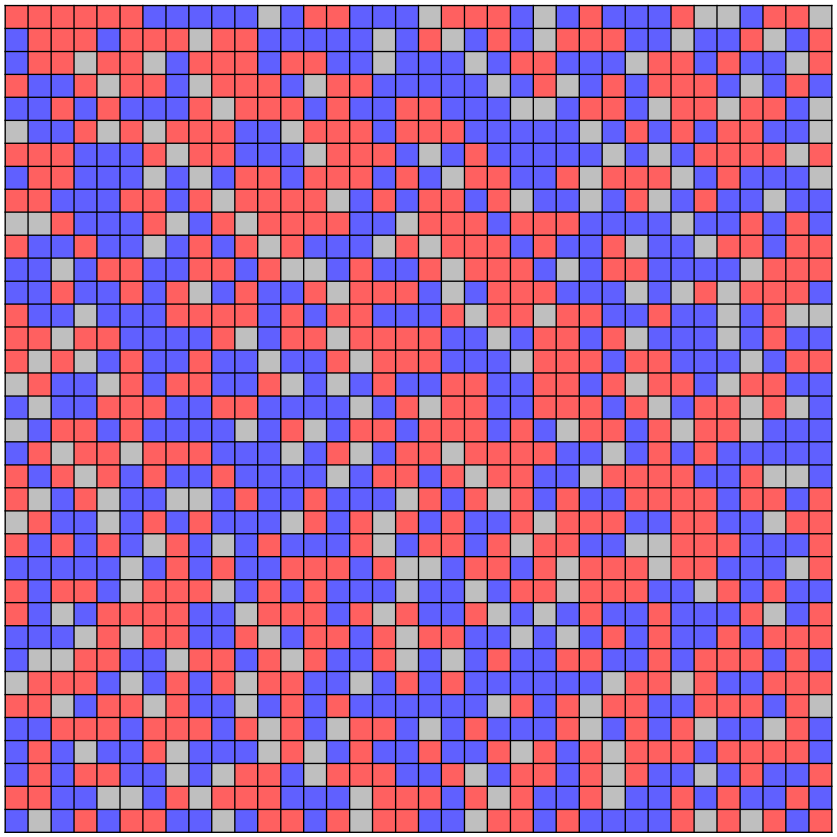
$(16, 6, 2) \oplus (16, 6, 2)$

Parcijalni mozaici



$$(36, 15, 6) \oplus (36, 15, 6)$$

Parcijalni mozaici



$G = \mathbb{Z}_3 x(\mathbb{Z}_3 : \mathbb{Z}_4)$

$(36, 15, 6) \oplus (36, 15, 6)$

Nehomogeni mozaici

Pravi nehomogeni mozaik je onaj u kojem svi dizajni imaju $k \geq 3$.

Nehomogeni mozaici

Pravi nehomogeni mozaik je onaj u kojem svi dizajni imaju $k \geq 3$.

Pitanje. Postoje li ovi kvadratni mozaici?

$$(31, 6, 1) \oplus (31, 10, 3) \oplus (31, 15, 7)$$

$$(71, 15, 3) \oplus (71, 21, 6) \oplus (71, 35, 17)$$

$$(79, 13, 2) \oplus (79, 27, 9) \oplus (79, 39, 19)$$

Nehomogeni mozaici

Pravi nehomogeni mozaik je onaj u kojem svi dizajni imaju $k \geq 3$.

Pitanje. Postoje li ovi kvadratni mozaici?

$$(31, 6, 1) \oplus (31, 10, 3) \oplus (31, 15, 7)$$

$$(71, 15, 3) \oplus (71, 21, 6) \oplus (71, 35, 17)$$

$$(79, 13, 2) \oplus (79, 27, 9) \oplus (79, 39, 19)$$

Pitanje. Postoje li ovi nekvadratni mozaici?

$$(10, 3, 2) \oplus (10, 3, 2) \oplus (10, 4, 4) \quad (b = 30)$$

$$(11, 3, 6) \oplus (11, 4, 12) \oplus (11, 4, 12) \quad (b = 110)$$

$$(12, 3, 2) \oplus (12, 3, 2) \oplus (12, 6, 10) \quad (b = 44)$$

$$(13, 3, 1) \oplus (13, 4, 2) \oplus (13, 6, 5) \quad (b = 26)$$

Projektivni mozaici

Pitanja. Postoji li mozaik projektivnih ravnina reda 4?

$$(21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,1,0)$$

Projektivni mozaici

Pitanja. Postoji li mozaik projektivnih ravnina reda 4?

$$(21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,1,0)$$

Za koje redove q postoji q-mozaik projektivnih ravnina reda q?

$$(q^2+q+1, q+1, 1) \oplus \cdots \oplus (q^2+q+1, q+1, 1) \oplus (q^2+q+1, 1, 0)$$

Projektivni mozaici

Pitanja. Postoji li mozaik projektivnih ravnina reda 4?

$$(21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,1,0)$$

Za koje redove q postoji q-mozaik projektivnih ravnina reda q?

$$(q^2+q+1, q+1, 1) \oplus \cdots \oplus (q^2+q+1, q+1, 1) \oplus (q^2+q+1, 1, 0)$$

q	2	3	4	5	7	8	9	$\cdots$
$\exists$	✓	✓	?	✓	✓	✓	?	$\cdots$

Projektivni mozaici

Pitanja. Postoji li mozaik projektivnih ravnina reda 4?

$$(21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,1,0)$$

Za koje redove q postoji q-mozaik projektivnih ravnina reda q?

$$(q^2+q+1, q+1, 1) \oplus \cdots \oplus (q^2+q+1, q+1, 1) \oplus (q^2+q+1, 1, 0)$$

q	2	3	4	5	7	8	9	$\cdots$
$\exists$	✓	✓	?	✓	✓	✓	?	$\cdots$

Može li se uspostaviti veza između q-mozaika afinih ravnina (koji postoje!) i q-mozaika projektivnih ravnina?

Projektivni mozaici

Pitanja. Postoji li mozaik projektivnih ravnina reda 4?

$$(21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,5,1) \oplus (21,1,0)$$

Za koje redove q postoji q-mozaik projektivnih ravnina reda q?

$$(q^2+q+1, q+1, 1) \oplus \cdots \oplus (q^2+q+1, q+1, 1) \oplus (q^2+q+1, 1, 0)$$

q	2	3	4	5	7	8	9	$\cdots$
$\exists$	✓	✓	?	✓	✓	✓	?	$\cdots$

Može li se uspostaviti veza između q-mozaika afinih ravnina (koji postoje!) i q-mozaika projektivnih ravnina?

Postoje li q-mozaici d-dimenzionalnih projektivnih prostora, odnosno simetričnih dizajna s parametrima $\left(\frac{q^{d+1}-1}{q-1}, \frac{q^d-1}{q-1}, \frac{q^{d-1}-1}{q-1}\right)$?

Hadamardovi mozaici

Hadamardov mozaik je homogeni mozaik od dva simetrična dizajna:

$$(v, k, \lambda) \oplus (v, k, \lambda) \oplus (v, 1, 0)$$

Hadamardovi mozaici

Hadamardov mozaik je homogeni mozaik od dva simetrična dizajna:

$$(v, k, \lambda) \oplus (v, k, \lambda) \oplus (v, 1, 0)$$

$v = 2k + 1$

Hadamardovi mozaici

Hadamardov mozaik je homogeni mozaik od dva simetrična dizajna:

$$(v, k, \lambda) \oplus (v, k, \lambda) \oplus (v, 1, 0)$$

$v = 2k + 1$

$\lambda(v - 1) = k(k - 1)$

Hadamardovi mozaici

Hadamardov mozaik je homogeni mozaik od dva simetrična dizajna:

$$(v, k, \lambda) \oplus (v, k, \lambda) \oplus (v, 1, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} v = 2k + 1 \\ \lambda(v-1) = k(k-1) \end{array}\right\} \Rightarrow k = 2\lambda + 1$$

Hadamardovi mozaici

Hadamardov mozaik je homogeni mozaik od dva simetrična dizajna:

$$(v,k,\lambda) \oplus (v,k,\lambda) \oplus (v,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} v = 2k+1 \\ \lambda(v-1) = k(k-1) \end{array}\right\} \Rightarrow k = 2\lambda + 1$$

Red: $n = k - \lambda = \lambda + 1$

Hadamardovi mozaici

Hadamardov mozaik je homogeni mozaik od dva simetrična dizajna:

$$(v,k,\lambda) \oplus (v,k,\lambda) \oplus (v,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} v = 2k+1 \\ \lambda(v-1) = k(k-1) \end{array}\right\} \Rightarrow k = 2\lambda + 1$$

Red: $n = k - \lambda = \lambda + 1 \quad \Rightarrow \quad (v,k,\lambda) = (4n-1, 2n-1, n-1)$

Hadamardovi mozaici

Hadamardov mozaik je homogeni mozaik od dva simetrična dizajna:

$$(v,k,\lambda) \oplus (v,k,\lambda) \oplus (v,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} v = 2k+1 \\ \lambda(v-1) = k(k-1) \end{array}\right\} \Rightarrow k = 2\lambda + 1$$

Red: $n = k - \lambda = \lambda + 1 \quad \Rightarrow \quad (v,k,\lambda) = (4n-1, 2n-1, n-1)$

Paleyev diferencijski skup: $\mathbb{F}_q^{(2)} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q \equiv 3 \pmod 4$

Hadamardovi mozaici

Hadamardov mozaik je homogeni mozaik od dva simetrična dizajna:

$$(v,k,\lambda) \oplus (v,k,\lambda) \oplus (v,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} v = 2k+1 \\ \lambda(v-1) = k(k-1) \end{array}\right\} \Rightarrow k = 2\lambda + 1$$

Red: $n = k - \lambda = \lambda + 1 \quad \Rightarrow \quad (v,k,\lambda) = (4n-1, 2n-1, n-1)$

Paleyev diferencijski skup: $\mathbb{F}_q^{(2)} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q \equiv 3 \pmod 4$

$\rightsquigarrow \quad n = \dfrac{q+1}{4}$

Hadamardovi mozaici

Hadamardov mozaik je homogeni mozaik od dva simetrična dizajna:

$$(v,k,\lambda) \oplus (v,k,\lambda) \oplus (v,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} v = 2k+1 \\ \lambda(v-1) = k(k-1) \end{array}\right\} \Rightarrow k = 2\lambda + 1$$

Red: $n = k - \lambda = \lambda + 1 \quad \Rightarrow \quad (v,k,\lambda) = (4n-1, 2n-1, n-1)$

Paleyev diferencijski skup: $\mathbb{F}_q^{(2)} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q \equiv 3 \pmod 4$

$$\rightsquigarrow \quad n = \frac{q+1}{4}$$

Nekvadrati u $\mathbb{F}_q^*$ također čine diferencijski skup s istim parametrima, tj. imamo popločavanje aditivne grupe od $\mathbb{F}_q$ i odgovarajući mozaik.

Hadamardovi mozaici

Hadamardov mozaik je homogeni mozaik od dva simetrična dizajna:

$$(v,k,\lambda) \oplus (v,k,\lambda) \oplus (v,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} v = 2k+1 \\ \lambda(v-1) = k(k-1) \end{array}\right\} \Rightarrow k = 2\lambda + 1$$

Red: $n = k - \lambda = \lambda + 1 \quad \Rightarrow \quad (v,k,\lambda) = (4n-1, 2n-1, n-1)$

Paleyev diferencijski skup: $\mathbb{F}_q^{(2)} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q \equiv 3 \pmod 4$

$$\rightsquigarrow \quad n = \frac{q+1}{4}$$

Nekvadrati u $\mathbb{F}_q^*$ također čine diferencijski skup s istim parametrima, tj. imamo popločavanje aditivne grupe od $\mathbb{F}_q$ i odgovarajući mozaik.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
v	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43

Hadamardovi mozaici

Hadamardov mozaik je homogeni mozaik od dva simetrična dizajna:

$$(v,k,\lambda) \oplus (v,k,\lambda) \oplus (v,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} v = 2k+1 \\ \lambda(v-1) = k(k-1) \end{array}\right\} \Rightarrow k = 2\lambda + 1$$

Red: $n = k - \lambda = \lambda + 1 \quad \Rightarrow \quad (v,k,\lambda) = (4n-1, 2n-1, n-1)$

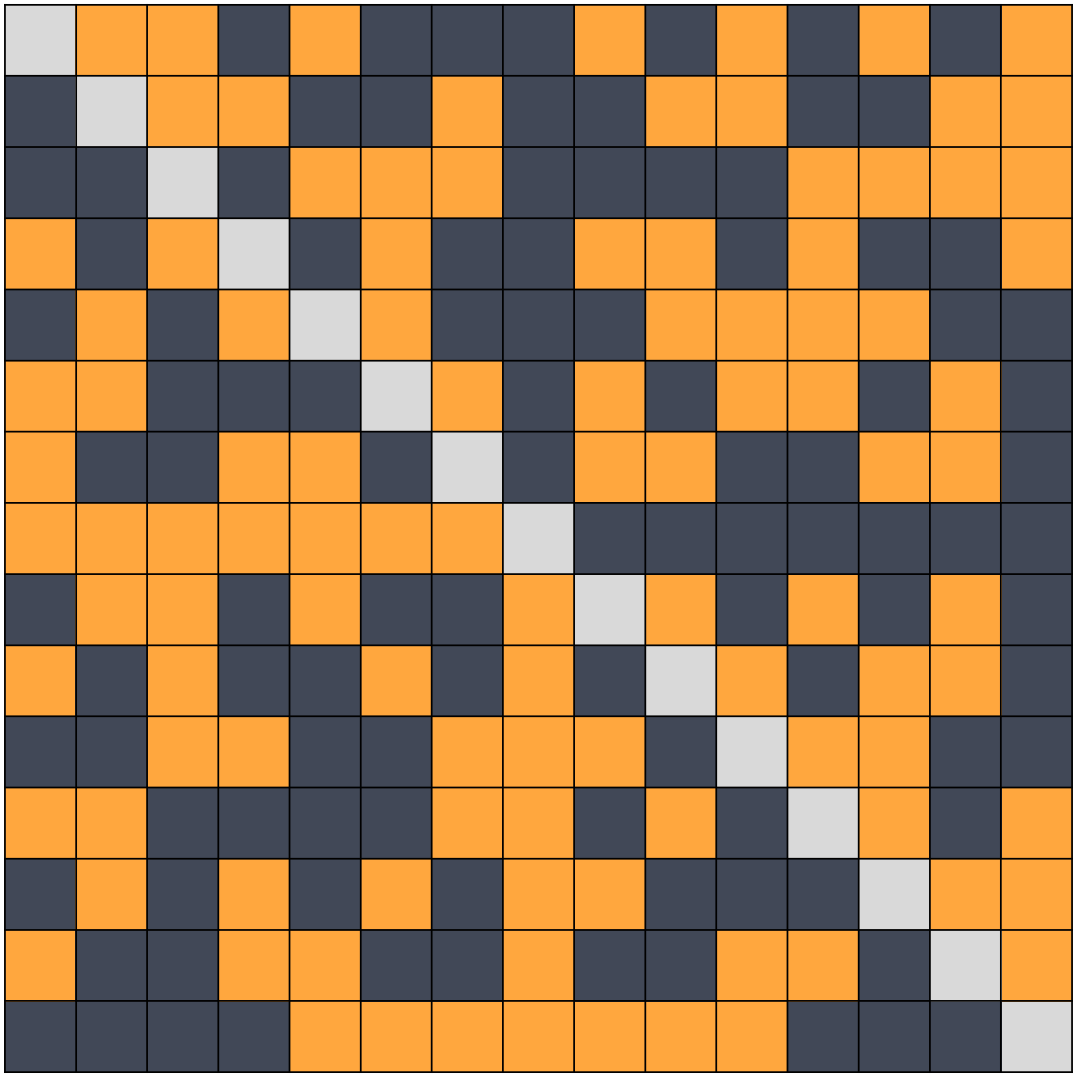
Paleyev diferencijski skup: $\mathbb{F}_q^{(2)} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_q^*\}$, $q \equiv 3 \pmod 4$

$\rightsquigarrow \quad n = \dfrac{q+1}{4}$

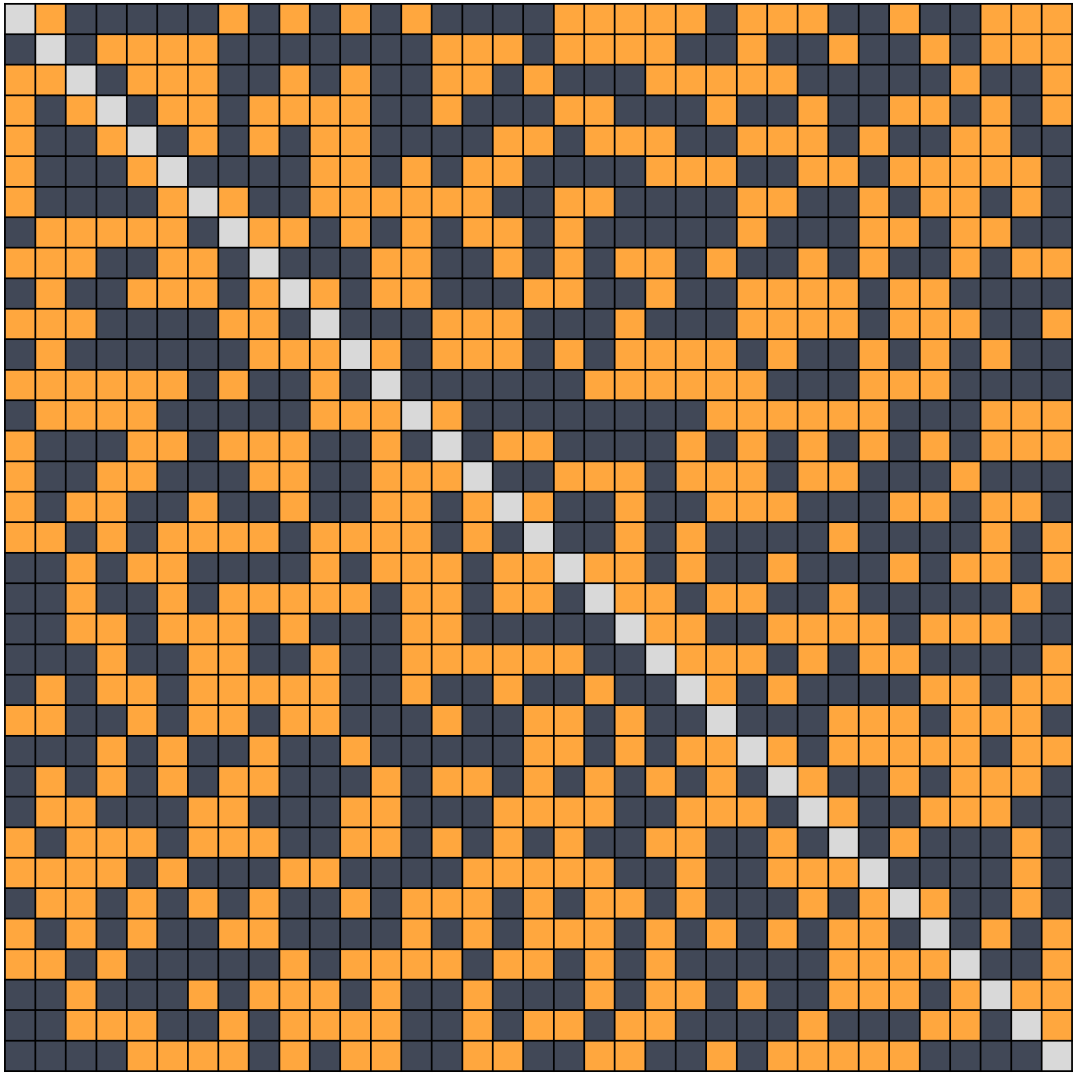
Nekvadrati u $\mathbb{F}_q^*$ također čine diferencijski skup s istim parametrima, tj. imamo popločavanje aditivne grupe od $\mathbb{F}_q$ i odgovarajući mozaik.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
v	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43

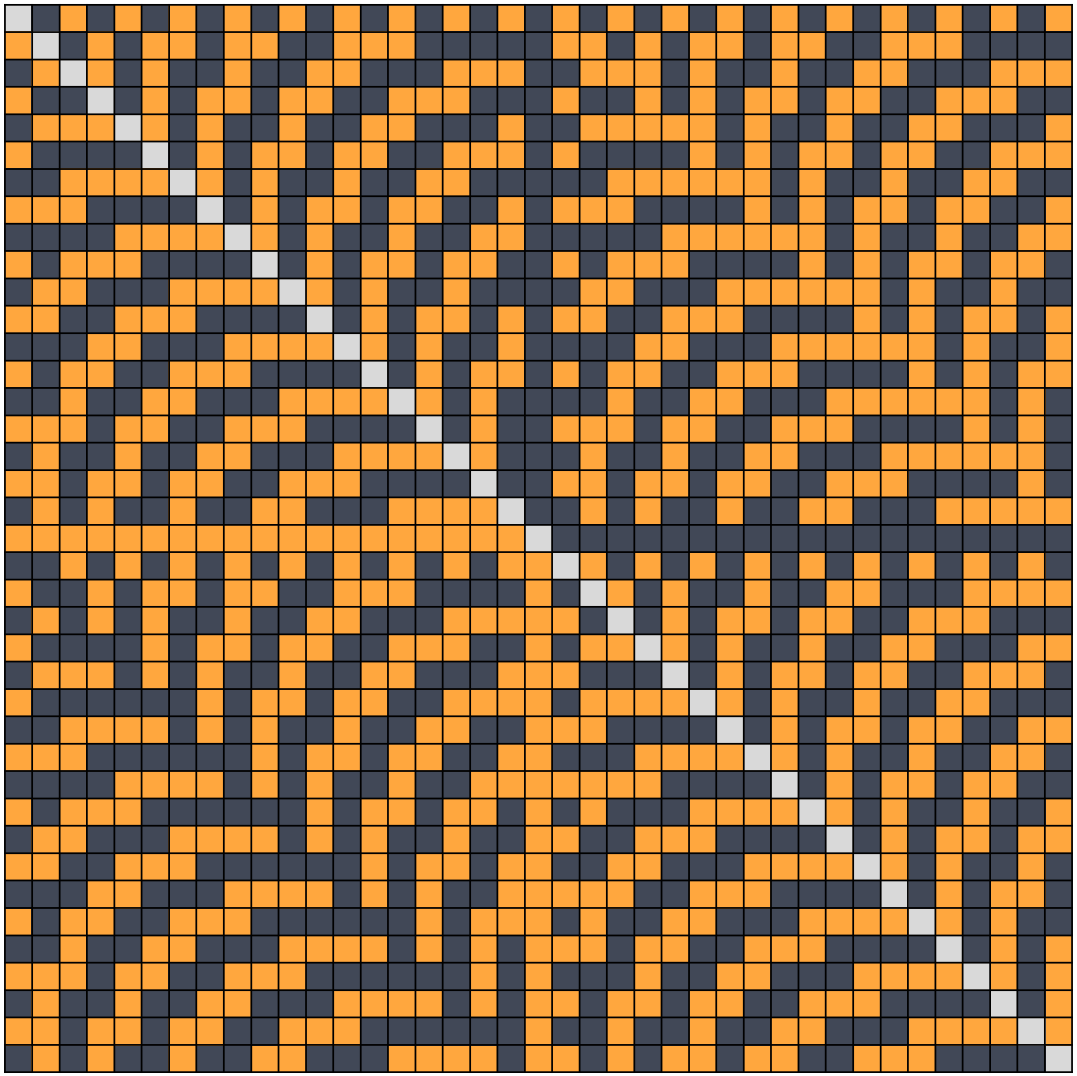
$(15, 7, 3) \oplus (15, 7, 3) \oplus (15, 1, 0)$



$(35, 17, 8) \oplus (35, 17, 8) \oplus (35, 1, 0)$



$(39, 19, 9) \oplus (39, 19, 9) \oplus (39, 1, 0)$



Antisimetrični diferencijski skupovi

Diferencijski skup $D \subseteq G$ je antisimetričan ako vrijedi $D \cap D^{(-1)} = \emptyset$ i $D \cup D^{(-1)} = G \setminus \{1\}$. U tom slučaju je $\{D, D^{(-1)}\}$ popločavanje od G.

Antisimetrični diferencijski skupovi

Diferencijski skup $D \subseteq G$ je antisimetričan ako vrijedi $D \cap D^{(-1)} = \emptyset$ i $D \cup D^{(-1)} = G \setminus \{1\}$. U tom slučaju je $\{D, D^{(-1)}\}$ popločavanje od G.

Jesu li popločavanja grupe s dva diferencijska skupa nužno tog oblika?

Antisimetrični diferencijski skupovi

Diferencijski skup $D \subseteq G$ je antisimetričan ako vrijedi $D \cap D^{(-1)} = \emptyset$ i $D \cup D^{(-1)} = G \setminus \{1\}$. U tom slučaju je $\{D, D^{(-1)}\}$ popločavanje od G.

Jesu li popločavanja grupe s dva diferencijska skupa nužno tog oblika?

A. Ćustić, V. Krčadinac, Y. Zhou, *Tiling groups with difference sets*, Electron. J. Combin. **22** (2015), no. 2, Paper 2.56, 13 pp.

Teorem.

Ako je $\{D_1, D_2\}$ popločavanje grupe dif. skupovima, onda je $D_2 = D_1^{(-1)}$.

Antisimetrični diferencijski skupovi

Diferencijski skup $D \subseteq G$ je antisimetričan ako vrijedi $D \cap D^{(-1)} = \emptyset$ i $D \cup D^{(-1)} = G \setminus \{1\}$. U tom slučaju je $\{D, D^{(-1)}\}$ popločavanje od G.

Jesu li popločavanja grupe s dva diferencijska skupa nužno tog oblika?

A. Ćustić, V. Krčadinac, Y. Zhou, *Tiling groups with difference sets*, Electron. J. Combin. **22** (2015), no. 2, Paper 2.56, 13 pp.

Teorem.

Ako je $\{D_1, D_2\}$ popločavanje grupe dif. skupovima, onda je $D_2 = D_1^{(-1)}$.

Dokaz. Računanje u grupovnom prstenu $\mathbb{Z}[G]$.

Antisimetrični diferencijski skupovi

Diferencijski skup $D \subseteq G$ je antisimetričan ako vrijedi $D \cap D^{(-1)} = \emptyset$ i $D \cup D^{(-1)} = G \setminus \{1\}$. U tom slučaju je $\{D, D^{(-1)}\}$ popločavanje od G.

Jesu li popločavanja grupe s dva diferencijska skupa nužno tog oblika?

A. Ćustić, V. Krčadinac, Y. Zhou, *Tiling groups with difference sets*, Electron. J. Combin. **22** (2015), no. 2, Paper 2.56, 13 pp.

Teorem.

Ako je $\{D_1, D_2\}$ popločavanje grupe dif. skupovima, onda je $D_2 = D_1^{(-1)}$.

Dokaz. Računanje u grupovnom prstenu $\mathbb{Z}[G]$.

Razvoj takvog popločavanja je Hadamardov mozaik.

Antisimetrični diferencijski skupovi

Diferencijski skup $D \subseteq G$ je antisimetričan ako vrijedi $D \cap D^{(-1)} = \emptyset$ i $D \cup D^{(-1)} = G \setminus \{1\}$. U tom slučaju je $\{D, D^{(-1)}\}$ popločavanje od G.

Jesu li popločavanja grupe s dva diferencijska skupa nužno tog oblika?

A. Ćustić, V. Krčadinac, Y. Zhou, *Tiling groups with difference sets*, Electron. J. Combin. **22** (2015), no. 2, Paper 2.56, 13 pp.

Teorem.

Ako je $\{D_1, D_2\}$ popločavanje grupe dif. skupovima, onda je $D_2 = D_1^{(-1)}$.

Dokaz. Računanje u grupovnom prstenu $\mathbb{Z}[G]$.

Razvoj takvog popločavanja je Hadamardov mozaik. Kuriozitet: dif. skupovi s parametrima oblika $(4n-1, 2n-1, n-1)$ **ne zovu** se Hadamardovi, nego diferencijski skupovi Paleyevog tipa. Naziv Hadamardov diferencijski skup koristi se kad su parametri oblika $(4u^2, 2u^2-u, u^2-u)$ (odgovaraju Menonovim dizajnima).

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$.

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & - \\ 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\ 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\ - & - & - & - & 1 & - & 1 & - \\ - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 \end{bmatrix}$$

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\ 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\ - & - & - & - & 1 & - & 1 & - \\ - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 \end{bmatrix}$$

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\ 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 \\ 1 & - & - & 1 & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - \end{bmatrix}$$

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - \\ 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - & - & 1 & 1 & - \\ 1 & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & - \end{bmatrix}$$

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - \\ 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - & - & 1 & 1 & - \\ 1 & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & - \end{bmatrix}$$

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

Incidencijska matrica $(4n-1, 2n-1, n-1)$ dizajna

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Antisimetrična Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\ 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\ - & - & - & 1 & - & - & 1 & 1 \\ - & 1 & - & 1 & 1 & - & - & - \\ - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ - & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & - & - & 1 & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Antisimetrična Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\ - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\ - & 1 & - & 1 & - & - & 1 & 1 \\ - & - & - & 1 & 1 & - & - & - \\ - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Antisimetrična Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\ - & 1 & - & - & 1 & - & 1 & - \\ - & 1 & 1 & - & - & 1 & - & - \\ - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 \\ - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - \\ - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ - & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Antisimetrična Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 \\ - & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 \\ - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - \\ - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 \\ - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - \\ - & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - \\ - & - & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Antisimetrična Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 \\ - & 1 & 1 & - & - & 1 & - & 1 \\ - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & - \\ - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 \\ - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - & - \\ - & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 & - \\ - & - & - & 1 & - & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Antisimetrična Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & 0 & - & - & 1 & - & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & - & - & 1 & - & 1 \\ - & 1 & 1 & 0 & - & - & 1 & - \\ - & - & 1 & 1 & 0 & - & - & 1 \\ - & 1 & - & 1 & 1 & 0 & - & - \\ - & - & 1 & - & 1 & 1 & 0 & - \\ - & - & - & 1 & - & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Antisimetrična Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ - & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ - & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ - & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ - & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ - & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Antisimetrične Hadamardove matrice

Hadamardova matrica H je antisimetrična ako je oblika $H = I + A$, $A^t = -A$. Alternativno, $H \in M_m(\{-1, 1\})$ je antisimetrična Hadamardova matrica ako zadovoljava $H \cdot H^t = mI$, $H + H^t = 2I$.

Antisimetrična Hadamardova matrica reda $m = 4n$ u standardnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ - & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ - & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ - & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ - & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ - & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ - & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \text{Hadamardov mozaik} \\ (4n-1, 2n-1, n-1)\oplus \\ (4n-1, 2n-1, n-1)\oplus \\ (4n-1, 1, 0) \end{array}$$

Antisimetrične Hadamardove matrice

Jesu li Hadamardovi mozaici nužno tog oblika, tj. dolaze li svi od antisimetričnih Hadamardovih matrica?

Antisimetrične Hadamardove matrice

Jesu li Hadamardovi mozaici nužno tog oblika, tj. dolaze li svi od antisimetričnih Hadamardovih matrica?

Teorem.

Hadamardovi mozaici ekvivalentni su antisimetričnim Hadamardovim matricama.

Antisimetrične Hadamardove matrice

Jesu li Hadamardovi mozaici nužno tog oblika, tj. dolaze li svi od antisimetričnih Hadamardovih matrica?

Teorem.

Hadamardovi mozaici ekvivalentni su antisimetričnim Hadamardovim matricama.

Dokaz. Računanje s incidencijskim matricama.

Antisimetrične Hadamardove matrice

Jesu li Hadamardovi mozaici nužno tog oblika, tj. dolaze li svi od antisimetričnih Hadamardovih matrica?

Teorem.

Hadamardovi mozaici ekvivalentni su antisimetričnim Hadamardovim matricama.

Dokaz. Računanje s incidencijskim matricama.

Padraig Ó Catháin, *Nesting symmetric designs*, Irish Math. Soc. Bull. (2013), no. 72, 71–74.

Antisimetrične Hadamardove matrice

Jesu li Hadamardovi mozaici nužno tog oblika, tj. dolaze li svi od antisimetričnih Hadamardovih matrica?

Teorem.

Hadamardovi mozaici ekvivalentni su antisimetričnim Hadamardovim matricama.

Dokaz. Računanje s incidencijskim matricama.

Padraig Ó Catháin, *Nesting symmetric designs*, Irish Math. Soc. Bull. (2013), no. 72, 71–74.

A_1 i A_2 incidencijske matrice $(4n-1, 2n-1, n-1)$ dizajna

$A_1 + A_2 + I = J \quad \Rightarrow \quad A_2 = A_1^t$ **?**

Antisimetrične Hadamardove matrice

Jesu li Hadamardovi mozaici nužno tog oblika, tj. dolaze li svi od antisimetričnih Hadamardovih matrica?

Teorem.

Hadamardovi mozaici ekvivalentni su antisimetričnim Hadamardovim matricama.

Dokaz. Računanje s incidencijskim matricama.

Padraig Ó Catháin, *Nesting symmetric designs*, Irish Math. Soc. Bull. (2013), no. 72, 71–74.

A_1 i A_2 incidencijske matrice $(4n-1, 2n-1, n-1)$ dizajna

$A_1 + A_2 + I = J \quad \Rightarrow \quad A_2 = A_1^t$ **?**

Hipoteza (Jennifer Seberry?): antisimetrične Hadamardove matrice postoje za sve redove oblika $m = 4n$.

Antisimetrične Hadamardove matrice

Padraig Ó Catháin, *Nesting symmetric designs*, Irish Math. Soc. Bull. (2013), no. 72, 71–74.

Teorem.

Simetrični (v, k, λ) dizajn može se proširiti do simetričnog $(v, k+1, \lambda')$ dizajna ako i samo ako nastaje od antisimetrične Hadamardove matrice.

Antisimetrične Hadamardove matrice

Padraig Ó Catháin, *Nesting symmetric designs*, Irish Math. Soc. Bull. (2013), no. 72, 71–74.

Teorem.

Simetrični (v, k, λ) dizajn može se proširiti do simetričnog $(v, k+1, \lambda')$ dizajna ako i samo ako nastaje od antisimetrične Hadamardove matrice.

K. B. Reid, E. Brown, *Doubly regular tournaments are equivalent to skew Hadamard matrices*, J. Combinatorial Theory Ser. A **12** (1972), 332–338.

Kraj

Hvala na pažnji!