Matrični dokazi nekih teorema o dizajnima*

Vedran Krčadinac

PMF-MO

12.7.2021.

* This work was fully supported by the Croatian Science Foundation under the project 9752.

Uvod: dvije kulture matematike

W. T. Gowers, *The Two Cultures of Mathematics*,
https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf

Uvod: dvije kulture matematike

W. T. Gowers, *The Two Cultures of Mathematics*,
https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf

1. Problem-solvers
2. Theory-builders

Uvod: dvije kulture matematike

W. T. Gowers, *The Two Cultures of Mathematics*,
https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf

1. Problem-solvers $\leftsquigarrow$ "Kombinatoričari"
2. Theory-builders

Uvod: dvije kulture matematike

W. T. Gowers, *The Two Cultures of Mathematics*,
https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf

1. Problem-solvers $\leftsquigarrow$ "Kombinatoričari"
2. Theory-builders

> Let me state as clearly as I can my view: *there are not two cultures at all; there is no part of mathematics which is not intimately linked with the whole.*

P. Cameron, *Cultures, tribes, or just an illusion?*
https://cameroncounts.wordpress.com/2012/04/01/cultures-tribes-or-just-an-illusion/

Matrice $W_{t,k}$

C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, University of Waterloo, 1995.

Matrice $W_{t,k}$

C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, University of Waterloo, 1995.

Neka je $V = \{1, \ldots, v\}$, za $v \in \mathbb{N}$. Neka su $t, k \in \mathbb{N}$, $t \leq k \leq v$.

Skup svih k-članih podskupova od V označavamo $\binom{V}{k}$. Vrijedi

$$\left|\binom{V}{k}\right| = \binom{v}{k}.$$

Matrice $W_{t,k}$

C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, University of Waterloo, 1995.

Neka je $V = \{1, \ldots, v\}$, za $v \in \mathbb{N}$. Neka su $t, k \in \mathbb{N}$, $t \leq k \leq v$.

Skup svih k-članih podskupova od V označavamo $\binom{V}{k}$. Vrijedi

$$\left|\binom{V}{k}\right| = \binom{v}{k}.$$

Pretpostavljamo da je zadan neki poredak elemenata iz $\binom{V}{k}$, npr. leksikografski. Za $v = 7$ i $k = 3$ je

$$\binom{V}{k} = (\,\{1,2,3\},\ \{1,2,4\}, \ldots, \{1,2,7\},\ \{1,3,4\}, \ldots, \{5,6,7\}\,).$$

Matrice $W_{t,k}$

Neka je $W_{t,k} \in M_{m,n}(\{0,1\})$ matrica s $m = \binom{v}{t}$ redaka i $n = \binom{v}{k}$ stupaca. Elementi su $W_{t,k} = [a_{ij}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } T_i \subseteq K_j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Pritom je T_i i-ti t-člani podskup od V, a K_j je j-ti k-člani podskup od V.

Matrice $W_{t,k}$

Neka je $W_{t,k} \in M_{m,n}(\{0,1\})$ matrica s $m = \binom{v}{t}$ redaka i $n = \binom{v}{k}$ stupaca. Elementi su $W_{t,k} = [a_{ij}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } T_i \subseteq K_j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Pritom je T_i i-ti t-člani podskup od V, a K_j je j-ti k-člani podskup od V.

Sume stupaca matrice $W_{t,k}$: $\binom{k}{t}$

Matrice $W_{t,k}$

Neka je $W_{t,k} \in M_{m,n}(\{0,1\})$ matrica s $m = \binom{v}{t}$ redaka i $n = \binom{v}{k}$ stupaca. Elementi su $W_{t,k} = [a_{ij}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } T_i \subseteq K_j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Pritom je T_i i-ti t-člani podskup od V, a K_j je j-ti k-člani podskup od V.

Sume stupaca matrice $W_{t,k}$: $\binom{k}{t}$

Sume redaka matrice $W_{t,k}$: $\binom{v-t}{k-t}$

Dizajni

Dizajn je familija k-članih podskupova od V: $\mathcal{B} \subseteq \binom{V}{k}$. Elemente dizajna zovemo blokovima. Kažemo da $\mathcal{B}$ ima parametre t-(v, k, λ_t) ako je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ_t blokova.

Dizajni

Dizajn je familija k-članih podskupova od V: $\mathcal{B} \subseteq \binom{V}{k}$. Elemente dizajna zovemo blokovima. Kažemo da $\mathcal{B}$ ima parametre t-(v, k, λ_t) ako je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ_t blokova.

Karakteristični vektor dizajna $\mathcal{B}$ je $f \in M_{n,1}(\{0,1\})$, $n = \binom{v}{k}$,

$$f_i = \begin{cases} 1, & \text{ako je } K_i \in \mathcal{B}, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dizajni

Dizajn je familija k-članih podskupova od V: $\mathcal{B} \subseteq \binom{V}{k}$. Elemente dizajna zovemo blokovima. Kažemo da $\mathcal{B}$ ima parametre t-(v, k, λ_t) ako je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ_t blokova.

Karakteristični vektor dizajna $\mathcal{B}$ je $f \in M_{n,1}(\{0,1\})$, $n = \binom{v}{k}$,

$$f_i = \begin{cases} 1, & \text{ako je } K_i \in \mathcal{B}, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Teorem.

Vektor $f \in M_{n,1}(\{0,1\})$ je karakteristični vektor t-(v, k, λ_t) dizajna ako i samo ako zadovoljava matričnu jednadžbu $W_{t,k} \cdot f = \lambda_t \mathbf{1}$.

Ovdje je $\mathbf{1} \in M_{m,1}$, $m = \binom{v}{t}$ vektor popunjen jedinicama.

Dizajni

Teorem.

Neka je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ_t). Za svaki $0 \leq s \leq t$, to je ujedno i s-(v, k, λ_s) dizajn, gdje je

$$\lambda_s = \lambda_t \binom{v-s}{t-s} / \binom{k-s}{t-s}.$$

Dizajni

Teorem.

Neka je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ_t). Za svaki $0 \leq s \leq t$, to je ujedno i s-(v, k, λ_s) dizajn, gdje je

$$\lambda_s = \lambda_t \binom{v-s}{t-s} / \binom{k-s}{t-s}.$$

Uobičajeni dokaz: izaberemo $S \subseteq V$, $|S| = s$ i na dva načina prebrojavamo parove iz skupa

$$\{(T, B) \mid S \subseteq T \subseteq B,\ |T| = t,\ B \in \mathcal{B}\}.$$

Dizajni

Teorem.

Neka je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ_t). Za svaki $0 \leq s \leq t$, to je ujedno i s-(v, k, λ_s) dizajn, gdje je

$$\lambda_s = \lambda_t \binom{v-s}{t-s} / \binom{k-s}{t-s}.$$

Uobičajeni dokaz: izaberemo $S \subseteq V$, $|S| = s$ i na dva načina prebrojavamo parove iz skupa

$$\{(T, B) \mid S \subseteq T \subseteq B,\ |T| = t,\ B \in \mathcal{B}\}.$$

Matrični dokaz slijedi iz sljedećeg važnog svojstva matrica $W_{t,k}$.

Lema.

Za sve $s \leq t \leq k$ vrijedi $\quad W_{s,t} \cdot W_{t,k} = \binom{k-s}{t-s} W_{s,k}.$

Dizajni

Dokaz leme. Neka je S i-ti s-člani podskup od V, a K j-ti k-člani podskup od V.

Dizajni

Dokaz leme. Neka je S i-ti s-člani podskup od V, a K j-ti k-člani podskup od V. Element na mjestu (i, j) u produktu $W_{s,t} \cdot W_{t,k}$ je suma po svim t-članim podskupovima $T \subseteq V$ produkta Iversonovih simbola $[S \subseteq T] \cdot [T \subseteq K]$, tj. broj t-članih "međuskupova" $S \subseteq T \subseteq K$.

Dizajni

Dokaz leme. Neka je S i-ti s-člani podskup od V, a K j-ti k-člani podskup od V. Element na mjestu (i, j) u produktu $W_{s,t} \cdot W_{t,k}$ je suma po svim t-članim podskupovima $T \subseteq V$ produkta Iversonovih simbola $[S \subseteq T] \cdot [T \subseteq K]$, tj. broj t-članih "međuskupova" $S \subseteq T \subseteq K$.

Dokaz teorema. Neka je f karakteristični vektor dizajna s parametrima t-(v, k, λ_t). On zadovoljava $W_{t,k} \cdot f = \lambda_t \mathbf{1}$. Računamo:

Dizajni

Dokaz leme. Neka je S i-ti s-člani podskup od V, a K j-ti k-člani podskup od V. Element na mjestu (i,j) u produktu $W_{s,t} \cdot W_{t,k}$ je suma po svim t-članim podskupovima $T \subseteq V$ produkta Iversonovih simbola $[S \subseteq T] \cdot [T \subseteq K]$, tj. broj t-članih "međuskupova" $S \subseteq T \subseteq K$.

Dokaz teorema. Neka je f karakteristični vektor dizajna s parametrima t-(v,k,λ_t). On zadovoljava $W_{t,k} \cdot f = \lambda_t \mathbf{1}$. Računamo:

$$W_{s,k} \cdot f = \binom{k-s}{t-s}^{-1} W_{s,t} \cdot W_{t,k} \cdot f = \binom{k-s}{t-s}^{-1} W_{s,t} \cdot \lambda_t \mathbf{1} =$$

$$= \lambda_t \binom{k-s}{t-s}^{-1} W_{s,t} \cdot \mathbf{1} = \lambda_t \binom{v-s}{t-s} / \binom{k-s}{t-s} \mathbf{1} = \lambda_s \mathbf{1}.$$

Komplement dizajna

Komplement dizajna: $\overline{\mathcal{B}} = \{V \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$.

Komplement dizajna

Komplement dizajna: $\overline{\mathcal{B}} = \{V \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$.

Teorem.

Ako je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ_t) i vrijedi $v \geq k + t$, onda je $\overline{\mathcal{B}}$ dizajn s parametrima t-$(v, v - k, \overline{\lambda}_t)$.

Komplement dizajna

Komplement dizajna: $\overline{\mathcal{B}} = \{V \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$.

Teorem.

Ako je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ_t) i vrijedi $v \geq k + t$, onda je $\overline{\mathcal{B}}$ dizajn s parametrima t-$(v, v - k, \overline{\lambda}_t)$.

Uobičajeni dokaz: formula uključivanja-isključivanja, dobijemo

$$\overline{\lambda}_t = \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{t}{s} \lambda_s.$$

Komplement dizajna

Komplement dizajna: $\overline{\mathcal{B}} = \{V \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$.

Teorem.

Ako je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ_t) i vrijedi $v \geq k + t$, onda je $\overline{\mathcal{B}}$ dizajn s parametrima t-$(v, v - k, \overline{\lambda}_t)$.

Uobičajeni dokaz: formula uključivanja-isključivanja, dobijemo

$$\overline{\lambda}_t = \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{t}{s} \lambda_s.$$

Dvostrukim prebrojavanjem dobijemo jednostavniju formulu:

$$\overline{\lambda}_t = \lambda_t \binom{v-t}{k} / \binom{v-t}{k-t}.$$

Matrice disjunktnosti $\overline{W}_{t,k}$

Matrica $\overline{W}_{t,k} \in M_{m,n}(\{0,1\})$ s $m = \binom{v}{t}$ redaka i $n = \binom{v}{k}$ stupaca ima elemente $\overline{W}_{t,k} = [\overline{a}_{ij}]$,

$$\overline{a}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } T_i \cap K_j = \emptyset, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

T_i je i-ti t-člani podskup od V, a K_j je j-ti k-člani podskup od V.

Matrice disjunktnosti $\overline{W}_{t,k}$

Matrica $\overline{W}_{t,k} \in M_{m,n}(\{0,1\})$ s $m = \binom{v}{t}$ redaka i $n = \binom{v}{k}$ stupaca ima elemente $\overline{W}_{t,k} = [\overline{a}_{ij}]$,

$$\overline{a}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } T_i \cap K_j = \emptyset, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

T_i je i-ti t-člani podskup od V, a K_j je j-ti k-člani podskup od V.

Vrijedi $T \cap K = \emptyset \iff T \subseteq V \setminus K$. Zato se matrica disjunktnosti $\overline{W}_{t,k}$ dobije permutacijom stupaca matrice inkluzije $W_{t,v-k}$.

Matrice disjunktnosti $\overline{W}_{t,k}$

Matrica $\overline{W}_{t,k} \in M_{m,n}(\{0,1\})$ s $m = \binom{v}{t}$ redaka i $n = \binom{v}{k}$ stupaca ima elemente $\overline{W}_{t,k} = [\overline{a}_{ij}]$,

$$\overline{a}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } T_i \cap K_j = \emptyset, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

T_i je i-ti t-člani podskup od V, a K_j je j-ti k-člani podskup od V.

Vrijedi $T \cap K = \emptyset \iff T \subseteq V \setminus K$. Zato se matrica disjunktnosti $\overline{W}_{t,k}$ dobije permutacijom stupaca matrice inkluzije $W_{t,v-k}$.

Lema.

Vrijedi $\overline{W}_{s,k} \cdot W_{t,k}^{\tau} = \binom{v-s-t}{k-t} \overline{W}_{s,t}$ i $W_{s,k} \cdot \overline{W}_{t,k}^{\tau} = \binom{v-s-t}{k-s} \overline{W}_{s,t}$.

Matrice disjunktnosti $\overline{W}_{t,k}$

Lema.

Vrijedi $\quad W_{s,t} \cdot \overline{W}_{t,k} = \binom{v-k-s}{t-s} \overline{W}_{s,k}.$

Matrice disjunktnosti $\overline{W}_{t,k}$

Lema.

Vrijedi $\quad W_{s,t} \cdot \overline{W}_{t,k} = \binom{v-k-s}{t-s} \overline{W}_{s,k}.$

Lema.

Vrijedi $\quad \overline{W}_{t,k} = \sum_{s \geq 0} (-1)^s W_{s,t}^{\tau} \cdot W_{s,k} \quad$ i $\quad W_{t,k} = \sum_{s \geq 0} (-1)^s W_{s,t}^{\tau} \cdot \overline{W}_{s,k}.$

Matrice disjunktnosti $\overline{W}_{t,k}$

Lema.

Vrijedi $\quad W_{s,t} \cdot \overline{W}_{t,k} = \binom{v-k-s}{t-s} \overline{W}_{s,k}.$

Lema.

Vrijedi $\quad \overline{W}_{t,k} = \sum_{s \geq 0} (-1)^s W_{s,t}^{\tau} \cdot W_{s,k} \quad$ i $\quad W_{t,k} = \sum_{s \geq 0} (-1)^s W_{s,t}^{\tau} \cdot \overline{W}_{s,k}.$

Lema.

Potprostor razapet recima matrice $W_{t,k}$ nad $\mathbb{Q}$ je jednak potprostoru razapetom recima matrice $\overline{W}_{t,k}$ nad $\mathbb{Q}$.

Matrice disjunktnosti $\overline{W}_{t,k}$

Lema.

Vrijedi $\quad W_{s,t} \cdot \overline{W}_{t,k} = \binom{v-k-s}{t-s} \overline{W}_{s,k}.$

Lema.

Vrijedi $\quad \overline{W}_{t,k} = \sum_{s \geq 0} (-1)^s W_{s,t}^{\tau} \cdot W_{s,k} \quad$ i $\quad W_{t,k} = \sum_{s \geq 0} (-1)^s W_{s,t}^{\tau} \cdot \overline{W}_{s,k}.$

Lema.

Potprostor razapet recima matrice $W_{t,k}$ nad $\mathbb{Q}$ je jednak potprostoru razapetom recima matrice $\overline{W}_{t,k}$ nad $\mathbb{Q}$.

$\overline{W}_{t,k} = G \cdot W_{t,k}$ i $W_{t,k} = H \cdot \overline{W}_{t,k}$ za kvadratne matrice $G, H \in M_m(\mathbb{Q})$,

$$G = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{k-s}{t-s}^{-1} W_{s,t}^{\tau} \cdot W_{s,t}, \quad H = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{v-k-s}{t-s}^{-1} W_{s,t}^{\tau} \cdot W_{s,t}.$$

Matrični dokaz teorema o komplementu dizajna

Teorem.

Ako je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ_t) i vrijedi $v \geq k + t$, onda je $\overline{\mathcal{B}}$ dizajn s parametrima t-$(v, v - k, \overline{\lambda}_t)$.

Dokaz. Neka je f karakteristični vektor od $\mathcal{B}$, a $\overline{f}$ od $\overline{\mathcal{B}}$. Vektor $\overline{f}$ dobijemo permutiranjem komponenti vektora f, permutacijom koja odgovara komplementiranju. Ta permutacija je involucija, tj. sama je sebi inverz.

Matrični dokaz teorema o komplementu dizajna

Teorem.

Ako je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ_t) i vrijedi $v \geq k + t$, onda je $\overline{\mathcal{B}}$ dizajn s parametrima t-$(v, v - k, \overline{\lambda}_t)$.

Dokaz. Neka je f karakteristični vektor od $\mathcal{B}$, a $\overline{f}$ od $\overline{\mathcal{B}}$. Vektor $\overline{f}$ dobijemo permutiranjem komponenti vektora f, permutacijom koja odgovara komplementiranju. Ta permutacija je involucija, tj. sama je sebi inverz.

Ista ta permutacija stupaca matrice $\overline{W}_{t,k}$ pretvara je u matricu $W_{t,v-k}$ i obrnuto. Zato vektor $\overline{f}$ zadovoljava $W_{t,v-k} \cdot \overline{f} = \overline{\lambda}_t \mathbf{1}$ ako i samo ako vektor f zadovoljava $\overline{W}_{t,k} \cdot f = \overline{\lambda}_t \mathbf{1}$.

Matrični dokaz teorema o komplementu dizajna

Teorem.

Ako je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ_t) i vrijedi $v \geq k + t$, onda je $\overline{\mathcal{B}}$ dizajn s parametrima t-$(v, v - k, \overline{\lambda}_t)$.

Dokaz. Neka je f karakteristični vektor od $\mathcal{B}$, a $\overline{f}$ od $\overline{\mathcal{B}}$. Vektor $\overline{f}$ dobijemo permutiranjem komponenti vektora f, permutacijom koja odgovara komplementiranju. Ta permutacija je involucija, tj. sama je sebi inverz.

Ista ta permutacija stupaca matrice $\overline{W}_{t,k}$ pretvara je u matricu $W_{t,v-k}$ i obrnuto. Zato vektor $\overline{f}$ zadovoljava $W_{t,v-k} \cdot \overline{f} = \overline{\lambda}_t \mathbf{1}$ ako i samo ako vektor f zadovoljava $\overline{W}_{t,k} \cdot f = \overline{\lambda}_t \mathbf{1}$.

Iskoristimo $\overline{W}_{t,k} = G \cdot W_{t,k}$ i činjenicu da je f karakteristični vektor dizajna: $\overline{W}_{t,k} \cdot f = G \cdot W_{t,k} \cdot f = G \cdot \lambda_t \mathbf{1} = \lambda_t \, G \cdot \mathbf{1}$.

Matrični dokaz teorema o komplementu dizajna

Teorem.

Ako je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ_t) i vrijedi $v \geq k + t$, onda je $\overline{\mathcal{B}}$ dizajn s parametrima t-$(v, v-k, \overline{\lambda}_t)$.

Dokaz. Neka je f karakteristični vektor od $\mathcal{B}$, a $\overline{f}$ od $\overline{\mathcal{B}}$. Vektor $\overline{f}$ dobijemo permutiranjem komponenti vektora f, permutacijom koja odgovara komplementiranju. Ta permutacija je involucija, tj. sama je sebi inverz.

Ista ta permutacija stupaca matrice $\overline{W}_{t,k}$ pretvara je u matricu $W_{t,v-k}$ i obrnuto. Zato vektor $\overline{f}$ zadovoljava $W_{t,v-k} \cdot \overline{f} = \overline{\lambda}_t \mathbf{1}$ ako i samo ako vektor f zadovoljava $\overline{W}_{t,k} \cdot f = \overline{\lambda}_t \mathbf{1}$.

Iskoristimo $\overline{W}_{t,k} = G \cdot W_{t,k}$ i činjenicu da je f karakteristični vektor dizajna: $\overline{W}_{t,k} \cdot f = G \cdot W_{t,k} \cdot f = G \cdot \lambda_t \mathbf{1} = \lambda_t\, G \cdot \mathbf{1}$.

Iz formule za G slijedi da ima konstantne sume redaka, tj. $G \cdot \mathbf{1} = g\,\mathbf{1}$ za neki broj g. Dakle, vektor $\overline{f}$ zadovoljava $W_{t,v-k} \cdot \overline{f} = \lambda_t g\,\mathbf{1}$, tj. $\overline{\mathcal{B}}$ je t-$(v, v-k, \overline{\lambda}_t)$ dizajn za $\overline{\lambda}_t = \lambda_t g$.

Matrični dokaz teorema o komplementu dizajna

Iz formule $G = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{k-s}{t-s}^{-1} W_{s,t}^{\tau} \cdot W_{s,t}$ dobijemo

$$g = \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{t}{s} \binom{v-s}{t-s} / \binom{k-s}{t-s}.$$

Matrični dokaz teorema o komplementu dizajna

Iz formule $G = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{k-s}{t-s}^{-1} W_{s,t}^{\tau} \cdot W_{s,t}$ dobijemo

$$g = \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{t}{s} \binom{v-s}{t-s} / \binom{k-s}{t-s}.$$

Sada imamo tri formule za parametar $\overline{\lambda}_t$ komplementarnog dizajna:

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}_t &= \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{t}{s} \lambda_s \\
&= \lambda_t \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{t}{s} \binom{v-s}{t-s} / \binom{k-s}{t-s} \\
&= \lambda_t \binom{v-t}{k} / \binom{v-t}{k-t}.
\end{aligned}$$

Fisherova nejednakost

Teorem (R. Fisher, 1940.)

Ako je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima 2-(v, k, λ_2) i $b = |\mathcal{B}|$, onda je $b \geq v$.

Fisherova nejednakost

Teorem (R. Fisher, 1940.)

Ako je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima 2-(v, k, λ_2) i $b = |\mathcal{B}|$, onda je $b \geq v$.

Nejednakost ima više dokaza. Na kolegiju *Konačne geometrije* prof. Šiftar dokazuje je ovako: incidencijska matrica $A \in M_{v,b}(\{0,1\})$ dizajna zadovoljava $A \cdot A^\tau = (\lambda_1 - \lambda_2)I + \lambda_2 J$. Na desnoj strani je kvadratna $v \times v$ matrica s determinantom $\neq 0$. Rang te matrice je v, pa je rang incidencijske matrice $r(A) \geq v$, iz čega slijedi $b \geq v$.

Fisherova nejednakost

Teorem (R. Fisher, 1940.)

Ako je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima 2-(v, k, λ_2) i $b = |\mathcal{B}|$, onda je $b \geq v$.

Nejednakost ima više dokaza. Na kolegiju *Konačne geometrije* prof. Šiftar dokazuje je ovako: incidencijska matrica $A \in M_{v,b}(\{0,1\})$ dizajna zadovoljava $A \cdot A^\tau = (\lambda_1 - \lambda_2)I + \lambda_2 J$. Na desnoj strani je kvadratna $v \times v$ matrica s determinantom $\neq 0$. Rang te matrice je v, pa je rang incidencijske matrice $r(A) \geq v$, iz čega slijedi $b \geq v$.

Generalizirana incidencijska matrica $W_s(\mathcal{B})$ sastoji se redom od onih stupaca matrice $W_{s,k}$ koji pripadaju dizajnu $\mathcal{B}$.

Fisherova nejednakost

Teorem (R. Fisher, 1940.)

Ako je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima 2-(v, k, λ_2) i $b = |\mathcal{B}|$, onda je $b \geq v$.

Nejednakost ima više dokaza. Na kolegiju *Konačne geometrije* prof. Šiftar dokazuje je ovako: incidencijska matrica $A \in M_{v,b}(\{0,1\})$ dizajna zadovoljava $A \cdot A^\tau = (\lambda_1 - \lambda_2)I + \lambda_2 J$. Na desnoj strani je kvadratna $v \times v$ matrica s determinantom $\neq 0$. Rang te matrice je v, pa je rang incidencijske matrice $r(A) \geq v$, iz čega slijedi $b \geq v$.

Generalizirana incidencijska matrica $W_s(\mathcal{B})$ sastoji se redom od onih stupaca matrice $W_{s,k}$ koji pripadaju dizajnu $\mathcal{B}$.

$W_0(\mathcal{B})$ je $1 \times b$ matrica popunjena jedinicama.

Fisherova nejednakost

Teorem (R. Fisher, 1940.)

Ako je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima 2-(v, k, λ_2) i $b = |\mathcal{B}|$, onda je $b \geq v$.

Nejednakost ima više dokaza. Na kolegiju *Konačne geometrije* prof. Šiftar dokazuje je ovako: incidencijska matrica $A \in M_{v,b}(\{0,1\})$ dizajna zadovoljava $A \cdot A^\tau = (\lambda_1 - \lambda_2)I + \lambda_2 J$. Na desnoj strani je kvadratna $v \times v$ matrica s determinantom $\neq 0$. Rang te matrice je v, pa je rang incidencijske matrice $r(A) \geq v$, iz čega slijedi $b \geq v$.

Generalizirana incidencijska matrica $W_s(\mathcal{B})$ sastoji se redom od onih stupaca matrice $W_{s,k}$ koji pripadaju dizajnu $\mathcal{B}$.

$W_0(\mathcal{B})$ je $1 \times b$ matrica popunjena jedinicama.

$W_1(\mathcal{B})$ je uobičajena $v \times b$ incidencijska matrica A dizajna $\mathcal{B}$.

Generalizirane incidencijske matrice

Općenito, $W_s(\mathcal{B})$ je $\binom{v}{s} \times b$ matrica s konstantnim sumama stupaca $\binom{k}{s}$. Ako imamo t-(v, k, λ_t) dizajn i vrijedi $s \leq t$, sume redaka su također konstantne i iznose λ_s.

Generalizirane incidencijske matrice

Općenito, $W_s(\mathcal{B})$ je $\binom{v}{s} \times b$ matrica s konstantnim sumama stupaca $\binom{k}{s}$. Ako imamo t-(v, k, λ_t) dizajn i vrijedi $s \leq t$, sume redaka su također konstantne i iznose λ_s.

Lema.

Ako je $\mathcal{B}$ t-dizajn i vrijedi $i + j \leq t$, onda je

$$\frac{1}{b} W_i(\mathcal{B}) \cdot W_j(\mathcal{B})^\tau = \frac{1}{\binom{v}{k}} W_{i,k} \cdot W_{j,k}^\tau.$$

Generalizirane incidencijske matrice

Općenito, $W_s(\mathcal{B})$ je $\binom{v}{s} \times b$ matrica s konstantnim sumama stupaca $\binom{k}{s}$. Ako imamo t-(v, k, λ_t) dizajn i vrijedi $s \leq t$, sume redaka su također konstantne i iznose λ_s.

Lema.

Ako je $\mathcal{B}$ t-dizajn i vrijedi $i + j \leq t$, onda je

$$\frac{1}{b} W_i(\mathcal{B}) \cdot W_j(\mathcal{B})^\tau = \frac{1}{\binom{v}{k}} W_{i,k} \cdot W_{j,k}^\tau.$$

Lema.

Za $t \leq k$, matrica $W_{t,k}$ je punog ranga nad poljem $\mathbb{Q}$, tj.

$$r(W_{t,k}) = \min\{\binom{v}{t}, \binom{v}{k}\}.$$

Generalizacija Fisherove nejednakosti

Teorem (Ray-Chaudhuri, Wilson)

Neka je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ_t), $b = |\mathcal{B}|$, $s = \lfloor t/2 \rfloor$ i neka vrijedi $t < k \leq v - t$. Onda je $b \geq \binom{v}{s}$.

Generalizacija Fisherove nejednakosti

Teorem (Ray-Chaudhuri, Wilson)

Neka je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ_t), $b = |\mathcal{B}|$, $s = \lfloor t/2 \rfloor$ i neka vrijedi $t < k \leq v - t$. Onda je $b \geq \binom{v}{s}$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da $W_s(\mathcal{B})$ ima linearno nezavisne retke.

Generalizacija Fisherove nejednakosti

Teorem (Ray-Chaudhuri, Wilson)

Neka je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ_t), $b = |\mathcal{B}|$, $s = \lfloor t/2 \rfloor$ i neka vrijedi $t < k \leq v - t$. Onda je $b \geq \binom{v}{s}$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da $W_s(\mathcal{B})$ ima linearno nezavisne retke.

Primijenimo lemu za $i = j = s$:

$$\frac{1}{b} W_s(\mathcal{B}) \cdot W_s(\mathcal{B})^\tau = \frac{1}{\binom{v}{k}} W_{s,k} \cdot W_{s,k}^\tau.$$

Generalizacija Fisherove nejednakosti

Teorem (Ray-Chaudhuri, Wilson)

Neka je $\mathcal{B}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ_t), $b = |\mathcal{B}|$, $s = \lfloor t/2 \rfloor$ i neka vrijedi $t < k \leq v - t$. Onda je $b \geq \binom{v}{s}$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da $W_s(\mathcal{B})$ ima linearno nezavisne retke.

Primijenimo lemu za $i = j = s$:

$$\frac{1}{b} W_s(\mathcal{B}) \cdot W_s(\mathcal{B})^\tau = \frac{1}{\binom{v}{k}} W_{s,k} \cdot W_{s,k}^\tau.$$

Vrijedi $\binom{v}{s} < \binom{v}{k}$, pa matrica $W_{s,k}$ ima linearno nezavisne retke. Zato je kvadratna $\binom{v}{s} \times \binom{v}{s}$ matrica $W_{s,k} \cdot W_{s,k}^\tau$ regularna, pa je i matrica $W_s(\mathcal{B}) \cdot W_s(\mathcal{B})^\tau$ na lijevoj strani također regularna. Iz toga slijedi da $W_s(\mathcal{B})$ ima linearno nezavisne retke.

Drugi matrični dokazi iz Godsilove skripte

C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, University of Waterloo, 1995.

Drugi matrični dokazi iz Godsilove skripte

C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, University of Waterloo, 1995.

- Derivirani dizajni $\leftsquigarrow$ particija matrica $W_{t,k}$ na blokove.

Drugi matrični dokazi iz Godsilove skripte

C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, University of Waterloo, 1995.

- Derivirani dizajni $\leftrightsquigarrow$ particija matrica $W_{t,k}$ na blokove.
- Rezultati o stupnju dizajna (broju različitih veličina presjeka blokova).

Drugi matrični dokazi iz Godsilove skripte

C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, University of Waterloo, 1995.

- Derivirani dizajni $\leftrightsquigarrow$ particija matrica $W_{t,k}$ na blokove.
- Rezultati o stupnju dizajna (broju različitih veličina presjeka blokova).
- Majumdarov teorem o kvazisimetričnim dizajnima s disjunktnim blokovima.

Drugi matrični dokazi iz Godsilove skripte

C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, University of Waterloo, 1995.

- Derivirani dizajni $\leftrightsquigarrow$ particija matrica $W_{t,k}$ na blokove.
- Rezultati o stupnju dizajna (broju različitih veličina presjeka blokova).
- Majumdarov teorem o kvazisimetričnim dizajnima s disjunktnim blokovima.
- Taktičke dekompozicije dizajna. Broj orbita na točkama 2-dizajna nije veći od broja orbita na blokovima.

Drugi matrični dokazi iz Godsilove skripte

C. D. Godsil, *Linear algebra and designs*, University of Waterloo, 1995.

- Derivirani dizajni $\leftsquigarrow$ particija matrica $W_{t,k}$ na blokove.
- Rezultati o stupnju dizajna (broju različitih veličina presjeka blokova).
- Majumdarov teorem o kvazisimetričnim dizajnima s disjunktnim blokovima.
- Taktičke dekompozicije dizajna. Broj orbita na točkama 2-dizajna nije veći od broja orbita na blokovima.
- Ideje matričnih dokaza rezultata o q-analogonima dizajna ("assignments").

Kraj

Hvala na pažnji!