Konstrukcija cjelobrojnih kvadratnih Heffterovih nizova

Filip Martinović travanj 2023.

Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva

rad podržan HRZZ projektom IP-2020-02-9752

Uvod i motivacija

- Anita Pasotti, prezentacija na CCW u Zagrebu
- Dan Archdeacon, *Heffter Arrays and Biembedding Graphs on Surfaces* [2]
- povezanost s teorijom dizajna i teorijom grafova
- cilj nam je konstruirati $H(m, n; h, k)$ za razne parametre m, n, h i k

Osnovni pojmovi

Definicija

Heffterov niz $H(m, n; h, k)$ je djelomično ispunjena $m \times n$ matrica s ne-nul ulazima iz $\mathbb{Z}_{2nk+1}$ takva da

- svaki redak matrice ima h ulaza i svaki stupac matrice ima k ulaza,
- ulazi svakog retka i retka se zbrajaju u 0 kao zbrajanje elemenata u $\mathbb{Z}_{2nk+1}$,
- za svaki $z \in \mathbb{Z}_{2nk+1}$, samo se ili z ili $-z$ može pojaviti kao ulaz u matrici.

Ćelije bez ulaza zvat ćemo prazne ćelije.

Primjer

Heffterov niz $H(7,7;3,3)$

	-2	-13	15			
-3		14	-11			
12	-8		-4			
-9	10	-1				
				17	21	5
				19	6	18
				7	16	20

Osnovna svojstva

Propozicija

- Heffterovi nizovi invarijatni do na permutaciju redaka i stupaca
- Ako je $H(m, n; h, k)$ Heffterov niz, tada je

$$mh = nk \quad , \quad m \geq k \geq 3 \quad , \quad n \geq h \geq 3.$$

Kvadratni Heffterovi nizovi

Definicija

Za Heffterov niz $H(m, n; h, k)$ kažemo da je <u>kvadratni Heffterov niz</u>, ako je $m = n$ i $h = k$ te ga označavamo s $H(n; k)$.

Teorem

Za sve $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, postoji kvadratni Heffterov niz $H(n; k)$. [1], [4] i [3]

Cjelobrojni Heffterovi nizovi

Definicija

Cjelobrojni Heffterov niz je Heffterov niz u kojem suma ćelija po retcima i stupcima daje 0 kao zbrajanje elemenata u $\mathbb{Z}$.

Lema

Ako postoji cjelobrojni Heffterov niz $H(m, n; h, k)$, tada je $nk \equiv 0, 3 \mod 4$.

Cjelobrojni kvadratni Heffterovi nizovi

Definicija

- cjelobrojni kvadratni Heffterov niz

Lema

Za $n, k \in \mathbb{N}$, ako je $nk \equiv 0, 3 \mod 4$, tada vrijedi jedno od sljedećeg:

(1) $k \equiv 0 \mod 4$,

(2) $k \equiv 2 \mod 4$ i $n \equiv 0 \mod 2$,

(3) $k \equiv 3 \mod 4$ i $n \equiv 0, 1 \mod 4$,

(4) $k \equiv 1 \mod 4$ i $n \equiv 0, 3 \mod 4$.

Konstrukcija za $k \equiv 2 \mod 4$ i $n \equiv 0 \mod 2$

Definicija

- nosač $n \times n$ niza
- i-ta dijagonala $n \times n$ niza
- uzastopne dijagonale

Konstrukcija za $k \equiv 2 \mod 4$ i $n \equiv 0 \mod 2$

Za $z \in \mathbb{Z}$ definiramo

$$A_z = \begin{array}{|c|c|} \hline -1-4z & 2+4z \\ \hline 3+4z & -4-4z \\ \hline \end{array},$$

$$B_z = \begin{array}{|c|c|} \hline 1+4z & -2-4z \\ \hline -3-4z & 4+4z \\ \hline \end{array}, \quad C_z = \begin{array}{|c|c|} \hline 1+4z & -3-4z \\ \hline -2-4z & 4+4z \\ \hline \end{array}.$$

- • nosač $\{1+4z, 2+4z, 3+4z, 4+4z\}$
- • nizovi A i B u ista dva retka
- • nizovi A i B u ista dva stupca
- • nizovi A, A i C u ista dva retka
- × nizovi A, A i C u ista dva stupca

Konstrukcija za $k \equiv 2 \mod 4$ i $n \equiv 0 \mod 2$

- konstruiramo $H(n; 6)$
- $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ niz D
- u svaki redak redom umetnemo A_{3i}, C_{3i+1} i A_{3i+2} na prve tri dijagonale
- $n \times n$ niz H_D
- suma po retcima je dobra
- popravljamo sume po stupcima
- nosač niza H_D

Konstrukcija za $k \equiv 2 \mod 4$ i $n \equiv 0 \mod 2$

Primjer $H(n;6)$ za $n = 10$:

-1	2	5	-7	-9	10				
3	-4	-6	8	11	-12				
		-13	14	17	-19	-21	22		
		15	-16	-18	20	23	-24		
				-25	26	29	-31	-33	34
				27	-28	-30	32	35	-36
-45	46					-37	38	41	-43
47	-48					39	-40	-42	44
53	-55	-57	58					-49	50
-54	56	59	-60					51	-52

Konstrukcija za $k \equiv 2 \mod 4$ i $n \equiv 0 \mod 2$

Primjer $H(n;6)$ za $n = 10$:

-1	5	2	-7	-9	10				
3	-4	-6	8	11	-12				
		-13	17	14	-19	-21	22		
		15	-16	-18	20	23	-24		
				-25	29	26	-31	-33	34
				27	-28	-30	32	35	-36
-45	46					-37	41	38	-43
47	-48					39	-40	-42	44
50	-55	-57	58					-49	53
-54	56	59	-60					51	-52

Konstrukcija za $k \equiv 2 \mod 4$ i $n \equiv 0 \mod 2$

- konstruiramo $H(n;k)$
- potrebno je popuniti još $\frac{k}{2} - 3$ dijagonale od D
- pola tih dijagonala ispunjavamo s nizovima A, a drugu polovicu s nizovima B
- sume po retcima i stupcima dobivenog H_D ostaju nepromjenjene
- nosač niza H_D

Konstrukcija za $k \equiv 2 \mod 4$ i $n \equiv 0 \mod 2$

Primjer $H(10;10)$:

-1	5	2	-7	-9	10	-61	62		
3	-4	-6	8	11	-12	63	-64		
		-13	17	14	-19	-21	22	-65	66
		15	-16	-18	20	23	-24	67	-68
-69	70			-25	29	26	-31	-33	34
71	-72			27	-28	-30	32	35	-36
-45	46	-73	74			-37	41	38	-43
47	-48	75	-76			39	-40	-42	44
50	-55	-57	58	-77	78			-49	53
-54	56	59	-60	79	-80			51	-52

Konstrukcija za $k \equiv 2 \mod 4$ i $n \equiv 0 \mod 2$

Primjer $H(10;10)$:

-1	5	2	-7	-9	10	-61	62	81	-82
3	-4	-6	8	11	-12	63	-64	-83	84
85	-86	-13	17	14	-19	-21	22	-65	66
-87	88	15	-16	-18	20	23	-24	67	-68
-69	70	89	-90	-25	29	26	-31	-33	34
71	-72	-91	92	27	-28	-30	32	35	-36
-45	46	-73	74	93	-94	-37	41	38	-43
47	-48	75	-76	-95	96	39	-40	-42	44
50	-55	-57	58	-77	78	97	-98	-49	53
-54	56	59	-60	79	-80	-99	100	51	-52

Konstrukcija za $k \equiv 0 \mod 4$

Definicija

- <u>pomični $n \times n$ niz A</u>
- $A \pm z$, $z \in \mathbb{N}$

- nosač niza $H(n;k)$ je $\{1, \ldots, nk\}$
- ako je $H(n;k)$ pomični niz, tada $H(n;k) \pm z$ ima nosač $\{1+z, \ldots, nk+z\}$, a sume po retcima i stupcima ostaju nepromijenjene

Konstrukcija za $k \equiv 0 \mod 4$

- konstruiramo $H(n;4)$
- $n \times n$ niz J
- ispunimo dijagonale D_0, D_{n-1}, D_{n-2}, D_{n-3}
- sume po stupcima su dobre
- sume po retcima nisu dobre

Primjer za $n = 7$:

1				26	−13	−21
−15	2				27	−14
−8	−16	3				28
22	−9	−17	4			
	23	−10	−18	5		
		24	−11	−19	6	
			25	−12	−20	7

Konstrukcija za $k \equiv 0 \mod 4$

- korekcija prva tri retka
- J ostaju dobre sume po stupcima
- J sada ima dobre sume po retcima
- konstruirali smo $H(n; 4)$

Primjer za $n = 7$:

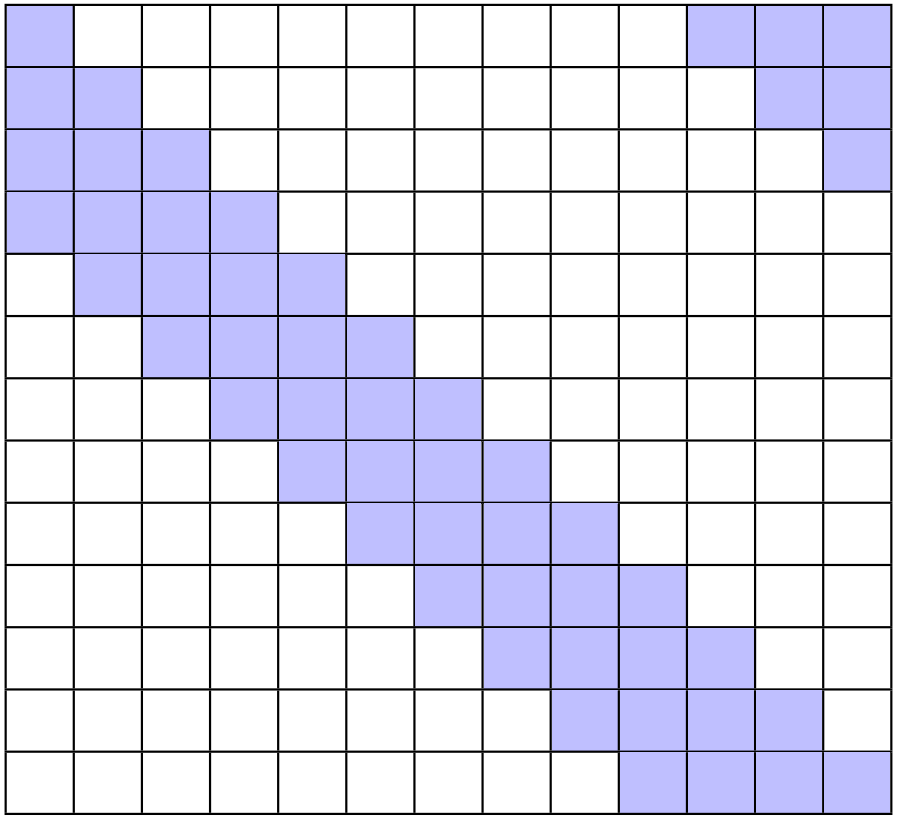
1				26	−13	−14
−8	2				27	−21
−15	−16	3				28
22	−9	−17	4			
	23	−10	−18	5		
		24	−11	−19	6	
			25	−12	−20	7

Konstrukcija za $k \equiv 0 \mod 4$

- konstruirani J je pomični $H(n;4)$ niz
- sada konstruiramo H niz $H(n;k)$
- trebamo ispuniti još $k-4$ dijagonala
- grupiramo ih u l grupacija po četiri uzastopne dijagonale
- permutiramo stupce od J u desno za 4 mjesta i pomaknemo cijeli niz J za $\pm 4n$
- dodavanjem pomičnog niza $J \pm 4n$ u prazne ćelije suma redaka i stupaca ostaje nepromjenjena, dok se nosač proširuje
- primijenimo ovaj postupak na svaku od l grupacija i ispunimo preostalih $4l = k-4$ dijagonala
- time smo H proširili do $H(n;k)$

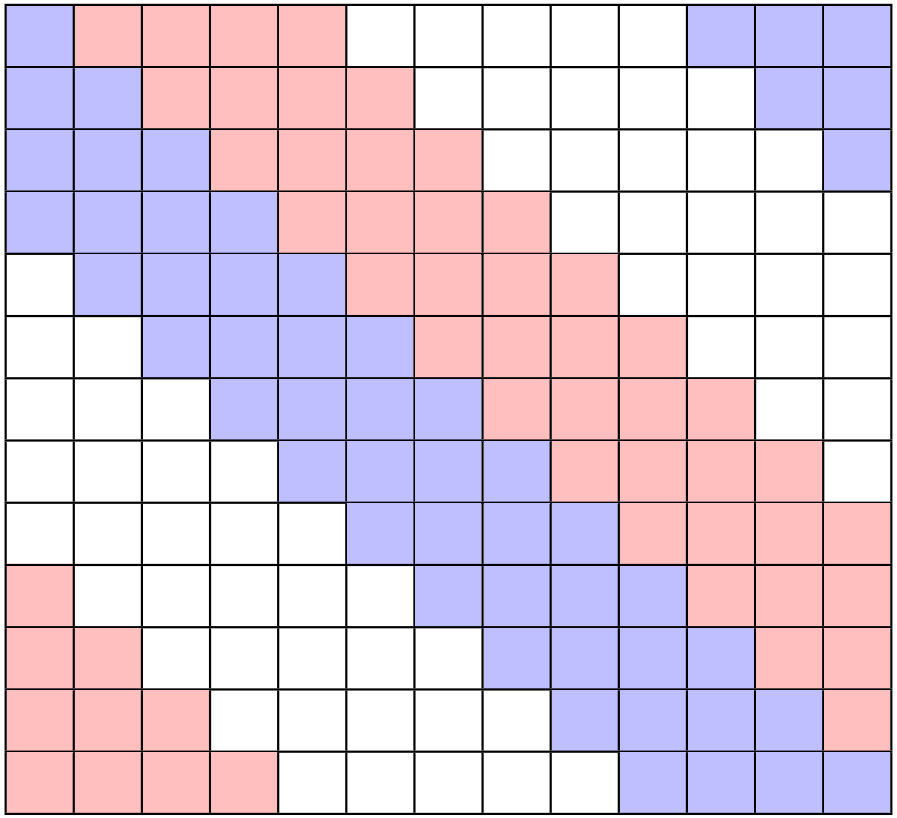
Konstrukcija za $k \equiv 0 \mod 4$

Primjer $H(n;k)$ za $n = 13$ i $k = 12$:



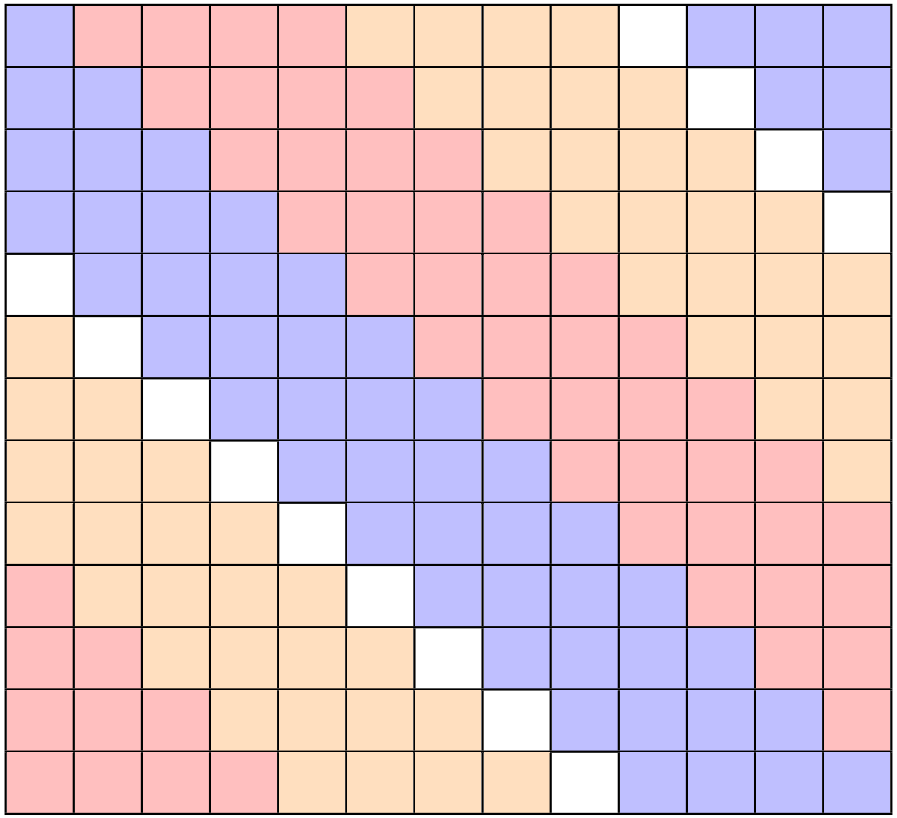
Konstrukcija za $k \equiv 0 \mod 4$

Primjer $H(n;k)$ za $n = 13$ i $k = 12$:



Konstrukcija za $k \equiv 0 \mod 4$

Primjer $H(n;k)$ za $n = 13$ i $k = 12$:



Konstrukcija za $k \equiv 3 \mod 4$

Definicija

Neka je G graf, $A(G)$ skup svih lukova (u, v) grafa G, $S = \{\pm 1, \ldots, \pm |E(G)|\}$. Za bijekciju $\kappa : A(G) \to S$ kažemo da je <u>cjelobrojno-strujno pridruživanje</u>, ako

- (poštuje predznake) $(\forall e \in A(G))\ \kappa(-e) = -\kappa(e)$,
- (Kirchhoffov zakon) $(\forall u \in V(G))\ \sum_{e \in A(G)\,|\,\text{rep od } e \text{ je } u} \kappa(e) = 0$.

Za graf s takvim pridruživanjem kažemo da je <u>strujni graf</u>.

Konstrukcija za $k \equiv 3 \mod 4$

Lema

Postoji k-regularan bipartitan graf reda $2n$ s cjelobrojno-strujnim pridruživanjem ako i samo ako postoji Heffterov niz $H(n; k)$.

Konstrukcija za $k \equiv 3 \mod 4$ i $n \equiv 1 \mod 4$

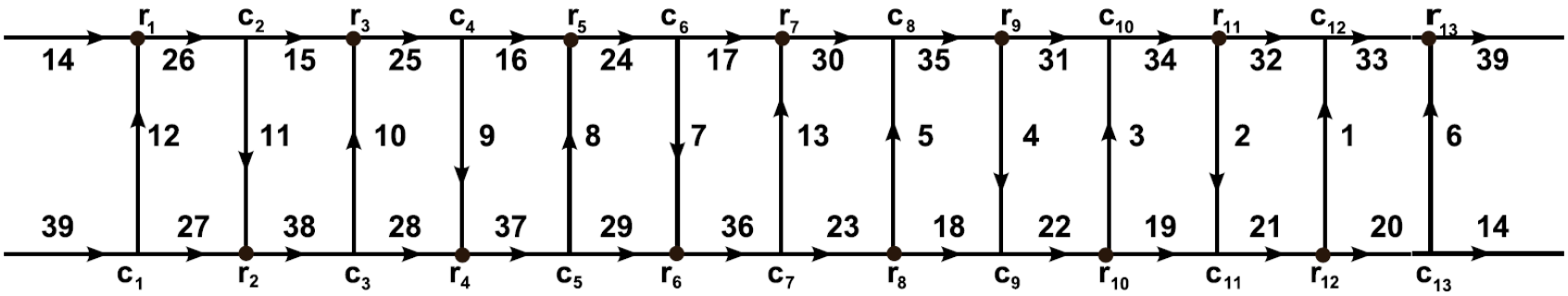
Definicija

Möbiusove ljestve na $4m+1$ stepenica je bipartitni graf sa skupom vrhova $R \cup C$, gdje je $R = \{r_i \mid i = 1, \ldots, 4m+1\}$, $C = \{c_i \mid i = 1, \ldots, 4m+1\}$, i skupom bridova

$$\big\{\{r_i, c_j\} \mid i = 1, \ldots, 4m+1, j = i-1, i, i+1\big\},$$

gdje se indeksi i i j gledaju kao indeksi iz $\mathbb{Z}_{4m+1}$.

Primjer za $n = 4m+1 = 13$:



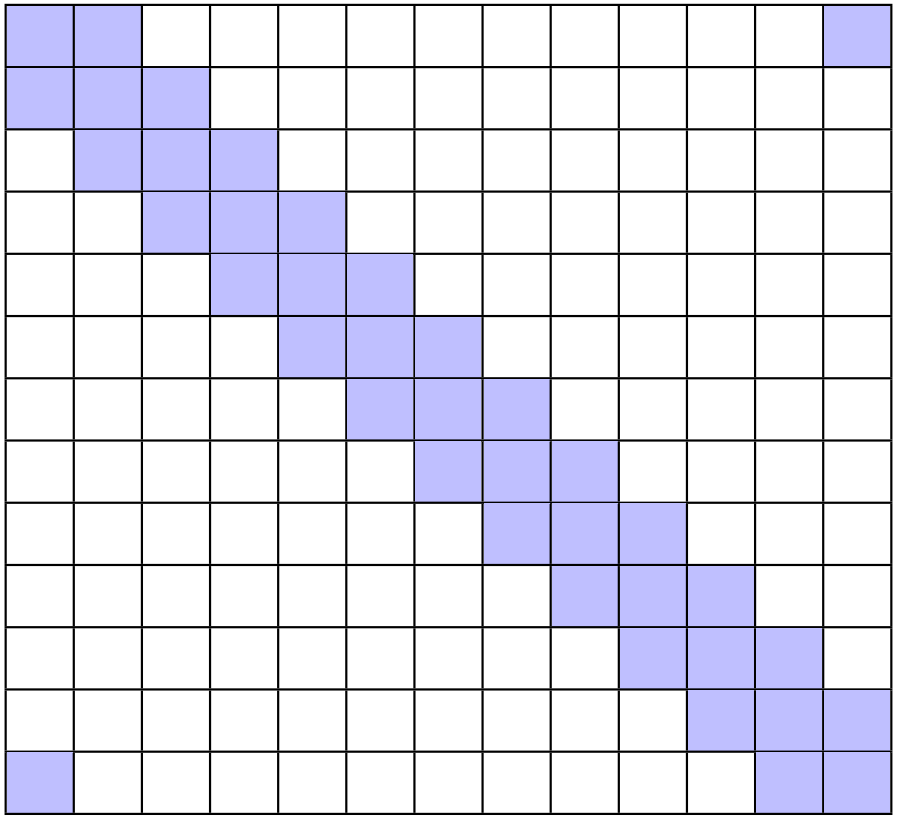
Konstrukcija za $k \equiv 3 \mod 4$ i $n \equiv 1 \mod 4$

Cjelobrojno-strujno pridruživanje κ za Möbiusove ljestve na $4m+1$ stepenica:

$i = 1, \ldots, m$	$\kappa\big((r_{2i-1}, c_{2i})\big) = 8m + 3 - i$
$i = 1, \ldots, m$	$\kappa\big((c_{2i-1}, r_{2i})\big) = 8m + 2 + i$
$i = 1, \ldots, m$	$\kappa\big((r_{2i}, c_{2i+1})\big) = 12m + 3 - i$
$i = 1, \ldots, m$	$\kappa\big((c_{2i}, r_{2i+1})\big) = 4m + 2 + i$
$i = 1, \ldots, m$	$\kappa\big((r_{2m+2i-1}, c_{2m+2i})\big) = 9m + 2 + i$
$i = 1, \ldots, m$	$\kappa\big((c_{2m+2i-1}, r_{2m+2i})\big) = 7m + 3 - i$
$i = 1, \ldots, m$	$\kappa\big((r_{2m+2i}, c_{2m+2i+1})\big) = 5m + 2 + i$
$i = 1, \ldots, m$	$\kappa\big((c_{2m+2i}, r_{2m+2i+1})\big) = 11m + 3 - i$
$i = 1, \ldots, 2m$	$\kappa\big((r_i, c_i)\big) = 4m + 1 - i$
$i = 1, \ldots, 2m-1$	$\kappa\big((r_{2m+i+1}, c_{2m+i+1})\big) = 2m - i$
	$\kappa\big((r_{4m+1}, c_1)\big) = 12m + 3$
	$\kappa\big((r_{4m+1}, c_1)\big) = 12m + 3$
	$\kappa\big((r_{2m+1}, c_{2m+1})\big) = 4m + 1$
	$\kappa\big((r_{4m+1}, c_{4m+1})\big) = 2m$

Konstrukcija za $k \equiv 3 \mod 4$ i $n \equiv 1 \mod 4$

Primjer $H(13;3)$:

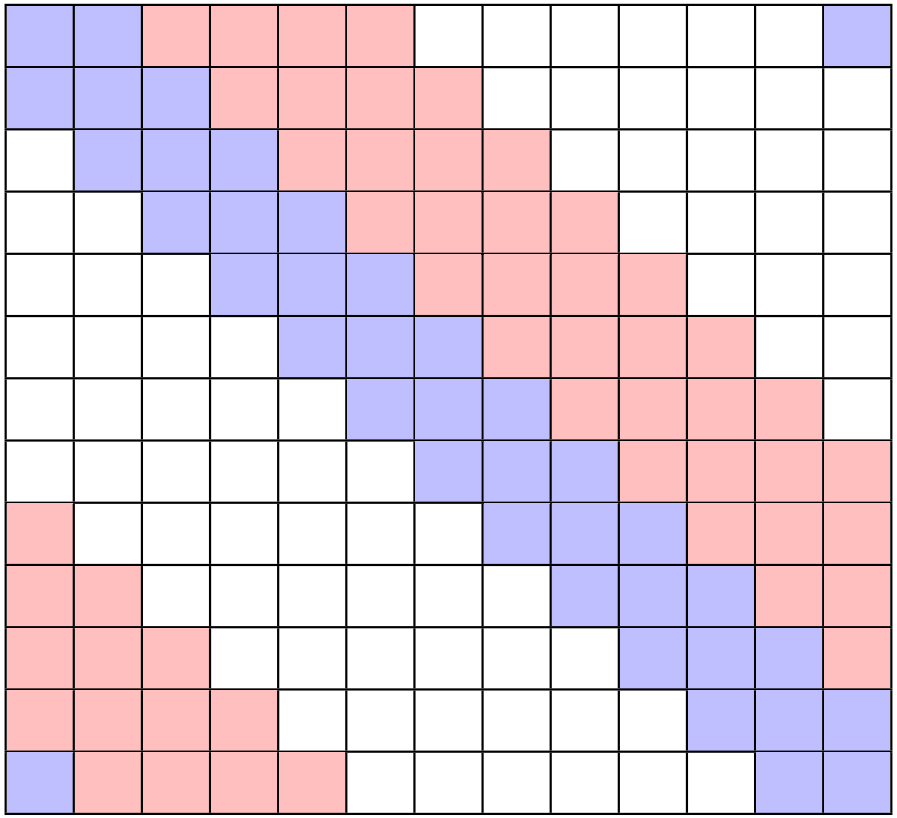


Konstrukcija za $k \equiv 3 \mod 4$ i $n \equiv 1 \mod 4$

- postoji $H(n;3)$
- konstruiramo $H(n;k)$
- moramo još popuniti $k-3$ dijagonala
- ponovno kao i ranije grupiramo u grupacije po četiri uzastopne dijagonale
- grupacije popunjavamo s permutiranim pomičnim nizom J kojeg pomaknemo za $\pm\big(3n+4(j-1)\big)$
- popunjavanjem svih grupacijama na isti način kao ranije dobivamo $H(n;k)$

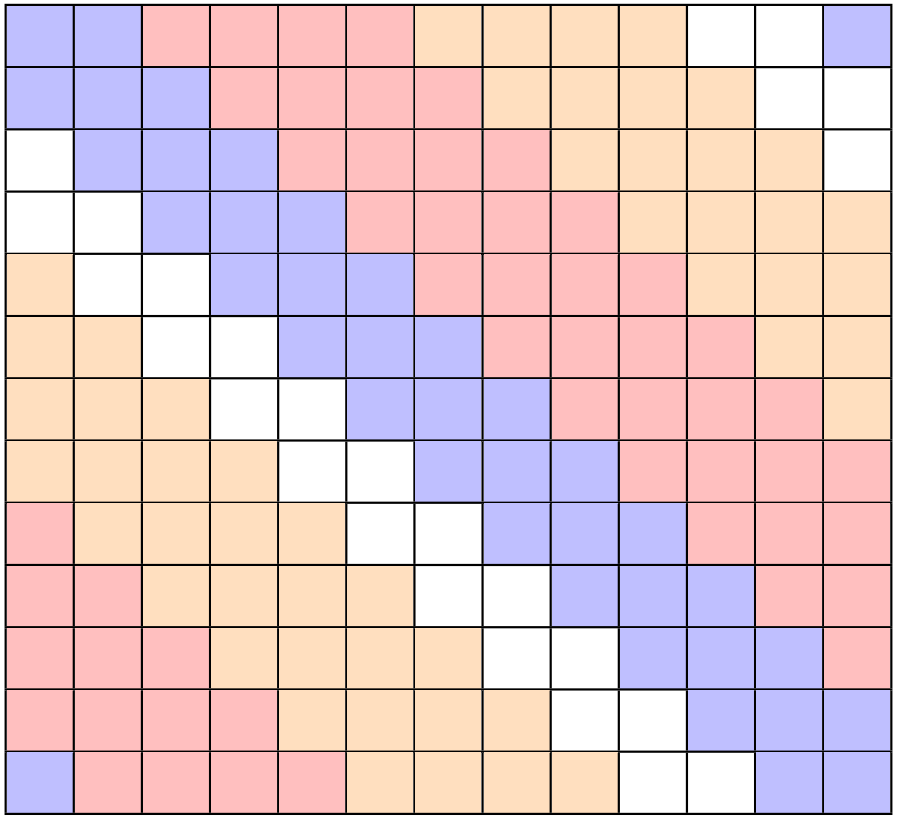
Konstrukcija za $k \equiv 3 \mod 4$ i $n \equiv 1 \mod 4$

Primjer $H(13; 7)$:



Konstrukcija za $k \equiv 3 \mod 4$ i $n \equiv 1 \mod 4$

Primjer $H(13; 11)$:



Konstrukcija za $k \equiv 3 \mod 4$ i $n \equiv 0 \mod 4$

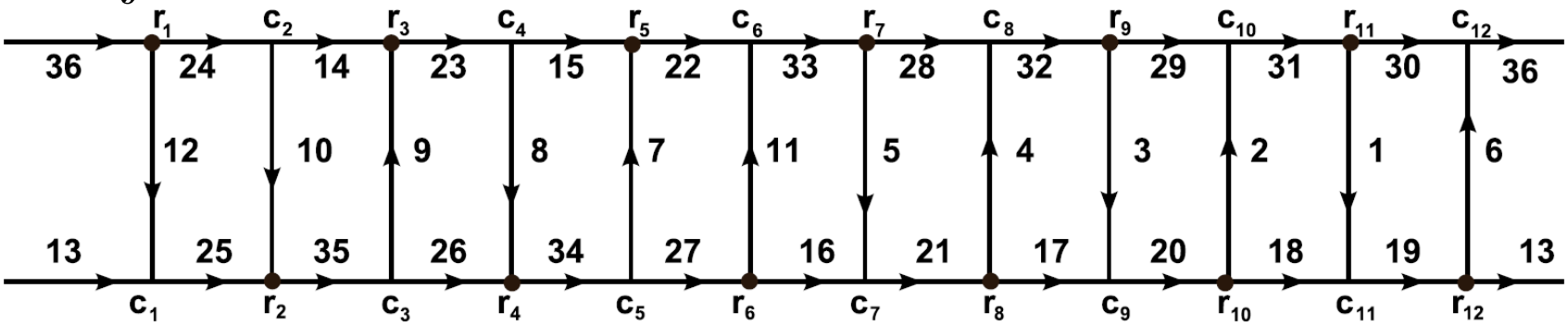
Definicija

Cilindrične ljestve na $4m$ stepenica je bipartitni graf sa skupom vrhova $R \cup C$, gdje je $R = \{r_i \mid i = 1, \ldots, 4m\}$, $C = \{c_i \mid i = 1, \ldots, 4m\}$, i skupom bridova

$$\big\{\{r_i, c_j\} \mid i = 1, \ldots, 4m, j = i-1, i, i+1\big\},$$

gdje se indeksi i i j gledaju kao indeksi iz $\mathbb{Z}_{4m}$.

Primjer za $n = 4m = 12$:



Konstrukcija za $k \equiv 3 \mod 4$ i $n \equiv 0 \mod 4$

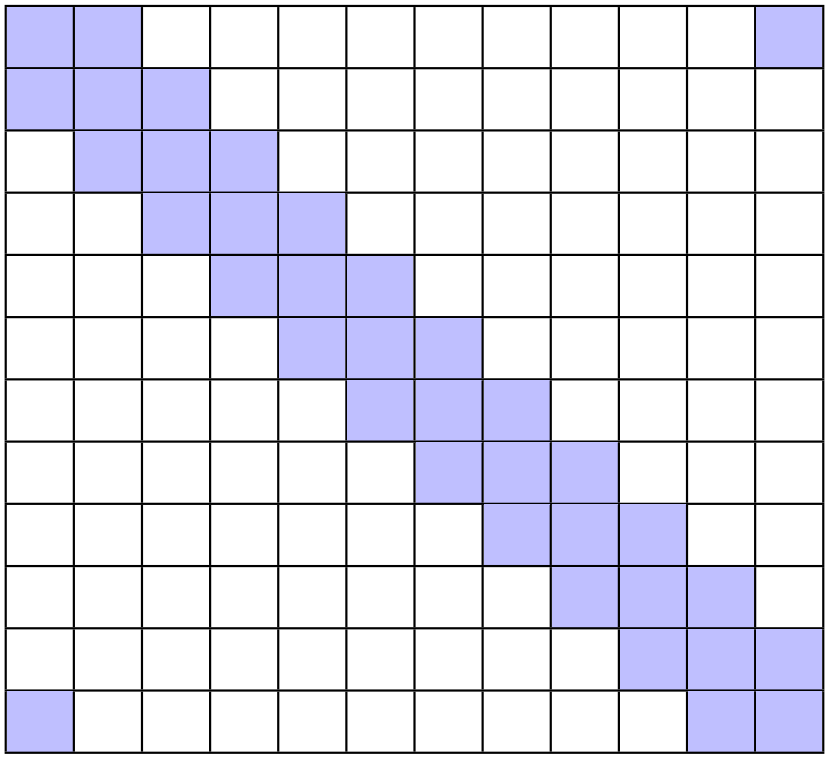
Cjelobrojno-strujno pridruživanje κ za cilindrične ljestve na $4m$ stepenica:

$i = 1, \ldots, m$	$\kappa\big((r_{2i-1}, c_{2i})\big) = 8m + 1 - i$
$i = 1, \ldots, m$	$\kappa\big((c_{2i-1}, r_{2i})\big) = 8m + i$
$i = 1, \ldots, m-1$	$\kappa\big((r_{2i}, c_{2i+1})\big) = 12m - i$
$i = 1, \ldots, m-1$	$\kappa\big((c_{2i}, r_{2i+1})\big) = 4m + 1 + i$
$i = 1, \ldots, m$	$\kappa\big((r_{2m-2+2i}, c_{2m-1+2i})\big) = 5m + i$
$i = 1, \ldots, m$	$\kappa\big((c_{2m-2+2i}, r_{2m-1+2i})\big) = 11m + 1 - i$
$i = 1, \ldots, m$	$\kappa\big((r_{2m-1+2i}, c_{2m+2i})\big) = 9m + i$
$i = 1, \ldots, m$	$\kappa\big((c_{2m-1+2i}, r_{2m+2i})\big) = 7m + 1 - i$
$i = 1, \ldots, 2m-2$	$\kappa\big((r_{i+1}, c_{i+1})\big) = 4m - 1 - i$
$i = 1, \ldots, 2m-1$	$\kappa\big((r_{2m+i}, c_{2m+i})\big) = 2m - i$
	$\kappa\big((r_{4m}, c_1)\big) = 4m + 1$
	$\kappa\big((r_{4m}, c_1)\big) = 4m + 1$
	$\kappa\big((r_1, c_1)\big) = 4m$
	$\kappa\big((r_{2m}, c_{2m})\big) = 4m - 1$
	$\kappa\big((r_{4m}, c_{4m})\big) = 2m$

Konstrukcija za $k \equiv 3 \mod 4$ i $n \equiv 0 \mod 4$

- analogno, znamo da postoji $H(n;3)$
- konstruiramo dalje $H(n;k)$ popunjvanjem po 4 dijagonale

Primjer $H(12;3)$:



Konstrukcija ostalih Heffterovih nizova

- Konstrukcija za $k \equiv 0 \mod 4$ i $n \equiv 0, 3 \mod 4$
  - konstrukcija $H(n; 5)$
  - $H(n; k)$ uz pomoć drugačijeg pomičnog $H(n; 4)$
- necjelobrojni kvadratni Heffterovi nizovi
- što je s pravokutnim Heffterovim nizovima
- generalizacije Heffterovih nizova

Izvori

- Archdeacon, D. S., J. H. Dinitz, D. M. Donovan i Emine Şule Yazı cı: *Square integer Heffter arrays with empty cells.* **Des. Codes Cryptogr., 77(2-3):409–426, 2015, ISSN 0925-1022.** https://doi.org/10.1007/s10623-015-0076-4.
- Archdeacon, Dan: *Heffter arrays and biembedding graphs on surfaces.* **Electron. J. Combin., 22(1):Paper 1.74, 14, 2015.**

Izvori

Cavenagh, Nicholas J., Jeffery H. Dinitz, Diane M. Donovan i Emine Şule Yazici: *The existence of square non-integer Heffter arrays.*
Ars Math. Contemp., 17(2):369–395, 2019, ISSN 1855-3966.
https://doi.org/10.26493/1855-3974.1817.b97.

Dinitz, Jeffrey H. i Ian M. Wanless: *The existence of square integer Heffter arrays.*
Ars Math. Contemp., 13(1):81–93, 2017, ISSN 1855-3966.
https://doi.org/10.26493/1855-3974.1121.fbf.

Hvala na pažnji