Višedimenzionalni simetrični dizajni*

Vedran Krčadinac

Prirodoslovno-matematički fakultet

Sveučilište u Zagrebu

5.12.2024.

* This work was fully supported by the Croatian Science Foundation under the project 9752.

HRZZ projekt “AKKO”

HRZZ Croatian Science Foundation

Algorithmic Constructions of Combinatorial Objects (ACCO)

Grant no. IP-2020-02-9752 supported by the Croatian Science Foundation.

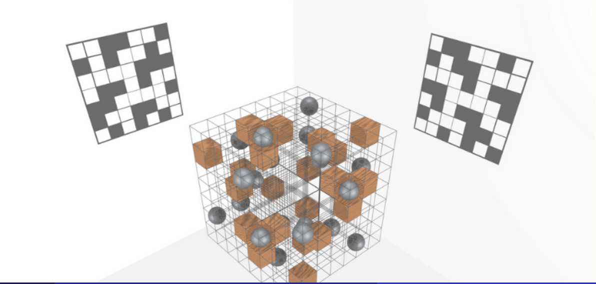
- Home
- Members
- Seminars
- Data & software
- Publications
- Presentations
- Meetings

Algorithmic Constructions of Combinatorial Objects

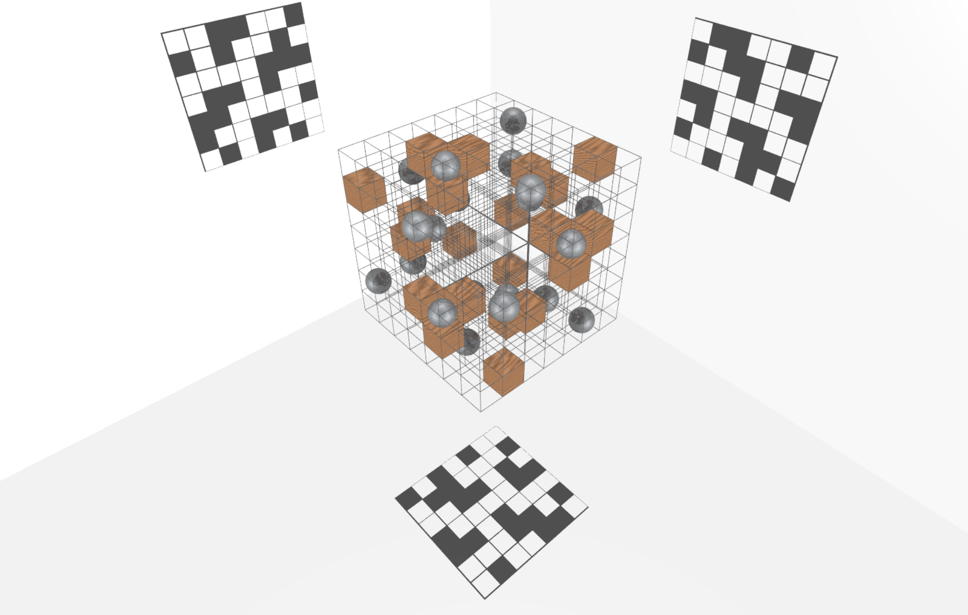
The topic of this research project are constructions of combinatorial objects with additional algebraic structure, such as quasi-symmetric designs, schematic designs, q-analogs of designs, difference sets, (semi)partial geometries, and generalisations. Results in algebraic combinatorics impose restrictions on the parameters and properties of such objects that can be exploited to narrow-down the search space and develop specialised algorithms for their construction and classification.

Research objectives

- Development of algorithmic methods for the construction and classification of combinatorial objects with strong algebraic structure. These methods utilise known algebraic and combinatorial properties of the objects to handle larger parameters and problems that have been out of reach with traditional construction methods.
- Widening of theoretical knowledge about combinatorial objects that are the topic of research. Interesting theorems are often discovered and proved on the basis of available examples. It is expected that the results of the project will lead to such discoveries.
- Development of a software package, implemented in GAP, for the construction and analysis of combinatorial objects.



HRZZ projekt "AKKO"



Što su simetrični dizajni?

Simetrični (v, k, λ) dizajn $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{B})$ sastoji se od skupa točaka $\mathcal{T}$ i familije $\mathcal{B}$ podskupova od $\mathcal{T}$ koje zovemo blokovima, takve da vrijedi

1. $|\mathcal{T}| = |\mathcal{B}| = v$,
2. svaki blok $B \in \mathcal{B}$ je veličine $|B| = k$,
3. za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Što su simetrični dizajni?

Simetrični (v, k, λ) dizajn $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{B})$ sastoji se od skupa točaka $\mathcal{T}$ i familije $\mathcal{B}$ podskupova od $\mathcal{T}$ koje zovemo blokovima, takve da vrijedi

1. $|\mathcal{T}| = |\mathcal{B}| = v$,
2. svaki blok $B \in \mathcal{B}$ je veličine $|B| = k$,
3. za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Pitanje: za koje trojke parametara (v, k, λ) postoje simetrični dizajni?

Što su simetrični dizajni?

Simetrični (v, k, λ) dizajn $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{B})$ sastoji se od skupa točaka $\mathcal{T}$ i familije $\mathcal{B}$ podskupova od $\mathcal{T}$ koje zovemo blokovima, takve da vrijedi

1. $|\mathcal{T}| = |\mathcal{B}| = v$,
2. svaki blok $B \in \mathcal{B}$ je veličine $|B| = k$,
3. za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Pitanje: za koje trojke parametara (v, k, λ) postoje simetrični dizajni?

Propozicija.

Ako postoji simetrični (v, k, λ) dizajn, onda vrijedi $\lambda(v-1) = k(k-1)$.

Što su simetrični dizajni?

Simetrični (v, k, λ) dizajn $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{B})$ sastoji se od skupa točaka $\mathcal{T}$ i familije $\mathcal{B}$ podskupova od $\mathcal{T}$ koje zovemo blokovima, takve da vrijedi

1. $|\mathcal{T}| = |\mathcal{B}| = v$,
2. svaki blok $B \in \mathcal{B}$ je veličine $|B| = k$,
3. za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Pitanje: za koje trojke parametara (v, k, λ) postoje simetrični dizajni?

Propozicija.

Ako postoji simetrični (v, k, λ) dizajn, onda vrijedi $\lambda(v-1) = k(k-1)$.

$(v, k, \lambda) = (q^2 + q + 1, q + 1, 1) \rightsquigarrow$ konačne projektivne ravnine reda q

Što su simetrični dizajni?

Simetrični (v, k, λ) dizajn $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{B})$ sastoji se od skupa točaka $\mathcal{T}$ i familije $\mathcal{B}$ podskupova od $\mathcal{T}$ koje zovemo blokovima, takve da vrijedi

1. $|\mathcal{T}| = |\mathcal{B}| = v$,
2. svaki blok $B \in \mathcal{B}$ je veličine $|B| = k$,
3. za svake dvije točke postoji točno λ blokova koji ih sadrže.

Pitanje: za koje trojke parametara (v, k, λ) postoje simetrični dizajni?

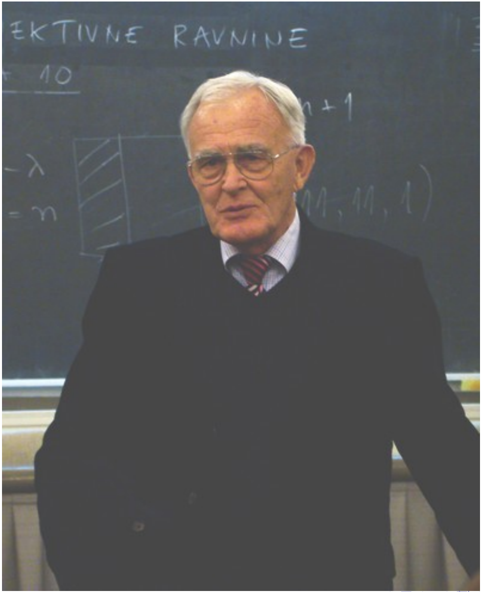
Propozicija.

Ako postoji simetrični (v, k, λ) dizajn, onda vrijedi $\lambda(v-1) = k(k-1)$.

$(v, k, \lambda) = (q^2 + q + 1, q + 1, 1) \rightsquigarrow$ konačne projektivne ravnine reda q

$(v, k, \lambda) = (4m - 1, 2m - 1, m) \rightsquigarrow$ Hadamardovi dizajni reda m

Prof. Zvonimir Janko (1932.-2022.)



Konstrukcije simetričnih dizajna

Z. Janko, T. V. Tran, *The existence of a symmetric block design for* $(70, 24, 8)$, Mitt. Math. Sem. Giessen No. **165** (1984), 17–18.

Z. Janko, T. V. Tran, *Construction of two symmetric block designs for* $(71, 21, 6)$, Discrete Math. **55** (1985), no. 3, 327–328.

Z. Janko, T. V. Tran, *Construction of a new symmetric block design for* $(78, 22, 6)$ *with the help of tactical decompositions*, J. Combin. Theory Ser. A, **40** (1985), 451–455.

Z. Janko, *The existence of symmetric designs with parameters* $(189, 48, 12)$, J. Combin. Theory Ser. A **80** (1997), no. 2, 334–338.

Z. Janko, *The existence of symmetric designs with parameters* $(105, 40, 15)$, J. Combin. Des. **7** (1999), no. 1, 17–19.

Klasifikacije "jako tranzitivnih" simetričnih dizajna

W. M. Kantor, *Classification of* 2*-transitive symmetric designs*, Graphs Combin. **1** (1985), no. 2, 165–166.

U. Dempwolff, *Primitive rank* 3 *groups on symmetric designs*, Des. Codes Cryptogr. **22** (2001), no. 2, 191–207.

C. E. Praeger, S. Zhou, *Imprimitive flag-transitive symmetric designs*, J. Combin. Theory Ser. A **113** (2006), no. 7, 1381–1395.

Z. Zhang, P. Yuan, S. Zhou, *Flag-transitive point-primitive symmetric* (v, k, λ) *designs with bounded* k, Electron. J. Combin. **27** (2020), no. 4, članak 4.40, 20 str.

A. Montinaro, *On the symmetric* 2-(v, k, λ) *designs with a flag-transitive point-imprimitive automorphism group*, J. Algebra **653** (2024), 54–101.

Simetrični dizajni u Splitu

Slika: gradonačelnik.hr

Simetrični dizajni u Splitu

A. Golemac, *Problem egzistencije nekih simetričnih dizajna kvadratnog reda*, disertacija, 1990.

T. Vučičić, *Neke konstrukcije i klasifikacije* $(100, 45, 20)$ *simetričnih nacrta*, disertacija, 1999.

S. Braić, *Simetrični dizajni s primitivnim grupama automorfizama*, disertacija, 2007.

A. Šubašić, *Dizajni tranzitivni po incidencijama*, disertacija, 2017.

Simetrični dizajni u Splitu

A. Golemac, *Construction of new symmetric designs with parameters* $(70, 24, 8)$, Discrete Math. **120** (1993), no. 1–3, 51–58.

A. Golemac, T. Vučičić, *New difference sets in nonabelian groups of order* 100, J. Combin. Des. **9** (2001), no. 6, 424–434.

A. Golemac, T. Vučičić, J. Mandić, *One* $(96, 20, 4)$*-symmetric design and related nonabelian difference sets*, Des. Codes Cryptogr. **37** (2005), no. 1, 5–13.

A. Golemac, J. Mandić, T. Vučičić, *On the existence of difference sets in groups of order* 96, Discrete Math. **307** (2007), no. 1, 54–68.

S. Braić, A. Golemac, J. Mandić, T. Vučičić, *Primitive symmetric designs with up to* 2500 *points*, J. Combin. Des. **19** (2011), no. 6, 463–474.

J. Mandić, A. Šubašić, *Flag-transitive and point-imprimitive symmetric designs with* $\lambda \leq 10$, J. Combin. Theory Ser. A **189** (2022), 105620, 21 str.

Što su višedimenzionalni simetrični dizajni?

Simetrični (v, k, λ) dizajn možemo reprezentirati incidencijskom matricom. To je $v \times v$ matrica A s unosima iz $\{0, 1\}$ takva da vrijedi

$$A\,A^t = (k - \lambda)I + \lambda J$$

Što su višedimenzionalni simetrični dizajni?

Simetrični (v, k, λ) dizajn možemo reprezentirati incidencijskom matricom. To je $v \times v$ matrica A s unosima iz $\{0, 1\}$ takva da vrijedi

$$A\,A^t = (k - \lambda)I + \lambda J$$

Funkciju $A : \{1, \ldots, v\}^n \to \{0, 1\}$, tj. n-dimenzionalnu $v \times \cdots \times v$ matricu takvu da su joj sve 2-dimenzionalne "šnite" / "fete" incidencijske matrice simetričnih (v, k, λ) dizajna zovemo n-dimenzionalnom kockom simetričnih (v, k, λ) dizajna. Skup svih takvih kocaka označavamo $\mathcal{C}^n(v, k, \lambda)$.

Što su višedimenzionalni simetrični dizajni?

Simetrični (v, k, λ) dizajn možemo reprezentirati incidencijskom matricom. To je $v \times v$ matrica A s unosima iz $\{0, 1\}$ takva da vrijedi

$$A\,A^t = (k - \lambda)I + \lambda J$$

Funkciju $A : \{1, \ldots, v\}^n \to \{0, 1\}$, tj. n-dimenzionalnu $v \times \cdots \times v$ matricu takvu da su joj sve 2-dimenzionalne "šnite" / "fete" incidencijske matrice simetričnih (v, k, λ) dizajna zovemo n-dimenzionalnom kockom simetričnih (v, k, λ) dizajna. Skup svih takvih kocaka označavamo $\mathcal{C}^n(v, k, \lambda)$.

V. Krčadinac, M. O. Pavčević, K. Tabak, *Cubes of symmetric designs*, Ars Math. Contemp. (2024). https://doi.org/10.26493/1855-3974.3222.e53

Što su višedimenzionalni simetrični dizajni?

Simetrični (v, k, λ) dizajn možemo reprezentirati incidencijskom matricom. To je $v \times v$ matrica A s unosima iz $\{0, 1\}$ takva da vrijedi

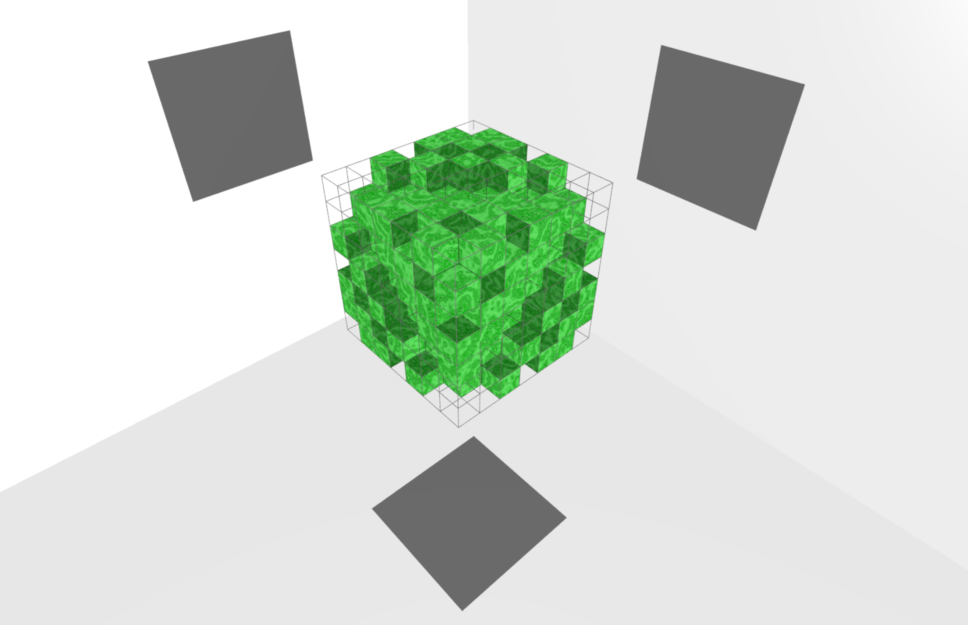
$$A\,A^t = (k - \lambda)I + \lambda J$$

Funkciju $A : \{1, \ldots, v\}^n \to \{0, 1\}$, tj. n-dimenzionalnu $v \times \cdots \times v$ matricu takvu da su joj sve 2-dimenzionalne "šnite" / "fete" incidencijske matrice simetričnih (v, k, λ) dizajna zovemo n-dimenzionalnom kockom simetričnih (v, k, λ) dizajna. Skup svih takvih kocaka označavamo $\mathcal{C}^n(v, k, \lambda)$.

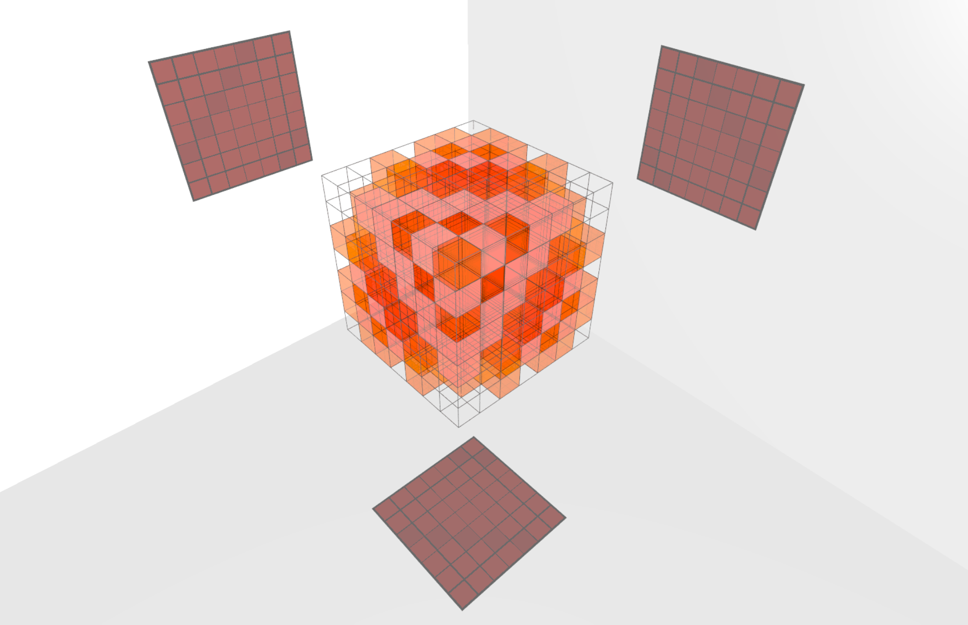
V. Krčadinac, M. O. Pavčević, K. Tabak, *Cubes of symmetric designs*, Ars Math. Contemp. (2024). https://doi.org/10.26493/1855-3974.3222.e53

W. de Launey, *On the construction of n-dimensional designs from 2-dimensional designs*, Australas. J. Combin. **1** (1990), 67–81.

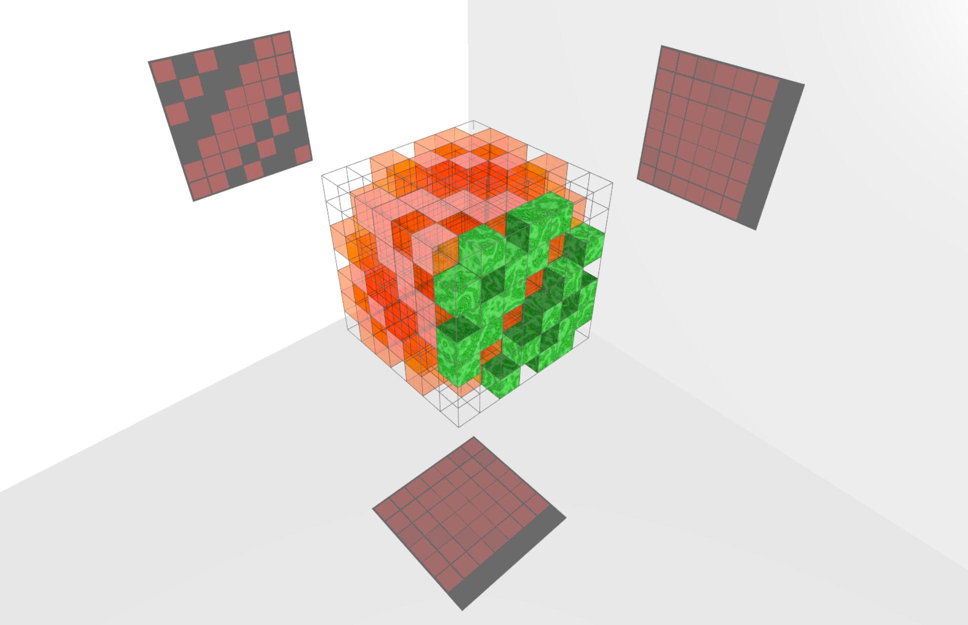
3-kocka $(7,3,1)$ dizajna ("Fanova kocka")



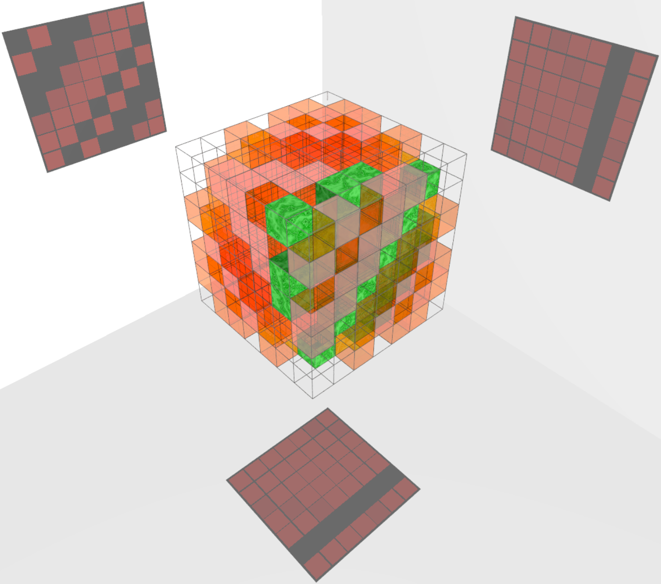
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



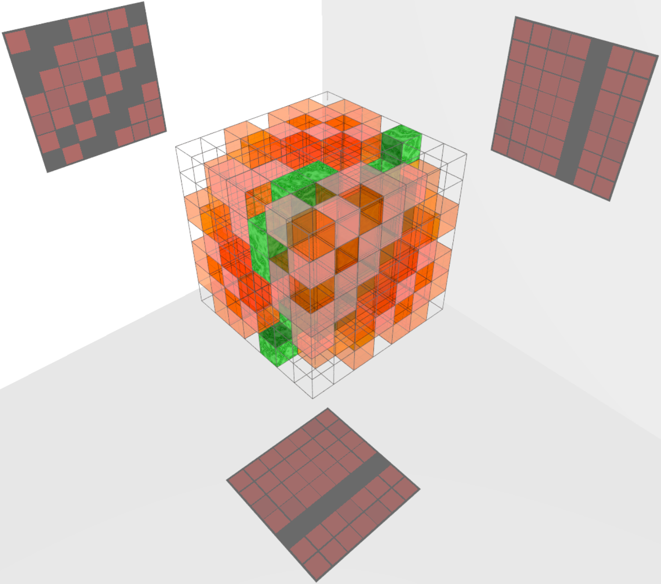
3-kocka $(7,3,1)$ dizajna ("Fanova kocka")



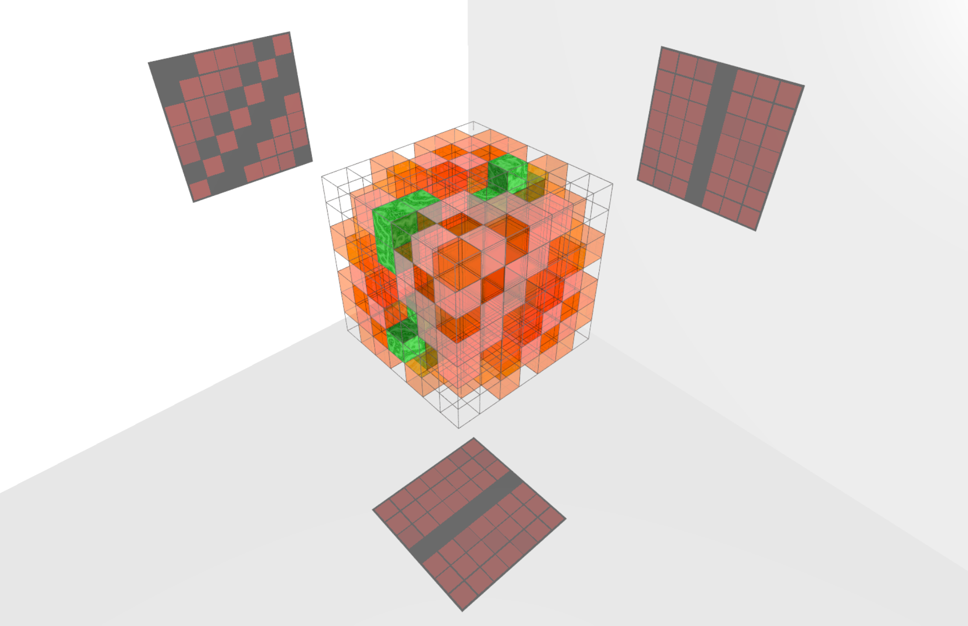
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



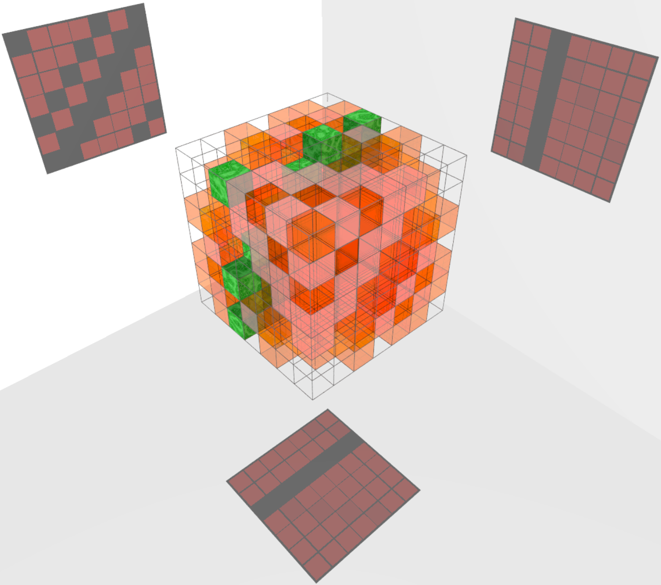
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



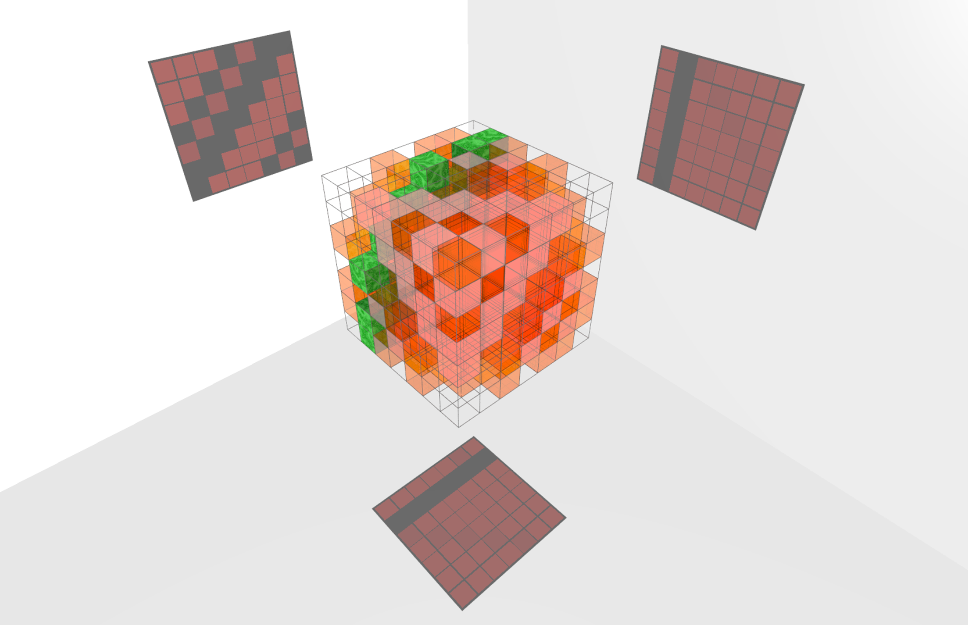
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



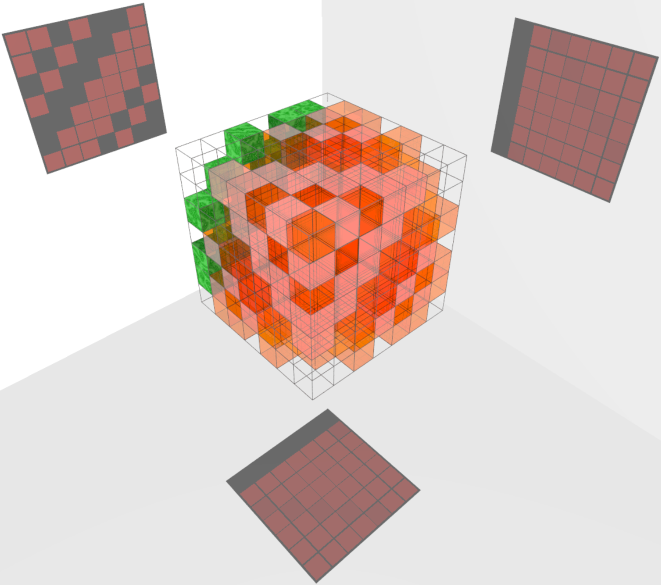
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



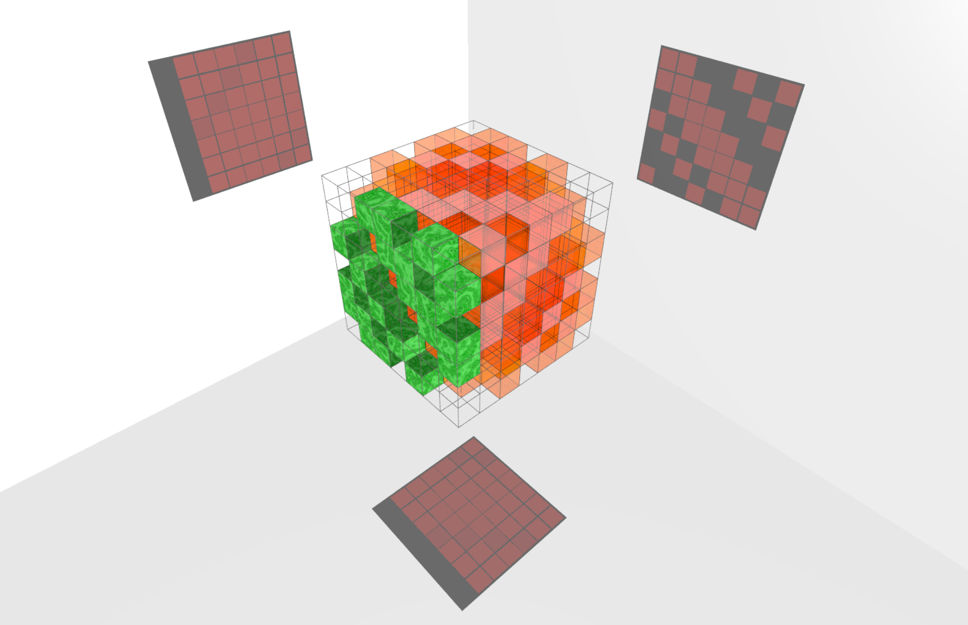
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



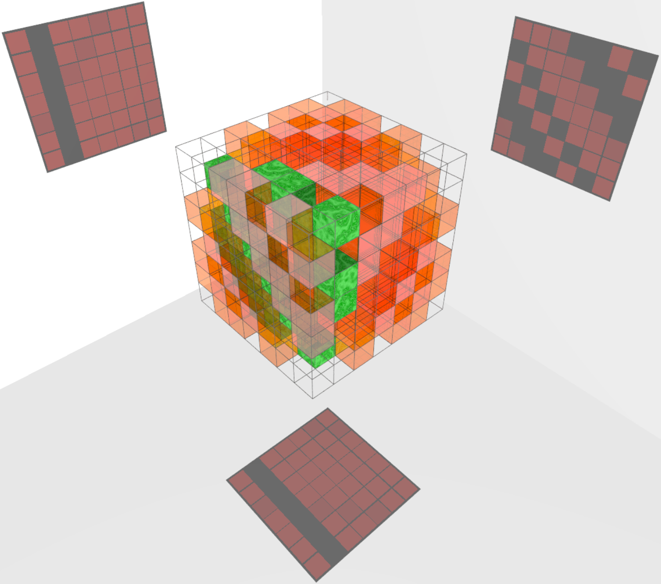
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



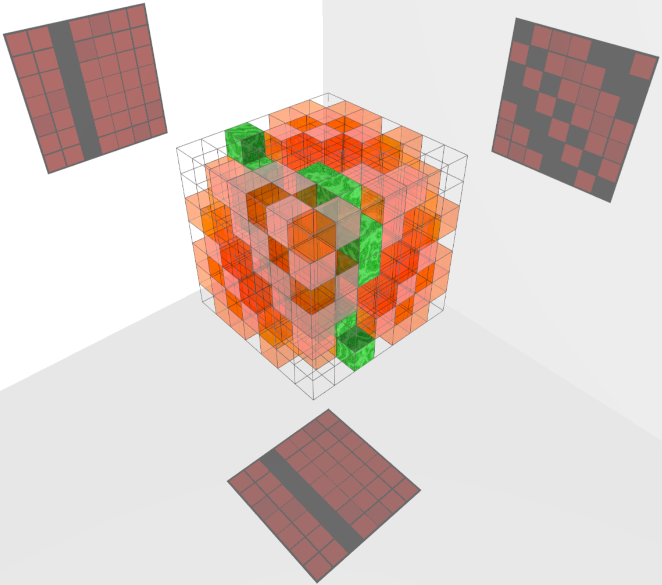
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



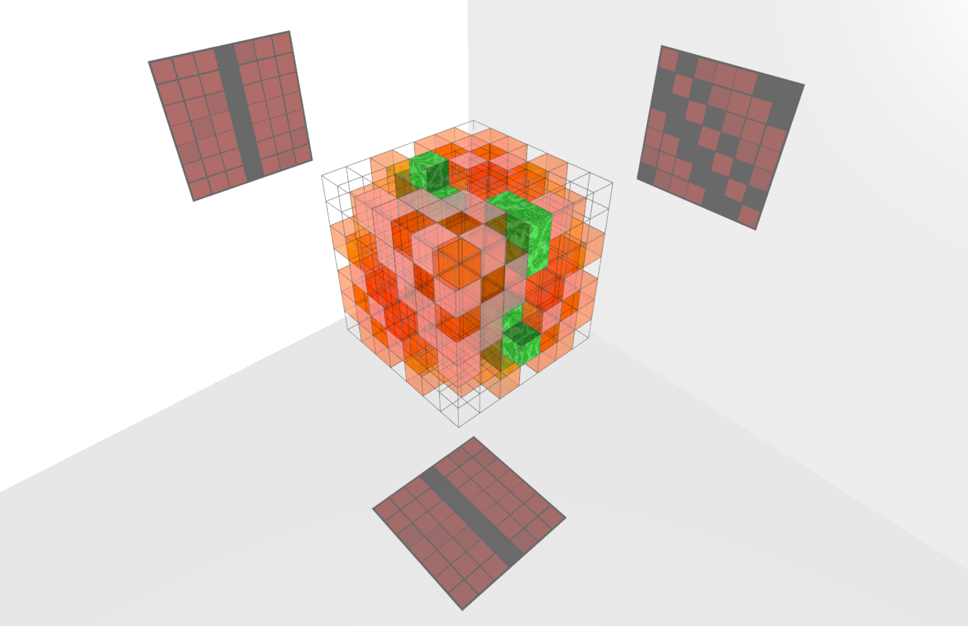
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



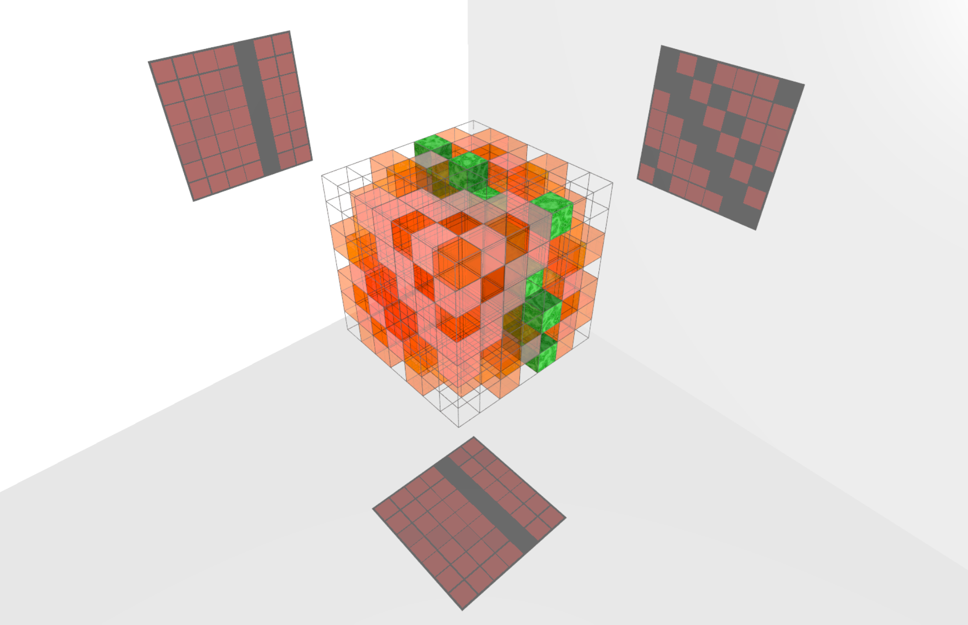
3-kocka $(7,3,1)$ dizajna ("Fanova kocka")



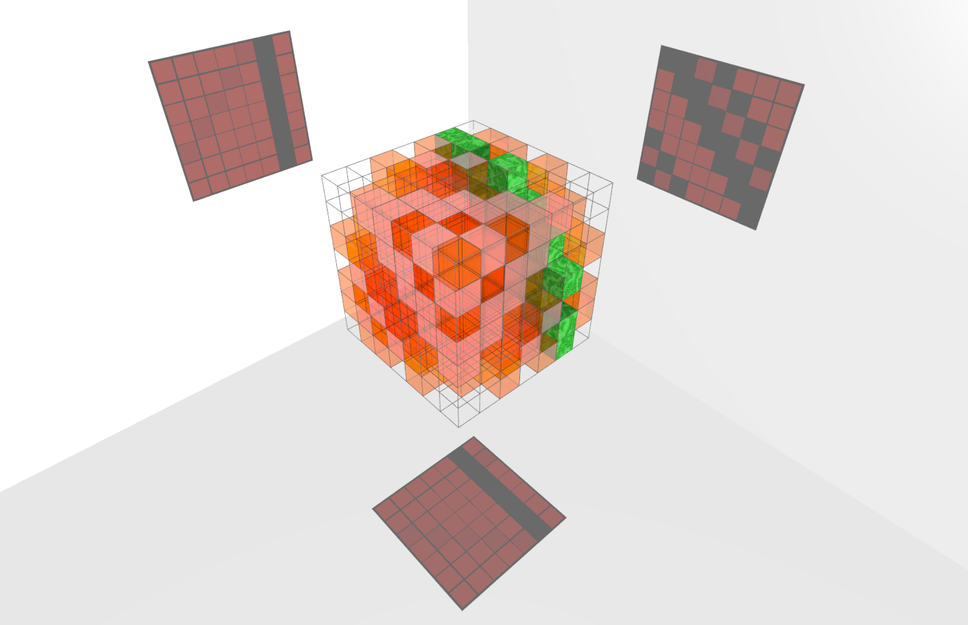
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



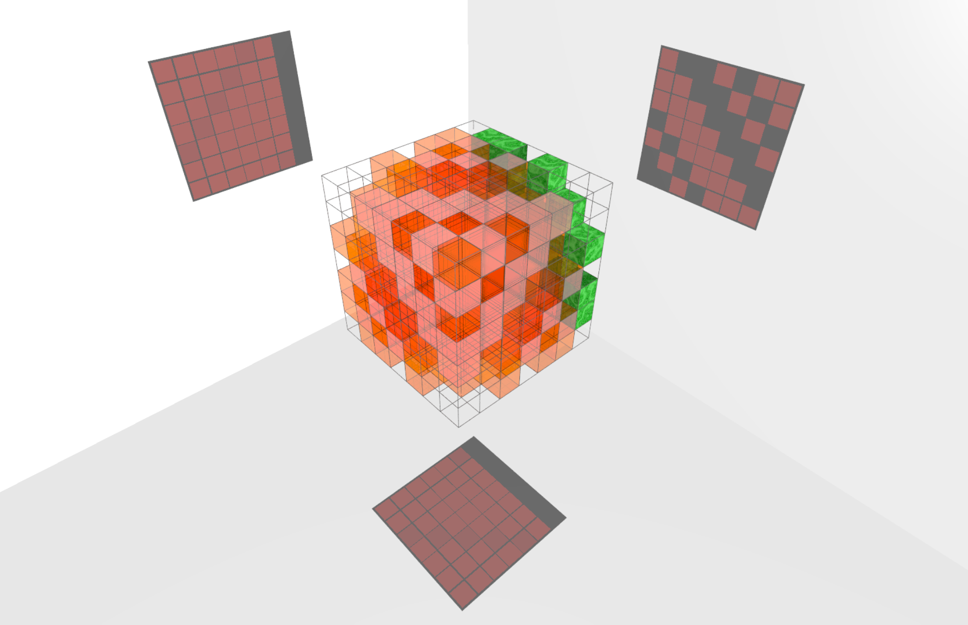
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



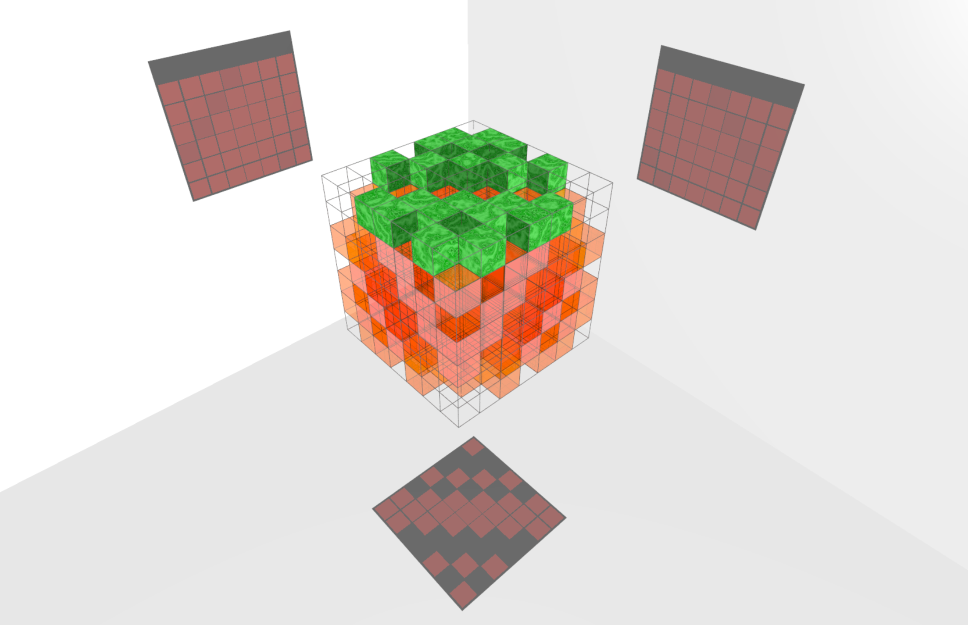
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



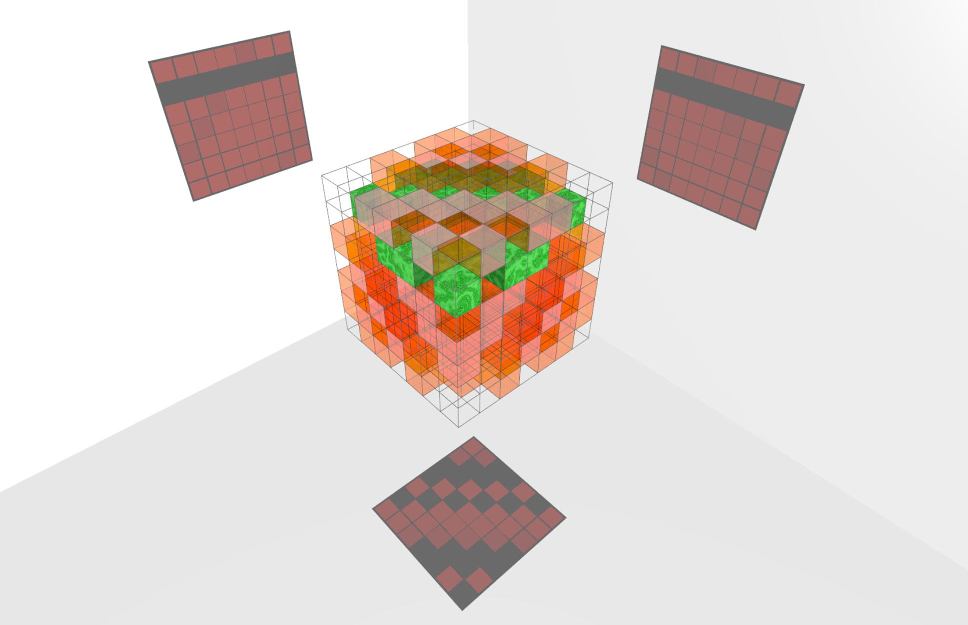
3-kocka $(7,3,1)$ dizajna ("Fanova kocka")



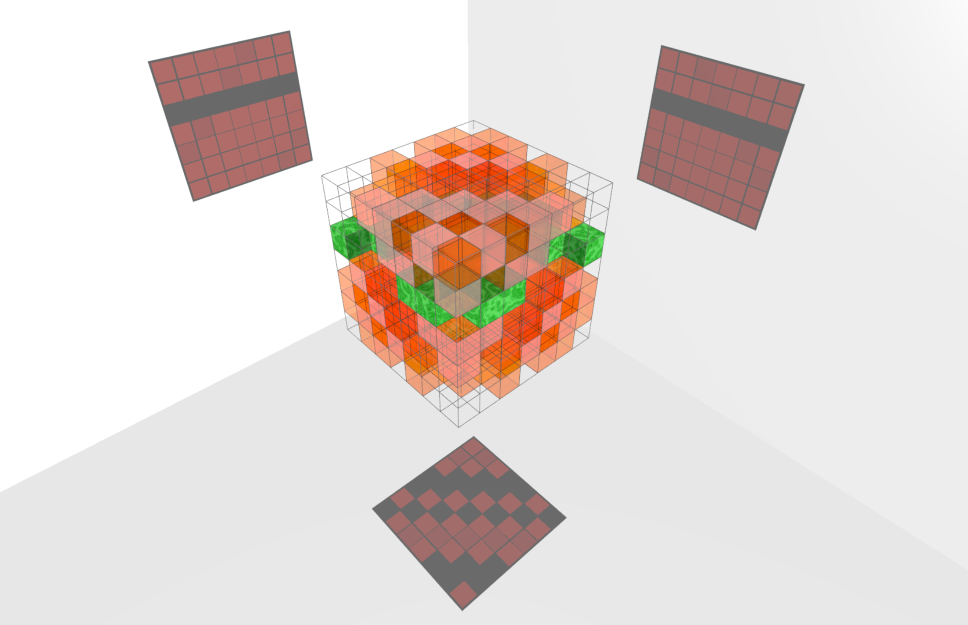
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna (“Fanova kocka”)



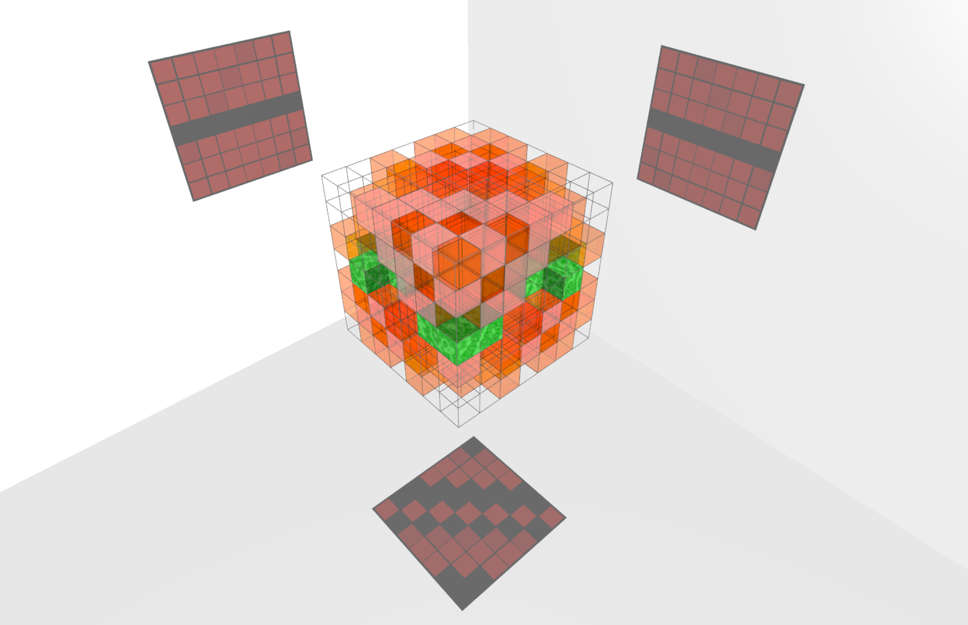
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



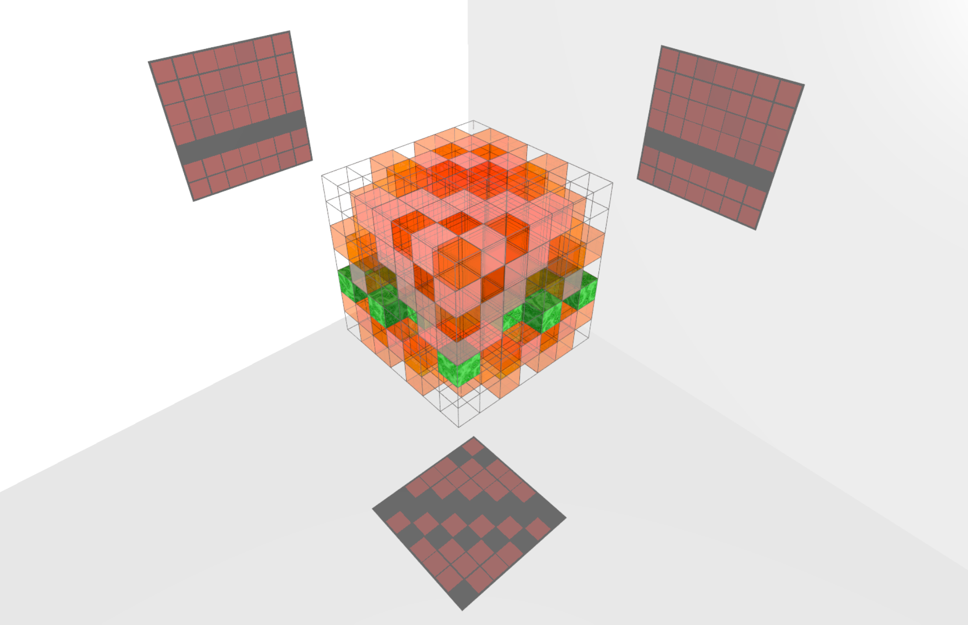
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



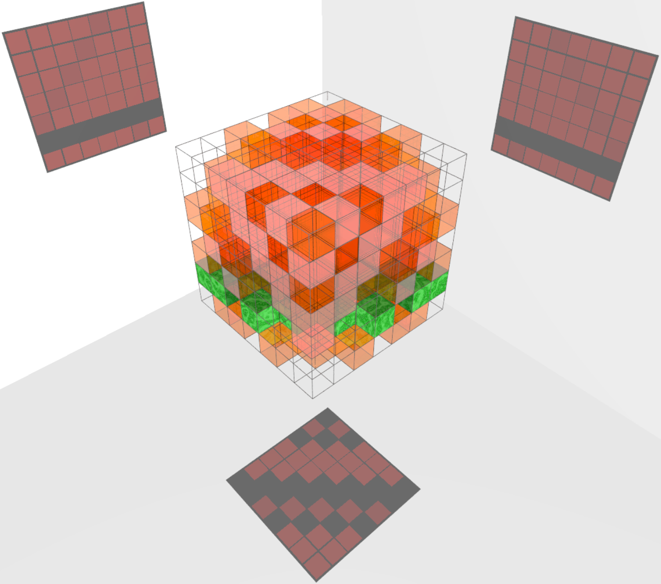
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



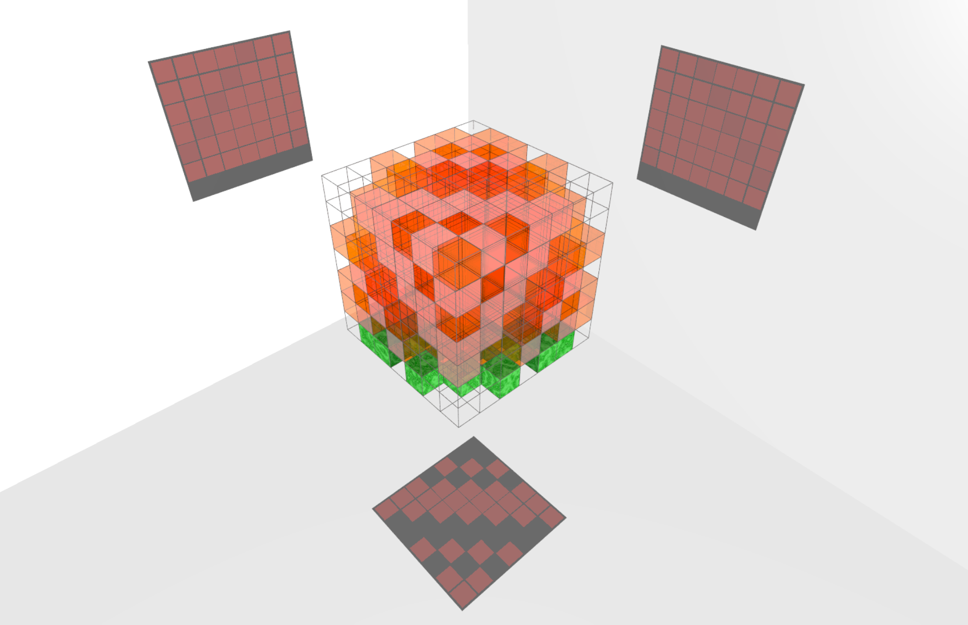
3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna ("Fanova kocka")



3-kocka $(7,3,1)$ dizajna ("Fanova kocka")



Diferencijski skupovi

Neka je G aditivno zapisana grupa reda v. Za podskup $D \subseteq G$ kažemo da je diferencijski (v, k, λ) skup ako je D veličine k i ako razlike $x - y$, $x, y \in D$ pokrivaju $G \setminus \{0\}$ točno λ puta.

Diferencijski skupovi

Neka je G aditivno zapisana grupa reda v. Za podskup $D \subseteq G$ kažemo da je diferencijski (v, k, λ) skup ako je D veličine k i ako razlike $x - y$, $x, y \in D$ pokrivaju $G \setminus \{0\}$ točno λ puta.

Primjer: $D = \{0, 1, 3\}$ je $(7, 3, 1)$ dif. skup u grupi $\mathbb{Z}_7 = \{0, \ldots, 6\}$

Diferencijski skupovi

Neka je G aditivno zapisana grupa reda v. Za podskup $D \subseteq G$ kažemo da je diferencijski (v, k, λ) skup ako je D veličine k i ako razlike $x - y$, $x, y \in D$ pokrivaju $G \setminus \{0\}$ točno λ puta.

Primjer: $D = \{0, 1, 3\}$ je $(7, 3, 1)$ dif. skup u grupi $\mathbb{Z}_7 = \{0, \ldots, 6\}$

Propozicija.

Razvoj diferencijskog (v, k, λ) skupa $\mathrm{dev}\, D = \{D + g \mid g \in G\}$ je familija blokova simetričnog (v, k, λ) dizajna.

Diferencijski skupovi

Neka je G aditivno zapisana grupa reda v. Za podskup $D \subseteq G$ kažemo da je diferencijski (v, k, λ) skup ako je D veličine k i ako razlike $x - y$, $x, y \in D$ pokrivaju $G \setminus \{0\}$ točno λ puta.

Primjer: $D = \{0, 1, 3\}$ je $(7, 3, 1)$ dif. skup u grupi $\mathbb{Z}_7 = \{0, \ldots, 6\}$

Propozicija.

Razvoj diferencijskog (v, k, λ) skupa $\operatorname{dev} D = \{D + g \mid g \in G\}$ je familija blokova simetričnog (v, k, λ) dizajna.

Propozicija.

Simetrični dizajn može se konstruirati s pomoću diferencijskog skupa u grupi G ako i samo ako ima grupu automorfizama izomorfnu s G koja djeluje strogo tranzitivno na točkama i blokovima.

Kocke simetričnih dizajna

Teorem ("Diferencijske kocke").

Ako je D diferencijski (v, k, λ) skup u grupi $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$, onda je

$$A(i_1, \ldots, i_n) = [\, g_{i_1} + \ldots + g_{i_n} \in D \,]$$

n-dimenzionalna kocka simetričnih (v, k, λ) dizajna.

Kocke simetričnih dizajna

Teorem ("Diferencijske kocke").

Ako je D diferencijski (v, k, λ) skup u grupi $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$, onda je

$$A(i_1, \ldots, i_n) = [\, g_{i_1} + \ldots + g_{i_n} \in D \,]$$

n-dimenzionalna kocka simetričnih (v, k, λ) dizajna.

J. Hammer, J. Seberry, *Higher-dimensional orthogonal designs and Hadamard matrices. II*, Proceedings of the Ninth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing, Utilitas Math., 1980, pp. 23–29.

W. de Launey, *On the construction of n-dimensional designs from 2-dimensional designs*, Australas. J. Combin. **1** (1990), 67–81.

V. Krčadinac, M. O. Pavčević, K. Tabak, *Cubes of symmetric designs*, Ars Math. Contemp. (2024).

Kocke simetričnih dizajna

Teorem ("Diferencijske kocke").

Ako je D diferencijski (v, k, λ) skup u grupi $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$, onda je

$$A(i_1, \ldots, i_n) = [\, g_{i_1} + \ldots + g_{i_n} \in D \,]$$

n-dimenzionalna kocka simetričnih (v, k, λ) dizajna.

Pitanja:

1. Postoje li kocke simetričnih dizajna koje ne nastaju na taj način, tj. nisu ekvivalentne diferencijskim kockama ("nediferencijske kocke")?

Kocke simetričnih dizajna

Teorem ("Diferencijske kocke").

Ako je D diferencijski (v, k, λ) skup u grupi $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$, onda je

$$A(i_1, \ldots, i_n) = [\, g_{i_1} + \ldots + g_{i_n} \in D\,]$$

n-dimenzionalna kocka simetričnih (v, k, λ) dizajna.

Pitanja:

1. Postoje li kocke simetričnih dizajna koje ne nastaju na taj način, tj. nisu ekvivalentne diferencijskim kockama ("nediferencijske kocke")?
2. Postoje li kocke simetričnih dizajna kojima su "fete" incidencijske matrice neizomorfnih simetričnih dizajna?

Kocke simetričnih dizajna

Teorem ("Grupovne kocke")

Ako je $\{D_1, \ldots, D_v\}$ familija diferencijskih (v, k, λ) skupova u grupi $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$ koja čini blokove (v, k, λ) dizajna, onda je

$$A(i_1, \ldots, i_n) = [\, g_{i_2} + \ldots + g_{i_n} \in D_{i_1} \,]$$

n-dimenzionalna kocka simetričnih (v, k, λ) dizajna.

Kocke simetričnih dizajna

Teorem ("Grupovne kocke")

Ako je $\{D_1, \ldots, D_v\}$ familija diferencijskih (v, k, λ) skupova u grupi $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$ koja čini blokove (v, k, λ) dizajna, onda je

$$A(i_1, \ldots, i_n) = [\, g_{i_2} + \ldots + g_{i_n} \in D_{i_1} \,]$$

n-dimenzionalna kocka simetričnih (v, k, λ) dizajna.

Uobičajeno: $D_i = D + g_i$, tj. familija je razvoj diferencijskog skupa D

Kocke simetričnih dizajna

Teorem ("Grupovne kocke")

Ako je $\{D_1, \ldots, D_v\}$ familija diferencijskih (v, k, λ) skupova u grupi $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$ koja čini blokove (v, k, λ) dizajna, onda je

$$A(i_1, \ldots, i_n) = [\, g_{i_2} + \ldots + g_{i_n} \in D_{i_1} \,]$$

n-dimenzionalna kocka simetričnih (v, k, λ) dizajna.

Uobičajeno: $D_i = D + g_i$, tj. familija je razvoj diferencijskog skupa D

$D = \{0, 1, 4, 14, 16\} \subseteq \mathbb{Z}_{21}$

$D_i = D + i,\ i = 0, \ldots, 20$

Kocke simetričnih dizajna

Teorem ("Grupovne kocke")

Ako je $\{D_1, \ldots, D_v\}$ familija diferencijskih (v, k, λ) skupova u grupi $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$ koja čini blokove (v, k, λ) dizajna, onda je

$$A(i_1, \ldots, i_n) = [\, g_{i_2} + \ldots + g_{i_n} \in D_{i_1} \,]$$

n-dimenzionalna kocka simetričnih (v, k, λ) dizajna.

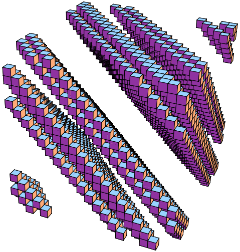
Uobičajeno: $D_i = D + g_i$, tj. familija je razvoj diferencijskog skupa D

$D = \{0, 1, 4, 14, 16\} \subseteq \mathbb{Z}_{21}$

$D_i = D + i,\ i = 0, \ldots, 20$

3-kocka $(21, 5, 1)$ dizajna

(projektivnih ravnina reda 4)



Kocke simetričnih dizajna

Teorem ("Grupovne kocke")

Ako je $\{D_1, \ldots, D_v\}$ familija diferencijskih (v, k, λ) skupova u grupi $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$ koja čini blokove (v, k, λ) dizajna, onda je

$$A(i_1, \ldots, i_n) = [\, g_{i_2} + \ldots + g_{i_n} \in D_{i_1} \,]$$

n-dimenzionalna kocka simetričnih (v, k, λ) dizajna.

$$G = \langle a, b \mid a^3 = b^7 = 1,\ ba = ab^2 \rangle$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{1, a, b, b^3, a^2b^2\}\\
D_2 &= \{a^2b^6, b^6, a^2b^3, a^2b^4, a\}\\
D_3 &= \{1, a^2, ab, b^2, b^6\}\\
&\ \ \vdots\\
D_{21} &= \{a^2b^2, ab^3, ab^5, b^6, ab^6\}
\end{aligned}$$

Kocke simetričnih dizajna

Teorem ("Grupovne kocke")

Ako je $\{D_1, \ldots, D_v\}$ familija diferencijskih (v, k, λ) skupova u grupi $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$ koja čini blokove (v, k, λ) dizajna, onda je

$$A(i_1, \ldots, i_n) = [\, g_{i_2} + \ldots + g_{i_n} \in D_{i_1} \,]$$

n-dimenzionalna kocka simetričnih (v, k, λ) dizajna.

$$G = \langle a, b \mid a^3 = b^7 = 1,\ ba = ab^2 \rangle$$

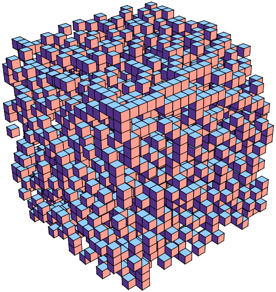
$$D_1 = \{1, a, b, b^3, a^2 b^2\}$$

$$D_2 = \{a^2 b^6, b^6, a^2 b^3, a^2 b^4, a\}$$

$$D_3 = \{1, a^2, ab, b^2, b^6\}$$

$$\vdots$$

$$D_{21} = \{a^2 b^2, ab^3, ab^5, b^6, ab^6\}$$



Kocke simetričnih dizajna

Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} - 1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

Kocke simetričnih dizajna

Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m-1),\ 2^{m-1}(2^{m-1}-1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

Primjer: $m = 2$, $(16, 6, 2)$

Kocke simetričnih dizajna

Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} - 1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

Primjer: $m = 2$, $(16, 6, 2)$

Postoji tri dizajna s tim parametrima:

$$|\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_1)| = 11520, \quad |\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_2)| = 768, \quad |\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_3)| = 384$$

Kocke simetričnih dizajna

Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} - 1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

Primjer: $m = 2$, $(16, 6, 2)$

Postoji tri dizajna s tim parametrima:

$$|\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_1)| = 11520, \quad |\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_2)| = 768, \quad |\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_3)| = 384$$

Crveni dizajn, Zeleni dizajn, Plavi dizajn

Kocke simetričnih dizajna

Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} - 1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

$G = \mathbb{Z}_2^4$: $\quad \mathcal{D}_1 = \{D_1, \ldots, D_{16}\}$

Kocke simetričnih dizajna

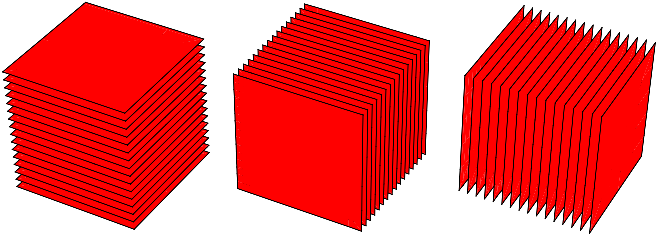
Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} - 1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

$G = \mathbb{Z}_2^4$: $\quad \mathcal{D}_1 = \{D_1, \ldots, D_{16}\}$



Kocke simetričnih dizajna

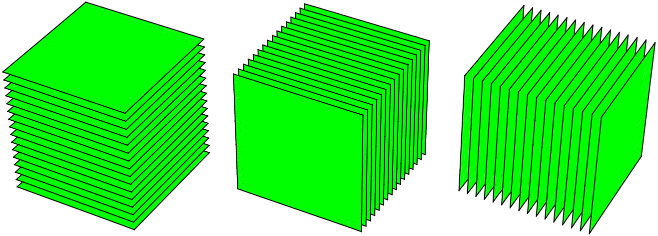
Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} - 1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$: $\quad \mathcal{D}_2 = \{D_1, \ldots, D_{16}\}$



Kocke simetričnih dizajna

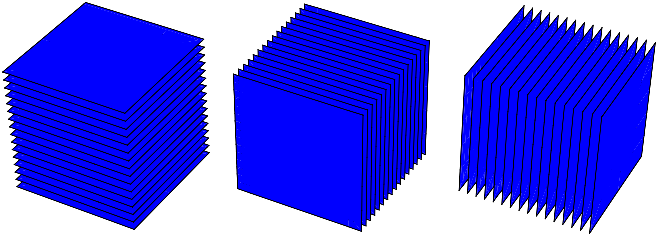
Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} - 1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

$G = \mathbb{Z}_2 \times Q_8$: $\quad \mathcal{D}_3 = \{D_1, \ldots, D_{16}\}$



Kocke simetričnih dizajna

Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} - 1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

$G = \mathbb{Z}_2^4$: $\quad \mathcal{D}_2 = \{D_1, \ldots, D_{16}\}$

Kocke simetričnih dizajna

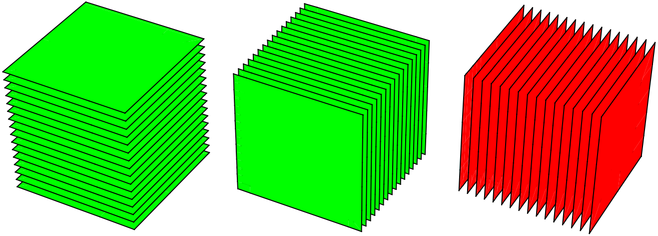
Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} - 1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

$G = \mathbb{Z}_2^4$: $\quad \mathcal{D}_2 = \{D_1, \ldots, D_{16}\}$



Kocke simetričnih dizajna

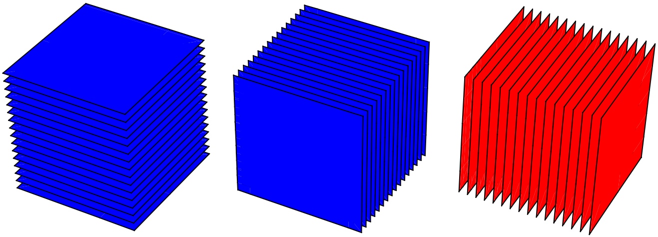
Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} - 1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

$G = \mathbb{Z}_2^4$: $\quad \mathcal{D}_3 = \{D_1, \ldots, D_{16}\}$



Kocke simetričnih dizajna

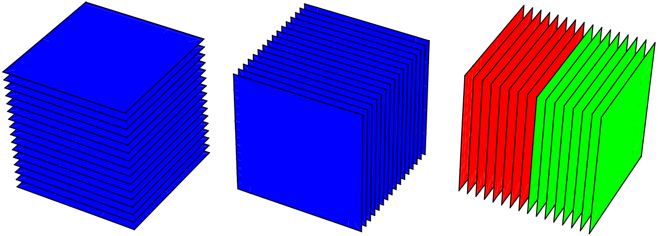
Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m-1),\ 2^{m-1}(2^{m-1}-1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$: $\quad \mathcal{D}_3 = \{D_1, \ldots, D_8, D_9, \ldots, D_{16}\}$



Kocke simetričnih dizajna

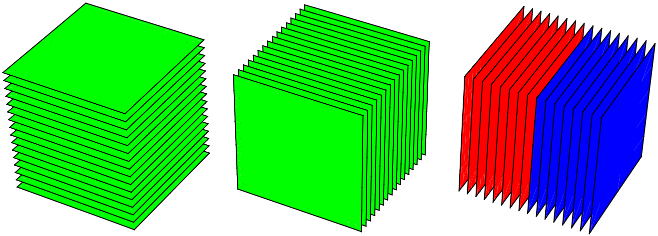
Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} - 1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

$G = \mathbb{Z}_2 \times Q_8$: $\quad \mathcal{D}_2 = \{D_1, \ldots, D_8, D_9, \ldots, D_{16}\}$



Kocke simetričnih dizajna

Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} - 1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

Negrupovne kocke?

Kocke simetričnih dizajna

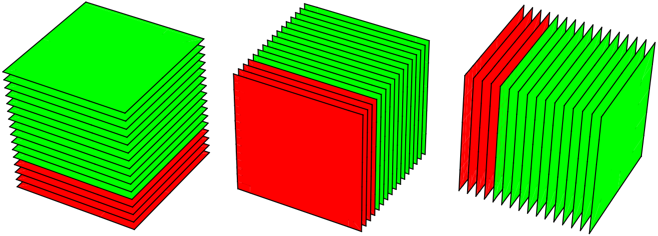
Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} - 1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

Negrupovne kocke?



Kocke simetričnih dizajna

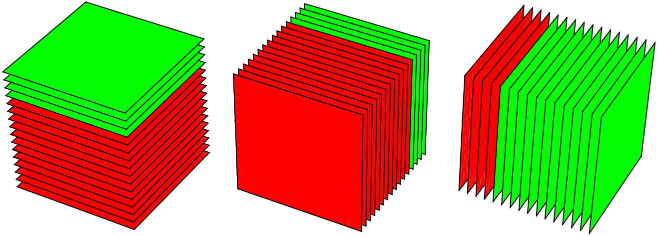
Teorem.

Za svaki $m \geq 2$ i svaku dimenziju $n \geq 3$ postoji n-kocka simetričnih

$$(4^m,\ 2^{m-1}(2^m - 1),\ 2^{m-1}(2^{m-1} - 1))$$

dizajna koja je grupovna kocka, ali nije diferencijska kocka.

Negrupovne kocke?



Kocke simetričnih dizajna

Propozicija.

Do na ekvivalenciju, skup $\mathcal{C}^3(16,6,2)$ sadrži točno 27 diferencijskih kocaka i 946 grupovnih kocaka koje nisu diferencijske. Nadalje, sadrži barem 1423 međusobno neekvivalentnih negrupovnih kocaka.

Kocke simetričnih dizajna

Propozicija.

Do na ekvivalenciju, skup $\mathcal{C}^3(16,6,2)$ sadrži točno 27 diferencijskih kocaka i 946 grupovnih kocaka koje nisu diferencijske. Nadalje, sadrži barem 1423 međusobno neekvivalentnih negrupovnih kocaka.

Pitanja:

1. Postoji točno 78 simetričnih $(25,9,3)$ dizajna, ali ne postoje dif. skupovi s tim parametrima. Postoje li kocke simetričnih $(25,9,3)$ dizajna dimenzije $n \geq 3$?

Kocke simetričnih dizajna

Propozicija.

Do na ekvivalenciju, skup $\mathcal{C}^3(16, 6, 2)$ sadrži točno 27 diferencijskih kocaka i 946 grupovnih kocaka koje nisu diferencijske. Nadalje, sadrži barem 1423 međusobno neekvivalentnih negrupovnih kocaka.

Pitanja:

1. Postoji točno 78 simetričnih $(25, 9, 3)$ dizajna, ali ne postoje dif. skupovi s tim parametrima. Postoje li kocke simetričnih $(25, 9, 3)$ dizajna dimenzije $n \geq 3$?
2. Postoje li negrupovne kocke $(15, 7, 3)$ dizajna? Postoje li negrupovne kocke za bilo koje parametre $(v, k, \lambda) \neq (16, 6, 2)$?

Projekcijske kocke simetričnih dizajna

Funkciju $A : \{1, \ldots, v\}^n \to \{0, 1\}$ takvu da su joj sve 2-dimenzionalne "šnite" / "fete" incidencijske matrice simetričnih (v, k, λ) dizajna zovemo n-dimenzionalnom kockom simetričnih (v, k, λ) dizajna.
Skup svih takvih kocaka označavamo $\mathcal{C}^n(v, k, \lambda)$.

Projekcijske kocke simetričnih dizajna

Funkciju $A : \{1, \ldots, v\}^n \to \{0, 1\}$ takvu da su joj sve 2-dimenzionalne **projekcije** incidencijske matrice simetričnih (v, k, λ) dizajna zovemo n-dimenzionalnom projekcijskom kockom simetričnih (v, k, λ) dizajna. Skup svih takvih kocaka označavamo $\mathcal{P}^n(v, k, \lambda)$.

Projekcijske kocke simetričnih dizajna

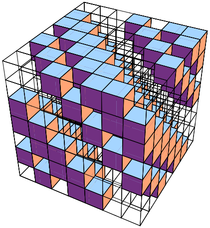
Funkciju $A : \{1, \ldots, v\}^n \to \{0, 1\}$ takvu da su joj sve 2-dimenzionalne **projekcije** incidencijske matrice simetričnih (v, k, λ) dizajna zovemo n-dimenzionalnom projekcijskom kockom simetričnih (v, k, λ) dizajna. Skup svih takvih kocaka označavamo $\mathcal{P}^n(v, k, \lambda)$.

V. Krčadinac, L. Relić, *Projection cubes of symmetric designs*, preprint, 2024. https://arxiv.org/abs/2411.06936

Projekcijske kocke simetričnih dizajna

Funkciju $A : \{1, \ldots, v\}^n \to \{0, 1\}$ takvu da su joj sve 2-dimenzionalne **projekcije** incidencijske matrice simetričnih (v, k, λ) dizajna zovemo n-dimenzionalnom projekcijskom kockom simetričnih (v, k, λ) dizajna. Skup svih takvih kocaka označavamo $\mathcal{P}^n(v, k, \lambda)$.

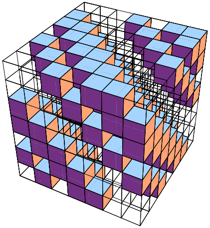
V. Krčadinac, L. Relić, *Projection cubes of symmetric designs*, preprint, 2024. https://arxiv.org/abs/2411.06936



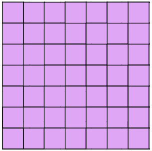
Projekcijske kocke simetričnih dizajna

Funkciju $A : \{1, \ldots, v\}^n \to \{0, 1\}$ takvu da su joj sve 2-dimenzionalne **projekcije** incidencijske matrice simetričnih (v, k, λ) dizajna zovemo n-dimenzionalnom projekcijskom kockom simetričnih (v, k, λ) dizajna. Skup svih takvih kocaka označavamo $\mathcal{P}^n(v, k, \lambda)$.

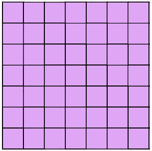
V. Krčadinac, L. Relić, *Projection cubes of symmetric designs*, preprint, 2024. https://arxiv.org/abs/2411.06936



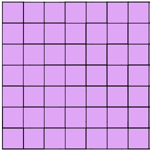
Nacrt:



Tlocrt:



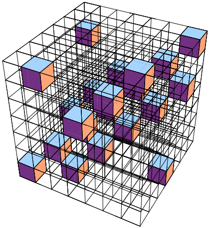
Bokocrt:



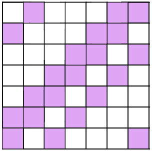
Projekcijske kocke simetričnih dizajna

Funkciju $A : \{1, \ldots, v\}^n \to \{0, 1\}$ takvu da su joj sve 2-dimenzionalne **projekcije** incidencijske matrice simetričnih (v, k, λ) dizajna zovemo n-dimenzionalnom projekcijskom kockom simetričnih (v, k, λ) dizajna. Skup svih takvih kocaka označavamo $\mathcal{P}^n(v, k, \lambda)$.

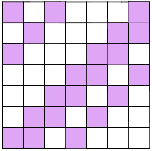
V. Krčadinac, L. Relić, *Projection cubes of symmetric designs*, preprint, 2024. https://arxiv.org/abs/2411.06936



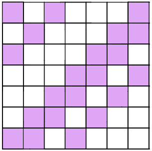
Nacrt:



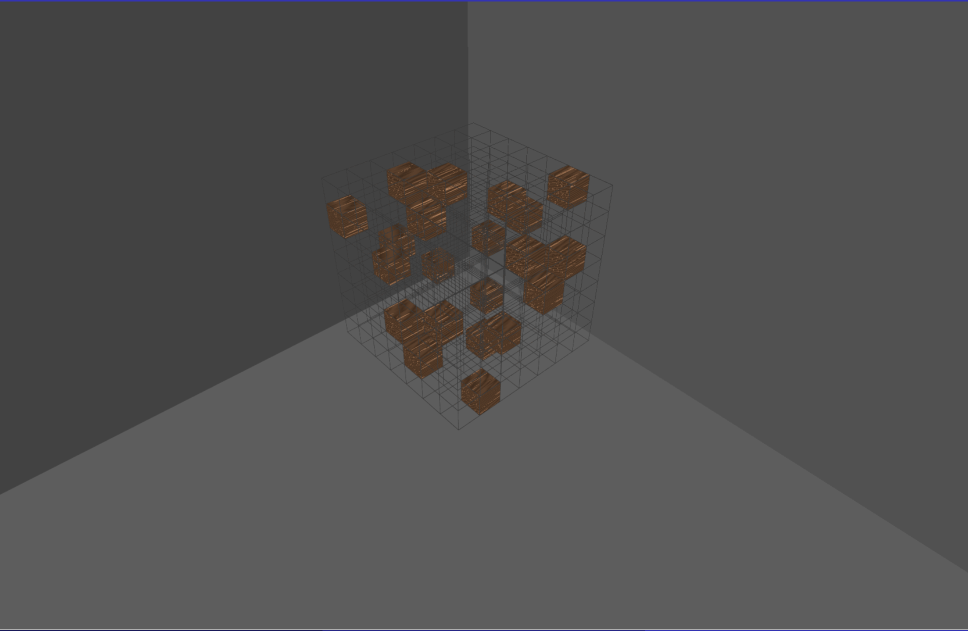
Tlocrt:



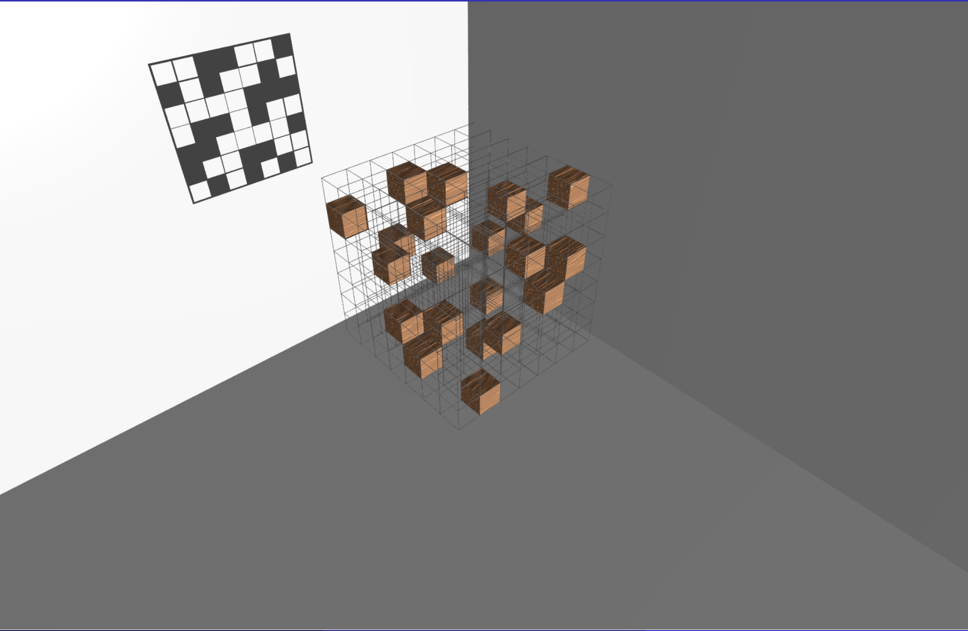
Bokocrt:



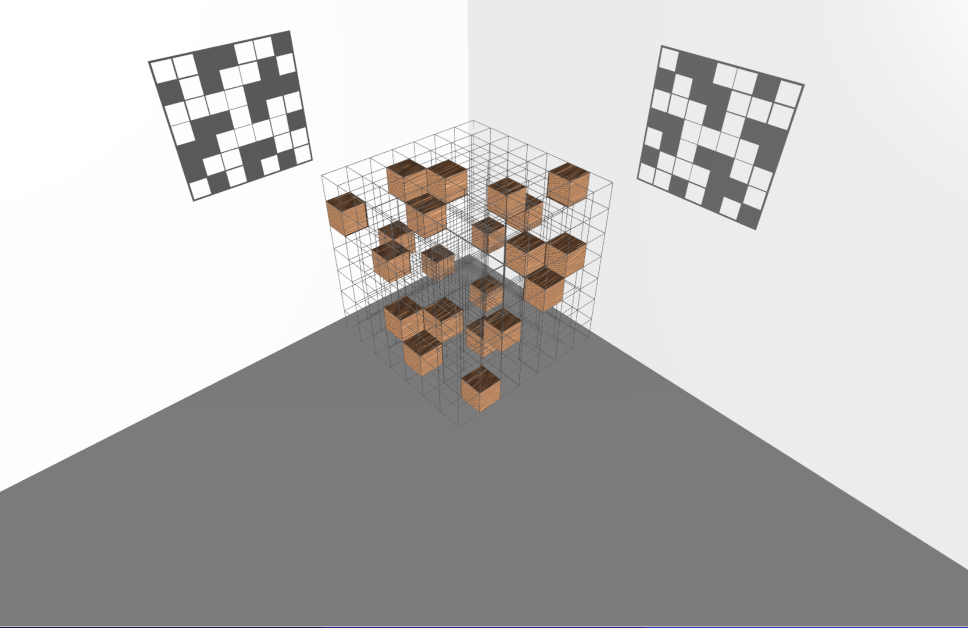
Projekcijska 3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna



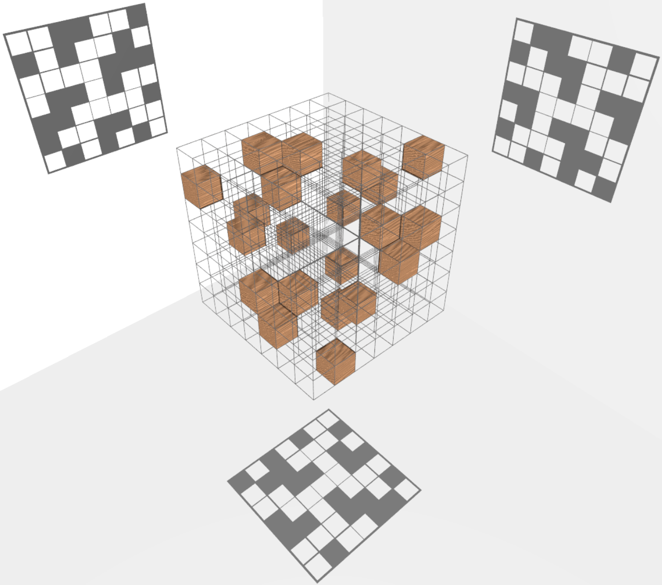
Projekcijska 3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna



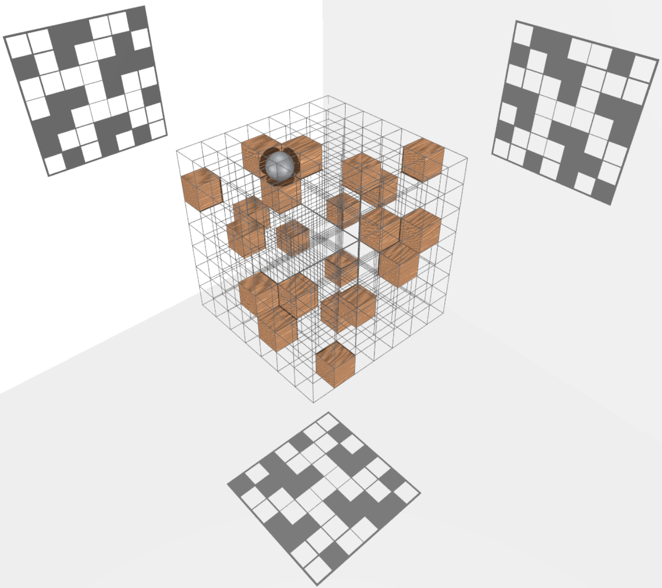
Projekcijska 3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna



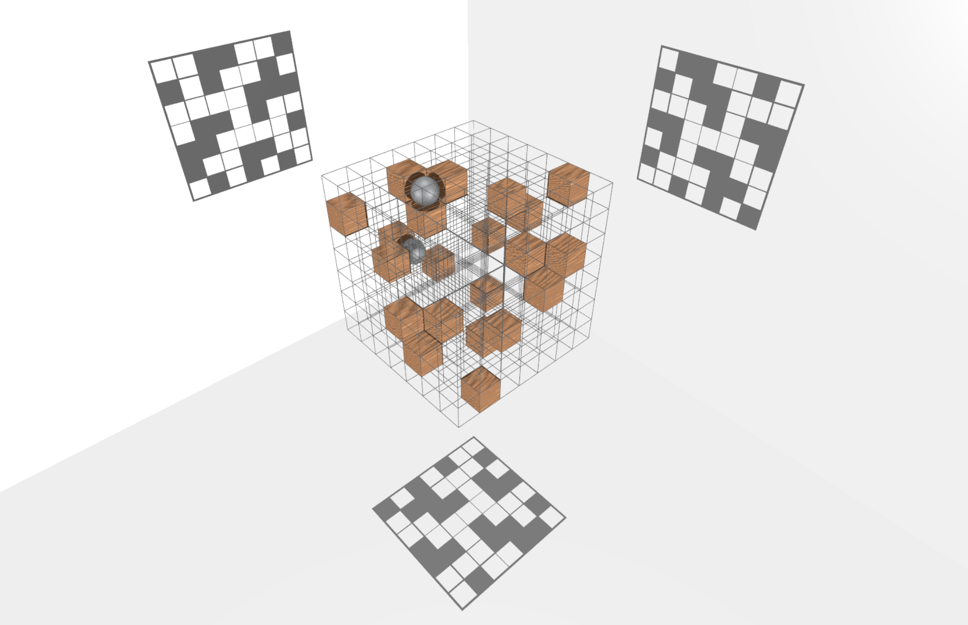
Projekcijska 3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna



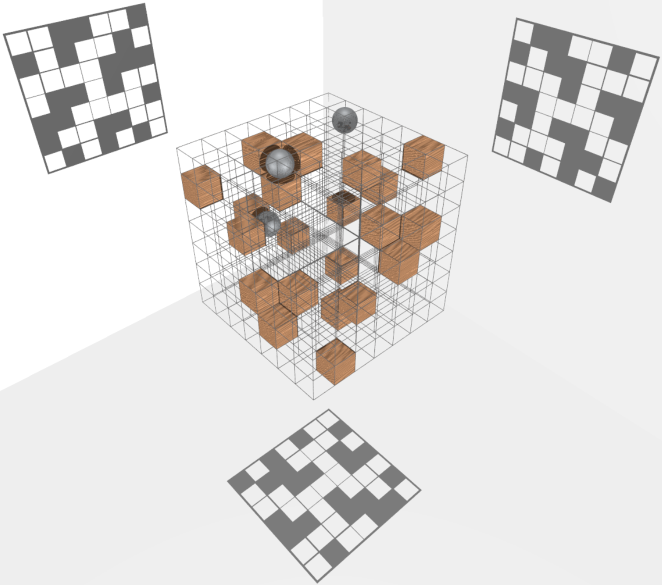
Projekcijska 3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna



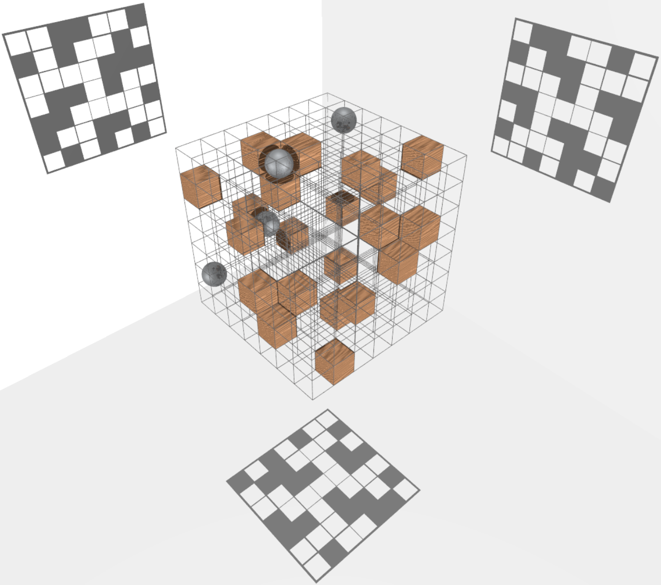
Projekcijska 3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna



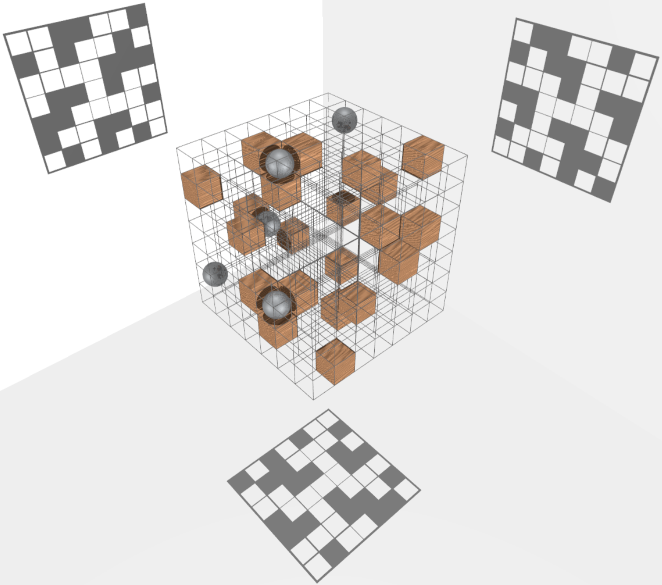
Projekcijska 3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna



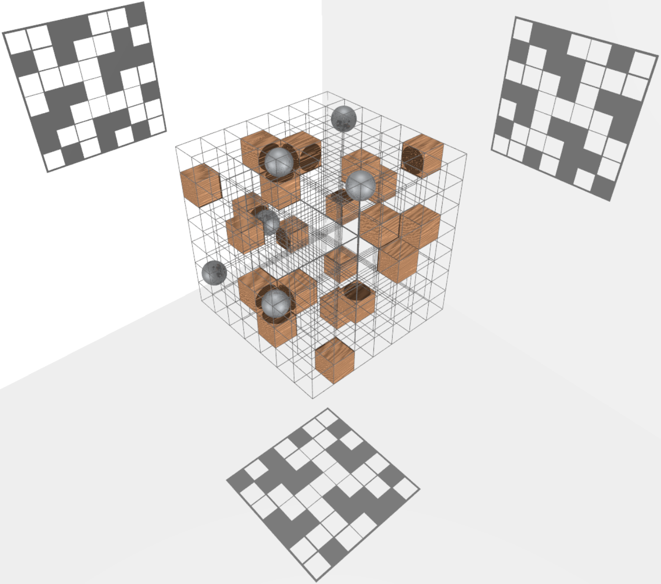
Projekcijska 3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna



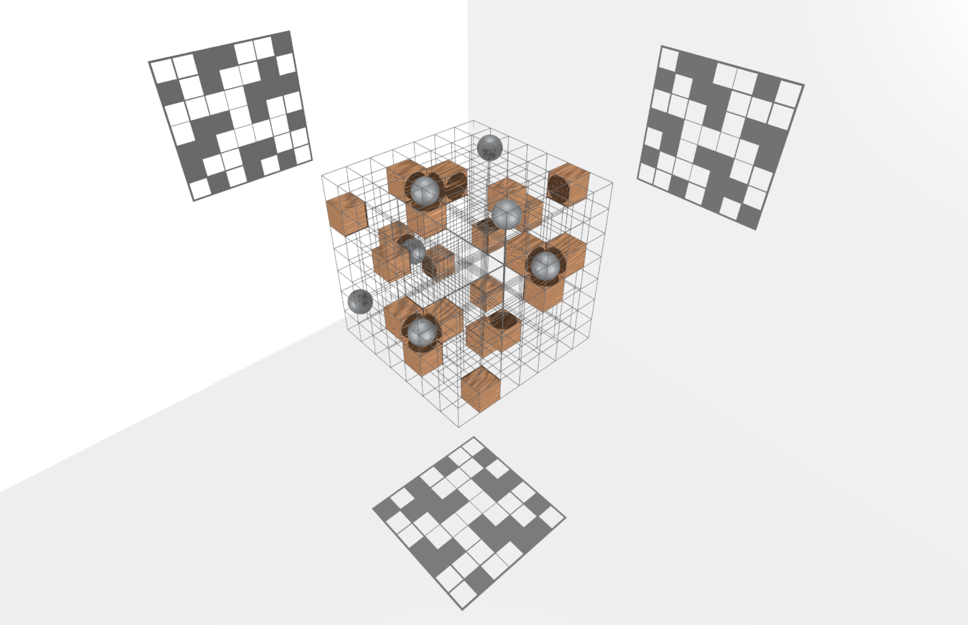
Projekcijska 3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna



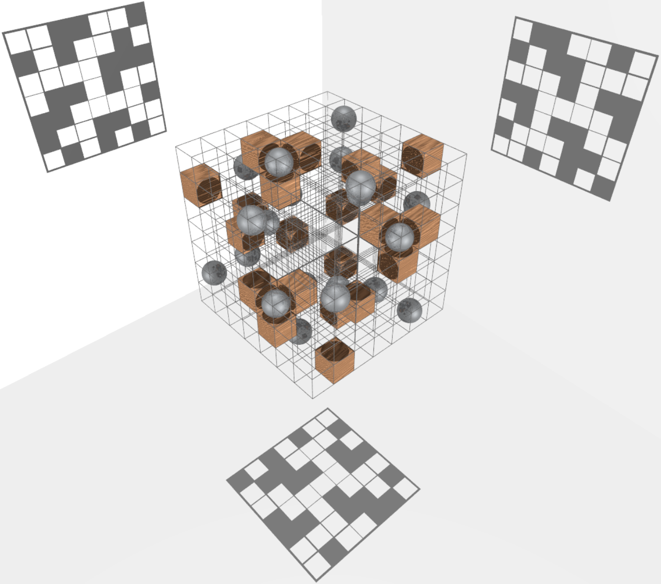
Projekcijska 3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna



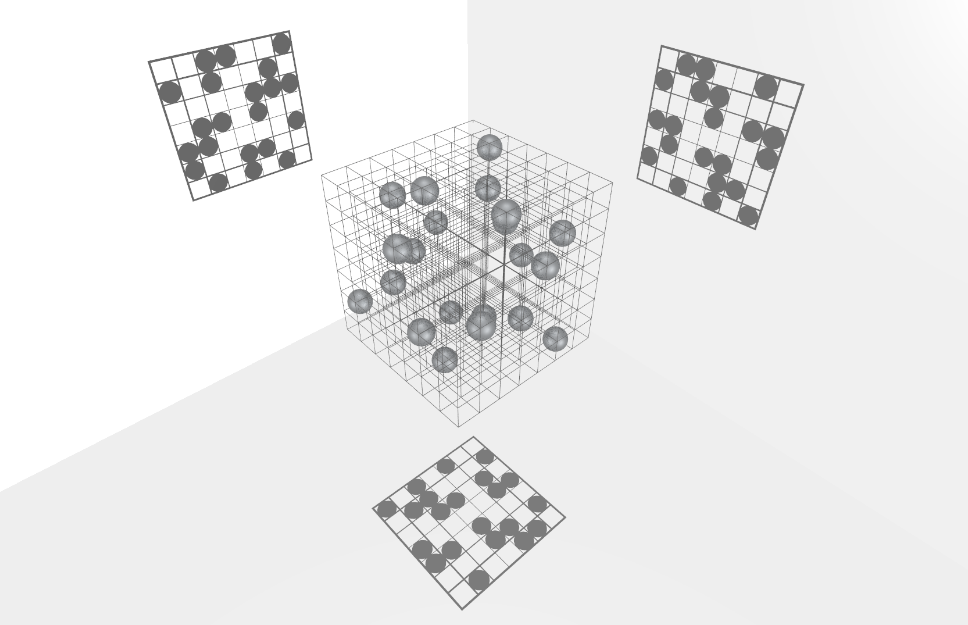
Projekcijska 3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna



Projekcijska 3-kocka $(7, 3, 1)$ dizajna



Projekcijska 3-kocka $(7,3,1)$ dizajna



Što je projekcija?

Što je projekcija?

Za n-dimenzionalnu matricu $A : \{1, \ldots, v\}^n \to \mathbb{F}$ i koordinate $1 \leq x < y \leq n$, projekcija $\Pi_{xy}(C)$ je 2-dimenionalna matrica s (i_x, i_y)-unosom

$$\sum_{1 \leq i_1, \ldots, \widehat{i_x}, \ldots, \widehat{i_y}, \ldots, i_n \leq v} C(i_1, \ldots, i_n).$$

Sumiramo po svim n-torkama $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, v\}^n$ s fiksnim koordinatama i_x, i_y u (polu)polju $\mathbb{F}$.

Što je projekcija?

Za n-dimenzionalnu matricu $A : \{1, \ldots, v\}^n \to \mathbb{F}$ i koordinate $1 \leq x < y \leq n$, projekcija $\Pi_{xy}(C)$ je 2-dimenionalna matrica s (i_x, i_y)-unosom

$$\sum_{1 \leq i_1, \ldots, \widehat{i_x}, \ldots, \widehat{i_y}, \ldots, i_n \leq v} C(i_1, \ldots, i_n).$$

Sumiramo po svim n-torkama $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, v\}^n$ s fiksnim koordinatama i_x, i_y u (polu)polju $\mathbb{F}$.

$\mathbb{F} =$ binarno polupolje $(1 + 1 = 1) \rightsquigarrow$ "fizička sjena"

Što je projekcija?

Za n-dimenzionalnu matricu $A : \{1, \ldots, v\}^n \to \mathbb{F}$ i koordinate $1 \le x < y \le n$, projekcija $\Pi_{xy}(C)$ je 2-dimenionalna matrica s (i_x, i_y)-unosom

$$\sum_{1 \le i_1, \ldots, \widehat{i_x}, \ldots, \widehat{i_y}, \ldots, i_n \le v} C(i_1, \ldots, i_n).$$

Sumiramo po svim n-torkama $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, v\}^n$ s fiksnim koordinatama i_x, i_y u (polu)polju $\mathbb{F}$.

$\mathbb{F}$ = binarno polupolje $(1 + 1 = 1) \rightsquigarrow$ "fizička sjena"

$\mathbb{F}_2$ = binarno polje $(1 + 1 = 0) \rightsquigarrow$ primjeri s različitim brojem jedinica

Projekcijske kocke simetričnih dizajna

Što je projekcija?

Za n-dimenzionalnu matricu $A : \{1, \ldots, v\}^n \to \mathbb{F}$ i koordinate $1 \leq x < y \leq n$, projekcija $\Pi_{xy}(C)$ je 2-dimenionalna matrica s (i_x, i_y)-unosom

$$\sum_{1 \leq i_1, \ldots, \widehat{i_x}, \ldots, \widehat{i_y}, \ldots, i_n \leq v} C(i_1, \ldots, i_n).$$

Sumiramo po svim n-torkama $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, v\}^n$ s fiksnim koordinatama i_x, i_y u (polu)polju $\mathbb{F}$.

~~$\mathbb{F}$ = binarno polupolje $(1 + 1 = 1)$ $\rightsquigarrow$ "fizička sjena"~~

~~$\mathbb{F}_2$ = binarno polje $(1 + 1 = 0)$ $\rightsquigarrow$ primjeri s različitim brojem jedinica~~

$\mathbb{F}$ = polje karakteristike 0:

Propozicija.

Broj incidencija (jedinica) u kocki $A \in \mathcal{P}^n(v, k, \lambda)$ je jednak vk.

Projekcijske kocke simetričnih dizajna

Funkciju $A : \{1, \dots, v\}^n \to \{0, 1\}$ možemo interpretirati kao karakterističnu funkciju i identificirati je sa skupom n-torki

$$\overline{A} = \{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, v\}^n \mid A(i_1, \dots, i_n) = 1\}$$

Projekcijske kocke simetričnih dizajna

Funkciju $A : \{1, \ldots, v\}^n \to \{0, 1\}$ možemo interpretirati kao karakterističnu funkciju i identificirati je sa skupom n-torki

$$\overline{A} = \{(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, v\}^n \mid A(i_1, \ldots, i_n) = 1\}$$

Propozicija.

Neka je $S \subseteq \{1, \ldots, v\}^n$ podskup veličine vk. Postoji projekcijska kocka $A \in \mathcal{P}^n(v, k, \lambda)$ takva da je $S = \overline{A}$ ako i samo ako sljedeće tvrdnje vrijede za sve $1 \leq x < y \leq n$:

1. za svaki $i \in \{1, \ldots, v\}$ postoji točno k elemenata $j \in \{1, \ldots, v\}$ takvih da je $(i, j) \in \Pi_{xy}(S)$,
2. za svaki $j \in \{1, \ldots, v\}$ postoji točno k elemenata $i \in \{1, \ldots, v\}$ takvih da je $(i, j) \in \Pi_{xy}(S)$,
3. za sve $i, i' \in \{1, \ldots, v\}$, $i \neq i'$ postoji točno λ elemenata $j \in \{1, \ldots, v\}$ takvih da su $(i, j), (i', j) \in \Pi_{xy}(S)$.

Projekcijske kocke simetričnih dizajna

Korolar.

Ako je $A \in \mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$, onda je $\overline{A}$ "orthogonal array" veličine vk, stupnja n, reda v, snage 1 i indeksa k, tj. $OA(vk,n,v,1)$.

Projekcijske kocke simetričnih dizajna

Korolar.

Ako je $A \in \mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$, onda je $\overline{A}$ "orthogonal array" veličine vk, stupnja n, reda v, snage 1 i indeksa k, tj. $OA(vk,n,v,1)$.

$k = 1$:

$$|\mathcal{P}^n(v,1,0)| = (v!)^{n-1}$$

Projekcijske kocke simetričnih dizajna

Korolar.

Ako je $A \in \mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$, onda je $\overline{A}$ "orthogonal array" veličine vk, stupnja n, reda v, snage 1 i indeksa k, tj. $OA(vk,n,v,1)$.

$k=1$:

$$|\mathcal{P}^n(v,1,0)| = (v!)^{n-1}$$

$k=2$: broj $\mathcal{P}^n(3,2,1)$-kocaka do na ekvivalenciju je

n:	2	3	4	5	6
#:	1	2	1	1	0

Projekcijske kocke simetričnih dizajna

Korolar.

Ako je $A \in \mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$, onda je $\overline{A}$ "orthogonal array" veličine vk, stupnja n, reda v, snage 1 i indeksa k, tj. $OA(vk,n,v,1)$.

$k = 1$:

$$|\mathcal{P}^n(v,1,0)| = (v!)^{n-1}$$

$k = 2$: broj $\mathcal{P}^n(3,2,1)$-kocaka do na ekvivalenciju je

n:	2	3	4	5	6
#:	1	2	1	1	0

Teorem.

Ako postoji $\mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$ kocka s $k \geq 2$, onda vrijedi $n \leq \dfrac{v(v+1)}{2}$.

Projekcijske kocke simetričnih dizajna

Korolar.

Ako je $A \in \mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$, onda je $\overline{A}$ "orthogonal array" veličine vk, stupnja n, reda v, snage 1 i indeksa k, tj. $OA(vk,n,v,1)$.

$k=1$:

$$|\mathcal{P}^n(v,1,0)| = (v!)^{n-1}$$

$k=2$: broj $\mathcal{P}^n(3,2,1)$-kocaka do na ekvivalenciju je

n:	2	3	4	5	6
#:	1	2	1	1	0

Teorem.

Ako postoji $\mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$ kocka s $k \geq 2$, onda vrijedi $n \leq \dfrac{v(v+1)}{2}$.

$\nu(v,1,0)=\infty$, $\nu(3,2,1)=5$ (teorem daje $\nu(3,2,1)\leq 6$)

Višedimenzionalni diferencijski skupovi

Neka je G aditivno zapisana grupa reda v. Projekcijske kocke možemo indeksirati elementima grupe G umjesto brojevima $\{1, \ldots, v\}$:

$$A : G^n \to \{0,1\}, \qquad \overline{A} \subseteq G^n$$

Višedimenzionalni diferencijski skupovi

Neka je G aditivno zapisana grupa reda v. Projekcijske kocke možemo indeksirati elementima grupe G umjesto brojevima $\{1, \ldots, v\}$:

$$A : G^n \to \{0, 1\}, \qquad \overline{A} \subseteq G^n$$

Za skup uređenih n-torki $D \subseteq G^n$ kažemo da je n-dimenzionalni diferencijski (v, k, λ) skup ako je D veličine k i ako su $\{d_x - d_y \mid d \in D\} \subseteq G$ diferencijski (v, k, λ) skupovi za sve $1 \leq x < y \leq n$.

Višedimenzionalni diferencijski skupovi

Neka je G aditivno zapisana grupa reda v. Projekcijske kocke možemo indeksirati elementima grupe G umjesto brojevima $\{1, \ldots, v\}$:

$$A : G^n \to \{0, 1\}, \qquad \overline{A} \subseteq G^n$$

Za skup uređenih n-torki $D \subseteq G^n$ kažemo da je n-dimenzionalni diferencijski (v, k, λ) skup ako je D veličine k i ako su $\{d_x - d_y \mid d \in D\} \subseteq G$ diferencijski (v, k, λ) skupovi za sve $1 \leq x < y \leq n$.

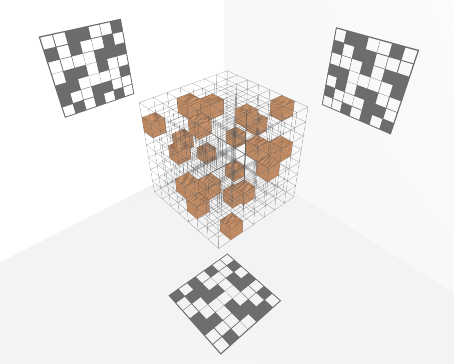
Propozicija.

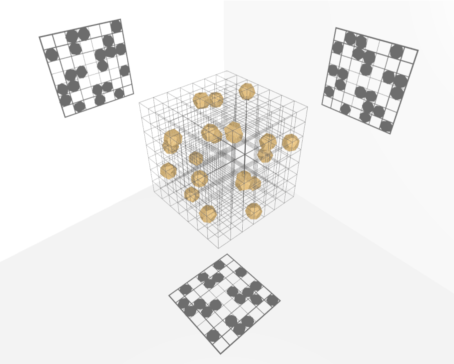
Razvoj n-dimenzionalnog diferencijskog (v, k, λ) skupa

$$\operatorname{dev} D = \{(d_1 + g, \ldots, d_n + g) \mid g \in G, \, d \in D\}$$

je reprezentacija $\overline{A} \subseteq G^n$ projekcijske kocke $A \in \mathcal{P}^n(v, k, \lambda)$.

Primjer. Neka je $G = \mathbb{Z}_7$. Tada su $D_1 = \{(0,1,3),\ (0,2,6),\ (0,4,5)\}$ i $D_2 = \{(0,1,2),\ (0,2,4),\ (0,4,1)\}$ trodimenzionalni diferencijski $(7,3,1)$ skupovi takvi da su $\operatorname{dev} D_1$ i $\operatorname{dev} D_2$ neekvivalentne "Fanove projekcijske kocke" u $\mathcal{P}^3(7,3,1)$.





Višedimenzionalni diferencijski skupovi

Propozicija.

Neka je D n-dimenzionalni diferencijski (v, k, λ) skup u G. Tada projekcijska kocka $\overline{A} = \mathrm{dev}\, D$ ima grupu autotopija izomorfnu s G koja djeluje strogo tranzitivno na svakoj koordinati.

Propozicija.

Neka je D n-dimenzionalni diferencijski (v, k, λ) skup u G. Tada projekcijska kocka $\overline{A} = \operatorname{dev} D$ ima grupu autotopija izomorfnu s G koja djeluje strogo tranzitivno na svakoj koordinati.

Diferencijske kocke iz $\mathcal{C}^n(v, k, \lambda)$ imaju znatno veću grupu autotopija izomorfnu s G^{n-1}.

Višedimenzionalni diferencijski skupovi

Propozicija.

Neka je D n-dimenzionalni diferencijski (v, k, λ) skup u G. Tada projekcijska kocka $\overline{A} = \operatorname{dev} D$ ima grupu autotopija izomorfnu s G koja djeluje strogo tranzitivno na svakoj koordinati.

Diferencijske kocke iz $\mathcal{C}^n(v, k, \lambda)$ imaju znatno veću grupu autotopija izomorfnu s G^{n-1}.

Propozicija.

Neka je $A \in \mathcal{P}^n(v, k, \lambda)$ projekcijska kocka s grupom autotopija G koja djeluje strogo tranzitivno na svakoj koordinati. Tada postoji n-dimenzionalni diferencijski (v, k, λ) skup $D \subseteq G^n$ takav da je $\overline{A}$ ekvivalentan s $\operatorname{dev} D$.

Višedimenzionalni diferencijski skupovi

Teorem ("Višedimenzionalni Paleyevi diferencijski skupovi").

Ako je $q \equiv 3 \pmod 4$ prim potencija, onda postoji q-dimenzionalni diferencijski $(q, (q-1)/2, (q-3)/4)$ skup u aditivnoj grupi polja $\mathbb{F}_q$.

Teorem ("Višedimenzionalni Paleyevi diferencijski skupovi").
Ako je $q \equiv 3 \pmod 4$ prim potencija, onda postoji q-dimenzionalni diferencijski $(q, (q-1)/2, (q-3)/4)$ skup u aditivnoj grupi polja $\mathbb{F}_q$.

Primjer. 7-dimenzionalni diferencijski $(7, 3, 1)$ skup u $\mathbb{Z}_7$:

$$D = \{(0,1,3,2,6,4,5),\ (0,2,6,4,5,1,3),\ (0,4,5,1,3,2,6)\}$$

Višedimenzionalni diferencijski skupovi

Teorem ("Višedimenzionalni Paleyevi diferencijski skupovi").

Ako je $q \equiv 3 \pmod 4$ prim potencija, onda postoji q-dimenzionalni diferencijski $(q,(q-1)/2,(q-3)/4)$ skup u aditivnoj grupi polja $\mathbb{F}_q$.

Primjer. 7-dimenzionalni diferencijski $(7,3,1)$ skup u $\mathbb{Z}_7$:

$$D = \{(0,1,3,2,6,4,5),\ (0,2,6,4,5,1,3),\ (0,4,5,1,3,2,6)\}$$

Teorem ("Višedimenzionalni ciklotomski diferencijski skupovi").

Ako je q prim potencija takva da četvrte potencije u $\mathbb{F}_q$ čine diferencijski $(q,(q-1)/4,(q-5)/16)$ skup, ili osme potencije u $\mathbb{F}_q$ čine diferencijski $(q,(q-1)/8,(q-9)/64)$ skup, onda postoji q-dimenzionalni diferencijski skup s istim parametrima.

Višedimenzionalni diferencijski skupovi

Teorem ("Višedim. diferencijski skupovi prim potencija blizanaca").

Ako su q i $q+2$ neparne prim potencije, onda postoji q-dimenzionalni diferencijski skup u $G = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_{q+2}$ s parametrima $(4m-1, 2m-1, m-1)$ za $m = (q+1)^2/4$.

Višedimenzionalni diferencijski skupovi

Teorem ("Višedim. diferencijski skupovi prim potencija blizanaca").

Ako su q i $q+2$ neparne prim potencije, onda postoji q-dimenzionalni diferencijski skup u $G = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_{q+2}$ s parametrima $(4m-1, 2m-1, m-1)$ za $m = (q+1)^2/4$.

$\mu_G(v,k,\lambda) =$ najveći prirodni broj n takav da postoji n-dimenzionalni diferencijski (v,k,λ) skup u grupi G

Višedimenzionalni diferencijski skupovi

Teorem ("Višedim. diferencijski skupovi prim potencija blizanaca").

Ako su q i $q+2$ neparne prim potencije, onda postoji q-dimenzionalni diferencijski skup u $G = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_{q+2}$ s parametrima $(4m-1, 2m-1, m-1)$ za $m = (q+1)^2/4$.

$\mu_G(v,k,\lambda) =$ najveći prirodni broj n takav da postoji n-dimenzionalni diferencijski (v,k,λ) skup u grupi G

$$\mu(7,3,1) = 7 \quad \mu(11,5,2) = 11 \quad \mu(15,7,3) = 3 \quad \mu(13,4,1) = 13$$

$$\mu(7,4,2) = 7 \quad \mu(11,6,3) = 11 \quad \mu(15,8,4) = 4 \quad \mu_G(21,5,1) = 3$$

Višedimenzionalni diferencijski skupovi

Teorem ("Višedim. diferencijski skupovi prim potencija blizanaca").

Ako su q i $q+2$ neparne prim potencije, onda postoji q-dimenzionalni diferencijski skup u $G = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_{q+2}$ s parametrima $(4m-1, 2m-1, m-1)$ za $m = (q+1)^2/4$.

$\mu_G(v,k,\lambda)$ = najveći prirodni broj n takav da postoji n-dimenzionalni diferencijski (v,k,λ) skup u grupi G

$$\mu(7,3,1)=7 \quad \mu(11,5,2)=11 \quad \mu(15,7,3)=3 \quad \mu(13,4,1)=13$$

$$\mu(7,4,2)=7 \quad \mu(11,6,3)=11 \quad \mu(15,8,4)=4 \quad \mu_G(21,5,1)=3$$

Pitanja:

1. Primjeri projekcijskih kocaka koje ne dolaze od višedim. dif. skupova?

Višedimenzionalni diferencijski skupovi

Teorem ("Višedim. diferencijski skupovi prim potencija blizanaca").

Ako su q i $q+2$ neparne prim potencije, onda postoji q-dimenzionalni diferencijski skup u $G = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_{q+2}$ s parametrima $(4m-1, 2m-1, m-1)$ za $m = (q+1)^2/4$.

$\mu_G(v,k,\lambda) =$ najveći prirodni broj n takav da postoji n-dimenzionalni diferencijski (v,k,λ) skup u grupi G

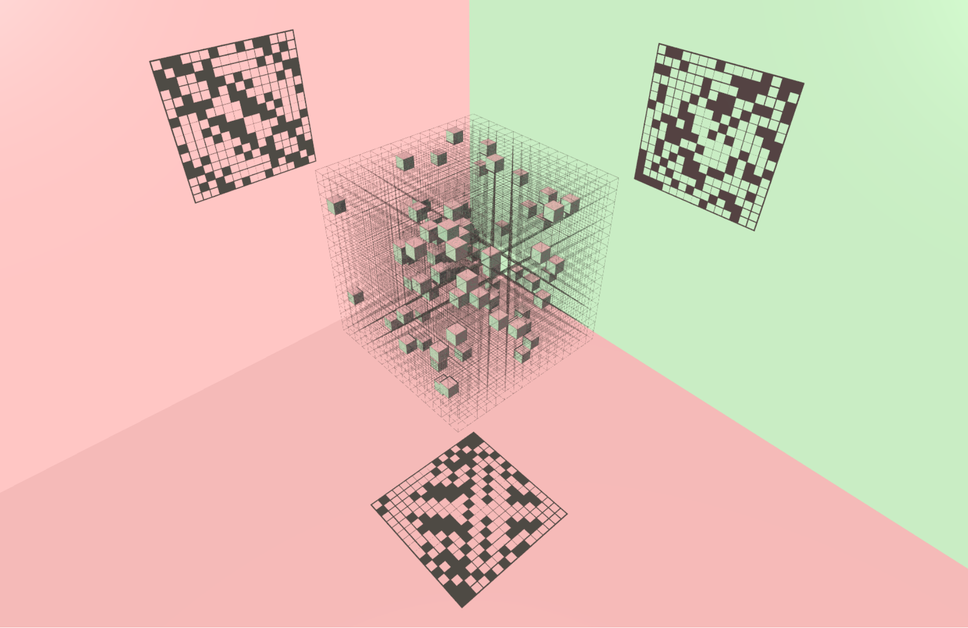
$$\mu(7,3,1)=7 \quad \mu(11,5,2)=11 \quad \mu(15,7,3)=3 \quad \mu(13,4,1)=13$$

$$\mu(7,4,2)=7 \quad \mu(11,6,3)=11 \quad \mu(15,8,4)=4 \quad \mu_G(21,5,1)=3$$

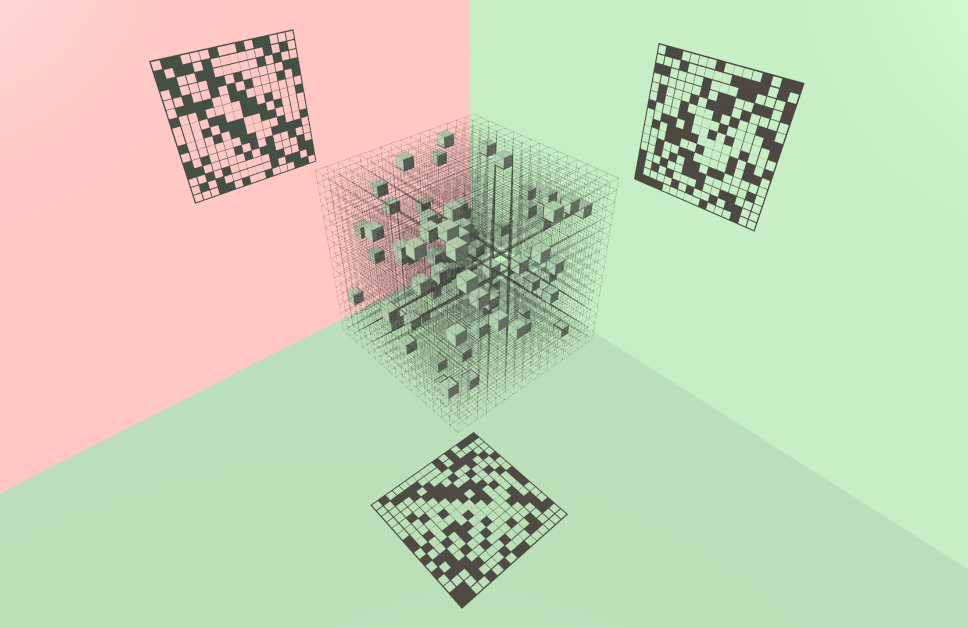
Pitanja:

1. Primjeri projekcijskih kocaka koje ne dolaze od višedim. dif. skupova?
2. Primjeri takvi da su projekcije inc. matrice neizomorfnih sim. dizajna?

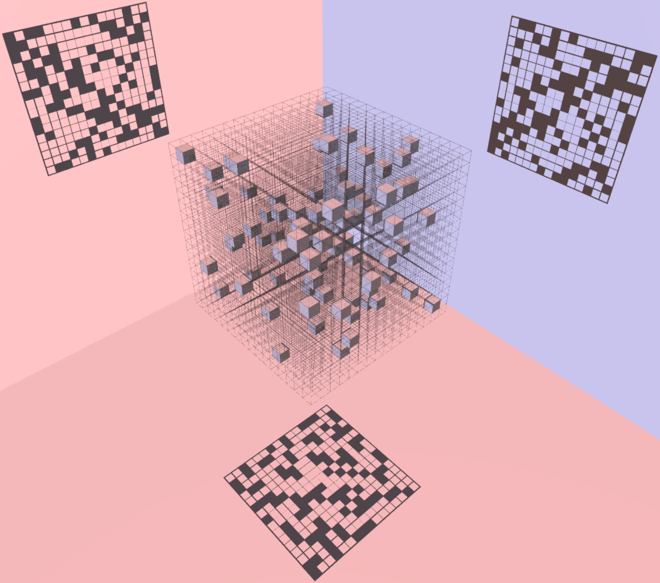
Primjeri kocaka u $\mathcal{P}^3(16, 6, 2)$



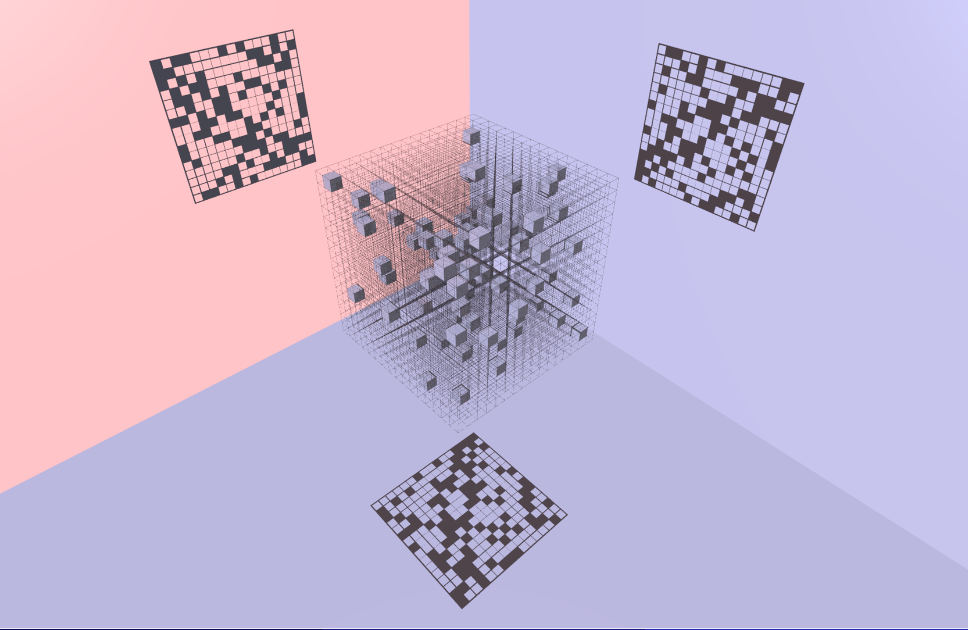
Primjeri kocaka u $\mathcal{P}^3(16,6,2)$



Primjeri kocaka u $\mathcal{P}^3(16,6,2)$



Primjeri kocaka u $\mathcal{P}^3(16,6,2)$



Još o kockama u $\mathcal{C}^n(v,k,\lambda)$ i $\mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$

V. Krčadinac, M. O. Pavčević, *On higher-dimensional symmetric designs*, u pripremi, 2024.

Još o kockama u $\mathcal{C}^n(v,k,\lambda)$ i $\mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$

V. Krčadinac, M. O. Pavčević, *On higher-dimensional symmetric designs*, u pripremi, 2024.

Propozicija.

Ukupan broj kocaka u $\mathcal{C}^n(3,2,1)$ je $3 \cdot 2^{n-1}$ i sve su izotopne.

Još o kockama u $\mathcal{C}^n(v,k,\lambda)$ i $\mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$

V. Krčadinac, M. O. Pavčević, *On higher-dimensional symmetric designs*, u pripremi, 2024.

Propozicija.

Ukupan broj kocaka u $\mathcal{C}^n(3,2,1)$ je $3 \cdot 2^{n-1}$ i sve su izotopne.

Teorem.

Brojevi kocaka u $\mathcal{P}^n(7,3,1)$ i $\mathcal{P}^n(7,4,2)$ do na izotopiju dani su u tablici. Posebno, $\nu(7,3,1) = 7$ i $\nu(7,4,2) = 9$.

	n								
(v,k,λ)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(7,3,1)$	1	13	20	4	3	2	0	0	0
$(7,4,2)$	1	877	884	74	19	9	6	5	0

Još o kockama u $\mathcal{C}^n(v, k, \lambda)$ i $\mathcal{P}^n(v, k, \lambda)$

Propozicija.

Neka je $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ autotopija kocke $A \in \mathcal{P}^n(v, k, \lambda)$. Tada svaka komponenta π_x jednoznačno određuje preostale komponente.

Još o kockama u $\mathcal{C}^n(v,k,\lambda)$ i $\mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$

Propozicija.

Neka je $(\pi_1,\ldots,\pi_n)$ autotopija kocke $A \in \mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$. Tada svaka komponenta π_x jednoznačno određuje preostale komponente.

Propozicija.

Neka je $(\pi_1,\ldots,\pi_n)$ autotopija kocke $A \in \mathcal{C}^n(v,k,\lambda)$. Tada je svaka komponenta π_x jednoznačno određena s $n-1$ preostalih komponenata.

Još o kockama u $\mathcal{C}^n(v,k,\lambda)$ i $\mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$

Propozicija.

Neka je $(\pi_1,\ldots,\pi_n)$ autotopija kocke $A\in\mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$. Tada svaka komponenta π_x jednoznačno određuje preostale komponente.

Propozicija.

Neka je $(\pi_1,\ldots,\pi_n)$ autotopija kocke $A\in\mathcal{C}^n(v,k,\lambda)$. Tada je svaka komponenta π_x jednoznačno određena s $n-1$ preostalih komponenata.

Propozicija.

Autotopije kocaka u $\mathcal{P}^n(v,k,\lambda)$ imaju isti broj fiksnih točaka na svakoj koordinati. Autotopije kocaka u $\mathcal{C}^n(v,k,\lambda)$ mogu imati različite brojeve fiksnih točaka na koordinatama.

Još o višedimenzionalnim diferencijskim skupovima

Teorem.

Ako postoji n-dimenzionalni diferencijski (v, k, λ) skup $D \subseteq G^n$, onda je

$$n \leq v.$$

Još o višedimenzionalnim diferencijskim skupovima

Teorem.

Ako postoji n-dimenzionalni diferencijski (v, k, λ) skup $D \subseteq G^n$, onda je

$$n \leq v.$$

Teorem.

Neka je G elementarno abelova grupa, tj. aditivna grupa polja $\mathbb{F}_q$. Tada se svaki diferencijski (q, k, λ) skup u G može proširiti do q dimenzija.

Još o višedimenzionalnim diferencijskim skupovima

Teorem.

Ako postoji n-dimenzionalni diferencijski (v, k, λ) skup $D \subseteq G^n$, onda je
$$n \leq v.$$

Teorem.

Neka je G elementarno abelova grupa, tj. aditivna grupa polja $\mathbb{F}_q$. Tada se svaki diferencijski (q, k, λ) skup u G može proširiti do q dimenzija.

Antiautomorfizam grupe G je bijekcija $\varphi : G \to G$ takva da vrijedi

$$\varphi(x + y) = \varphi(y) + \varphi(x), \ \ \forall x, y \in G.$$

Još o višedimenzionalnim diferencijskim skupovima

Teorem.

Ako postoji n-dimenzionalni diferencijski (v, k, λ) skup $D \subseteq G^n$, onda je

$$n \leq v.$$

Teorem.

Neka je G elementarno abelova grupa, tj. aditivna grupa polja $\mathbb{F}_q$. Tada se svaki diferencijski (q, k, λ) skup u G može proširiti do q dimenzija.

Antiautomorfizam grupe G je bijekcija $\varphi : G \to G$ takva da vrijedi

$$\varphi(x + y) = \varphi(y) + \varphi(x), \ \ \forall x, y \in G.$$

Za $R = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}\}$ kažemo da je regularni skup (anti)automorfizama od G ako je svaki $\varphi_x : G \to G$ automorfizam ili antiautomorfizam i sve razlike $\varphi_x - \varphi_y$ su automorfizmi ili antiautomorfizmi, za $1 \leq x < y \leq n - 1$.

Još o višedimenzionalnim diferencijskim skupovima

Teorem.

Ako postoji regularni skup (anti)automorfizama veličine $n-1$ u grupi G, onda se svaki diferencijski (v,k,λ) skup u G može proširiti do n dimenzija.

Još o višedimenzionalnim diferencijskim skupovima

Teorem.

Ako postoji regularni skup (anti)automorfizama veličine $n-1$ u grupi G, onda se svaki diferencijski (v,k,λ) skup u G može proširiti do n dimenzija.

Korolar.

Neka je p najmanji prosti djelitelj broja v. Tada se svaki ciklički (v,k,λ) diferencijski skup može proširiti do p dimenzija.

Još o višedimenzionalnim diferencijskim skupovima

Teorem.

Ako postoji regularni skup (anti)automorfizama veličine $n-1$ u grupi G, onda se svaki diferencijski (v,k,λ) skup u G može proširiti do n dimenzija.

Korolar.

Neka je p najmanji prosti djelitelj broja v. Tada se svaki ciklički (v,k,λ) diferencijski skup može proširiti do p dimenzija.

Radovi u tijeku...

Još o višedimenzionalnim diferencijskim skupovima

Teorem.

Ako postoji regularni skup (anti)automorfizama veličine $n-1$ u grupi G, onda se svaki diferencijski (v,k,λ) skup u G može proširiti do n dimenzija.

Korolar.

Neka je p najmanji prosti djelitelj broja v. Tada se svaki ciklički (v,k,λ) diferencijski skup može proširiti do p dimenzija.

Radovi u tijeku...

1. Konstrukcije $\mathcal{C}$- i $\mathcal{P}$-kocka sa zadanim grupama autotopija

Još o višedimenzionalnim diferencijskim skupovima

Teorem.

Ako postoji regularni skup (anti)automorfizama veličine $n-1$ u grupi G, onda se svaki diferencijski (v, k, λ) skup u G može proširiti do n dimenzija.

Korolar.

Neka je p najmanji prosti djelitelj broja v. Tada se svaki ciklički (v, k, λ) diferencijski skup može proširiti do p dimenzija.

Radovi u tijeku...

1. Konstrukcije $\mathcal{C}$- i $\mathcal{P}$-kocka sa zadanim grupama autotopija
2. Višedimenzionalne orbitne matrice – “Jankova metoda”

Još o višedimenzionalnim diferencijskim skupovima

Teorem.

Ako postoji regularni skup (anti)automorfizama veličine $n-1$ u grupi G, onda se svaki diferencijski (v,k,λ) skup u G može proširiti do n dimenzija.

Korolar.

Neka je p najmanji prosti djelitelj broja v. Tada se svaki ciklički (v,k,λ) diferencijski skup može proširiti do p dimenzija.

Radovi u tijeku...

1. Konstrukcije $\mathcal{C}$- i $\mathcal{P}$-kocka sa zadanim grupama autotopija
2. Višedimenzionalne orbitne matrice – "Jankova metoda"
3. Klasifikacija $\mathcal{C}$- i $\mathcal{P}$-kocka s jako tranzitivnim grupama

Još o višedimenzionalnim diferencijskim skupovima

Teorem.

Ako postoji regularni skup (anti)automorfizama veličine $n-1$ u grupi G, onda se svaki diferencijski (v,k,λ) skup u G može proširiti do n dimenzija.

Korolar.

Neka je p najmanji prosti djelitelj broja v. Tada se svaki ciklički (v,k,λ) diferencijski skup može proširiti do p dimenzija.

Radovi u tijeku...

1. Konstrukcije $\mathcal{C}$- i $\mathcal{P}$-kocka sa zadanim grupama autotopija
2. Višedimenzionalne orbitne matrice – "Jankova metoda"
3. Klasifikacija $\mathcal{C}$- i $\mathcal{P}$-kocka s jako tranzitivnim grupama
4. Veze s kodovima i drugim kombinatornim objektima?

Hvala na pažnji!