Višedimenzionalne Hadamardove matrice*

Vedran Krčadinac

PMF-MO

17.3.2023.

* This work was fully supported by the Croatian Science Foundation under the project 9752.

Hadamardove matrice

Hadamardova matrica je $H \in M_v(\{-1,1\})$ takva da je $H \cdot H^t = v\, I$.

Hadamardove matrice

Hadamardova matrica je $H \in M_v(\{-1,1\})$ takva da je $H \cdot H^t = v\, I$.

Primjeri. $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Hadamardove matrice

Hadamardova matrica je $H \in M_v(\{-1,1\})$ takva da je $H \cdot H^t = v\, I$.

Primjeri. $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

J. J. Sylvester, *Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign successions and tesselated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile work and the theory of numbers*, Phil. Mag. **34** (1867), 461–475.

Hadamardove matrice

Hadamardova matrica je $H \in M_v(\{-1,1\})$ takva da je $H \cdot H^t = v\, I$.

Primjeri. $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

J. J. Sylvester, *Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign successions and tesselated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile work and the theory of numbers*, Phil. Mag. **34** (1867), 461–475.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes H = \begin{bmatrix} H & H \\ H & -H \end{bmatrix}$$

Hadamardove matrice

J. Hadamard, *Résolution d'une question relative aux déterminants*, Bull. Sciences Math. (2) **17** (1893), 240–246.

Hadamardove matrice

J. Hadamard, *Résolution d'une question relative aux déterminants*, Bull. Sciences Math. (2) **17** (1893), 240–246.

$$|\det A|^2 \leq \prod_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{v} |a_{ij}|^2$$

Hadamardove matrice

J. Hadamard, *Résolution d'une question relative aux déterminants*, Bull. Sciences Math. (2) **17** (1893), 240–246.

$$|\det A|^2 \leq \prod_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{v} |a_{ij}|^2$$

Postoje Hadamardove matrice reda $v = 12$ i $v = 20$.

Hadamardove matrice

J. Hadamard, *Résolution d'une question relative aux déterminants*, Bull. Sciences Math. (2) **17** (1893), 240–246.

$$|\det A|^2 \leq \prod_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{v} |a_{ij}|^2$$

Postoje Hadamardove matrice reda $v = 12$ i $v = 20$.

Propozicija.

Ako postoji Hadamardova matrica reda v, onda je $v = 1$, $v = 2$ ili $v = 4u$.

Hadamardove matrice

J. Hadamard, *Résolution d'une question relative aux déterminants*, Bull. Sciences Math. (2) **17** (1893), 240–246.

$$|\det A|^2 \leq \prod_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{v} |a_{ij}|^2$$

Postoje Hadamardove matrice reda $v = 12$ i $v = 20$.

Propozicija.

Ako postoji Hadamardova matrica reda v, onda je $v = 1$, $v = 2$ ili $v = 4u$.

Hadamardova hipoteza:

Hadamardove matrice postoje za sve redove oblika $v = 4u$.

Hadamardove matrice

J. Hadamard, *Résolution d'une question relative aux déterminants*, Bull. Sciences Math. (2) **17** (1893), 240–246.

$$|\det A|^2 \leq \prod_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{v} |a_{ij}|^2$$

Postoje Hadamardove matrice reda $v = 12$ i $v = 20$.

Propozicija.

Ako postoji Hadamardova matrica reda v, onda je $v = 1$, $v = 2$ ili $v = 4u$.

Hadamardova hipoteza:

Hadamardove matrice postoje za sve redove oblika $v = 4u$.

Najmanji red za koji je egzistencija nepoznata: $v = 668 = 4 \cdot 167$.

Ekvivalencija Hadamardovih matrica

Dvije Hadamardove matrice su ekvivalentne ako se jedna može dobiti iz druge permutiranjem redaka/stupaca i množenjem redaka/stupaca s -1 (i transponiranjem).

Ekvivalencija Hadamardovih matrica

Dvije Hadamardove matrice su ekvivalentne ako se jedna može dobiti iz druge permutiranjem redaka/stupaca i množenjem redaka/stupaca s -1 (i transponiranjem).

$$\begin{bmatrix} - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & - \\ 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\ 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\ - & - & - & - & 1 & - & 1 & - \\ - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 \end{bmatrix}$$

Ekvivalencija Hadamardovih matrica

Dvije Hadamardove matrice su ekvivalentne ako se jedna može dobiti iz druge permutiranjem redaka/stupaca i množenjem redaka/stupaca s -1 (i transponiranjem).

$$\begin{bmatrix} 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\ 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\ - & - & - & - & 1 & - & 1 & - \\ - & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & 1 \end{bmatrix}$$

Ekvivalencija Hadamardovih matrica

Dvije Hadamardove matrice su ekvivalentne ako se jedna može dobiti iz druge permutiranjem redaka/stupaca i množenjem redaka/stupaca s -1 (i transponiranjem).

$$\begin{bmatrix} 1 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - \\ 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 \\ 1 & - & - & 1 & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - \end{bmatrix}$$

Ekvivalencija Hadamardovih matrica

Dvije Hadamardove matrice su ekvivalentne ako se jedna može dobiti iz druge permutiranjem redaka/stupaca i množenjem redaka/stupaca s -1 (i transponiranjem).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - \\ 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - & - & 1 & 1 & - \\ 1 & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & - \end{bmatrix}$$

Ekvivalencija Hadamardovih matrica

Dvije Hadamardove matrice su ekvivalentne ako se jedna može dobiti iz druge permutiranjem redaka/stupaca i množenjem redaka/stupaca s -1 (i transponiranjem).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & - & - \\ 1 & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - & - & 1 & 1 & - \\ 1 & - & - & - & 1 & 1 & - & 1 \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & - \end{bmatrix}$$

Ekvivalencija Hadamardovih matrica

Dvije Hadamardove matrice su ekvivalentne ako se jedna može dobiti iz druge permutiranjem redaka/stupaca i množenjem redaka/stupaca s -1 (i transponiranjem).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hadamardovi i Menonovi dizajni

Teorem.

Hadamardova matrica reda $4u$ postoji ako i samo ako postoji simetrični dizajn s parametrima $(4u-1, 2u-1, u-1)$.

Hadamardovi i Menonovi dizajni

Teorem.

Hadamardova matrica reda $4u$ postoji ako i samo ako postoji simetrični dizajn s parametrima $(4u-1, 2u-1, u-1)$.

Hadamardova matrica je regularna ako ima konstantne sume redaka i stupaca.

Hadamardovi i Menonovi dizajni

Teorem.

Hadamardova matrica reda $4u$ postoji ako i samo ako postoji simetrični dizajn s parametrima $(4u-1, 2u-1, u-1)$.

Hadamardova matrica je regularna ako ima konstantne sume redaka i stupaca.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hadamardovi i Menonovi dizajni

Teorem.

Hadamardova matrica reda $4u$ postoji ako i samo ako postoji simetrični dizajn s parametrima $(4u-1, 2u-1, u-1)$.

Hadamardova matrica je regularna ako ima konstantne sume redaka i stupaca.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorem.

Neka je $H \in M_v(\{-1,1\})$ i $A = \frac{1}{2}(H+J)$, za $v > 2$. H je regularna Hadamardova matrica ako i samo ako je $v = 4u^2$ i A je incidencijska matrica simetričnog $(4u^2, 2u^2 \pm u, u^2 \pm u)$ dizajna.

Višedimenzionalne Hadamardove matrice

Paul J. Shlichta, *Three- and four-dimensional Hadamard matrices*, Bull. Amer. Phys. Soc. **16 (8)** (1971), 825–826.

Paul J. Shlichta, *Higher dimensional Hadamard matrices*, IEEE Trans. Inform. Theory **25** (1979), no. 5, 566–572.

Višedimenzionalne Hadamardove matrice

Paul J. Shlichta, *Three- and four-dimensional Hadamard matrices*, Bull. Amer. Phys. Soc. **16 (8)** (1971), 825–826.

Paul J. Shlichta, *Higher dimensional Hadamard matrices*, IEEE Trans. Inform. Theory **25** (1979), no. 5, 566–572.

Hadamardova matrica dimenzije n i reda v je $H : \{1, \ldots, v\}^n \to \{-1, 1\}$ takva da su paralelni $(n-1)$-dimenzionalni slojevi međusobno ortogonalni:

$$\sum_{1 \le i_1, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_n \le v} H(i_1, \ldots, x, \ldots, i_n) H(i_1, \ldots, y, \ldots, i_n) = v^{n-1} \delta_{xy}$$

Višedimenzionalne Hadamardove matrice

Paul J. Shlichta, *Three- and four-dimensional Hadamard matrices*, Bull. Amer. Phys. Soc. **16 (8)** (1971), 825–826.

Paul J. Shlichta, *Higher dimensional Hadamard matrices*, IEEE Trans. Inform. Theory **25** (1979), no. 5, 566–572.

Hadamardova matrica dimenzije n i reda v je $H : \{1, \ldots, v\}^n \to \{-1, 1\}$ takva da su paralelni $(n-1)$-dimenzionalni slojevi međusobno ortogonalni:

$$\sum_{1 \le i_1, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_n \le v} H(i_1, \ldots, x, \ldots, i_n) H(i_1, \ldots, y, \ldots, i_n) = v^{n-1} \delta_{xy}$$

Prava Hadamardova matrica dimenzije n i reda v ima svojstvo da su svi 2-dimenzionalni slojevi ("šnite") dvodimenzionalne Hadamardove matrice.

Višedimenzionalne Hadamardove matrice

Paul J. Shlichta, *Three- and four-dimensional Hadamard matrices*, Bull. Amer. Phys. Soc. **16 (8)** (1971), 825–826.

Paul J. Shlichta, *Higher dimensional Hadamard matrices*, IEEE Trans. Inform. Theory **25** (1979), no. 5, 566–572.

Hadamardova matrica dimenzije n i reda v je $H : \{1, \ldots, v\}^n \to \{-1, 1\}$ takva da su paralelni $(n-1)$-dimenzionalni slojevi međusobno ortogonalni:

$$\sum_{1 \le i_1, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_n \le v} H(i_1, \ldots, x, \ldots, i_n) H(i_1, \ldots, y, \ldots, i_n) = v^{n-1} \delta_{xy}$$

Prava Hadamardova matrica dimenzije n i reda v ima svojstvo da su svi 2-dimenzionalni slojevi ("šnite") dvodimenzionalne Hadamardove matrice.

Paralelne slojeve dimenzije k dobivamo variranjem nekih k varijabli i fiksiranjem preostalih $n-k$ varijabli tako da se podudaraju osim u jednoj fiksnoj varijabli.

Višedimenzionalne Hadamardove matrice

Paul J. Shlichta, *Three- and four-dimensional Hadamard matrices*, Bull. Amer. Phys. Soc. **16 (8)** (1971), 825–826.

Paul J. Shlichta, *Higher dimensional Hadamard matrices*, IEEE Trans. Inform. Theory **25** (1979), no. 5, 566–572.

Hadamardova matrica dimenzije n i reda v je $H : \{1, \ldots, v\}^n \to \{-1, 1\}$ takva da su paralelni $(n-1)$-dimenzionalni slojevi međusobno ortogonalni:

$$\sum_{1 \le i_1, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_n \le v} H(i_1, \ldots, x, \ldots, i_n) H(i_1, \ldots, y, \ldots, i_n) = v^{n-1} \delta_{xy}$$

Prava Hadamardova matrica dimenzije n i reda v ima svojstvo da su svi 2-dimenzionalni slojevi ("šnite") dvodimenzionalne Hadamardove matrice.

Paralelne slojeve dimenzije k dobivamo variranjem nekih k varijabli i fiksiranjem preostalih $n-k$ varijabli tako da se podudaraju osim u jednoj fiksnoj varijabli. Stupanj "pravosti" (eng. *propriety*) Hadamardove matrice je najmanji d takav da su svi paralelni $(d-1)$-dim. slojevi ortogonalni.

Višedimenzionalne Hadamardove matrice

Neka je H Hadamardova matrica dimenzije n, reda v i stupnja d.

Višedimenzionalne Hadamardove matrice

Neka je H Hadamardova matrica dimenzije n, reda v i stupnja d.

- Svi paralelni $(k-1)$-dimenzionalni slojevi od H su ortogonalni, za $d \leq k \leq n$.

Višedimenzionalne Hadamardove matrice

Neka je H Hadamardova matrica dimenzije n, reda v i stupnja d.

- Svi paralelni $(k-1)$-dimenzionalni slojevi od H su ortogonalni, za $d \leq k \leq n$.
- Svaka k-dim. podmatrica od H je Hadamardova stupnja najviše d.

Višedimenzionalne Hadamardove matrice

Neka je H Hadamardova matrica dimenzije n, reda v i stupnja d.

- Svi paralelni $(k-1)$-dimenzionalni slojevi od H su ortogonalni, za $d \leq k \leq n$.
- Svaka k-dim. podmatrica od H je Hadamardova stupnja najviše d.
- H je prava Hadamardova matrica ako i samo ako je stupnja $d = 2$.

Višedimenzionalne Hadamardove matrice

Neka je H Hadamardova matrica dimenzije n, reda v i stupnja d.

- Svi paralelni $(k-1)$-dimenzionalni slojevi od H su ortogonalni, za $d \leq k \leq n$.
- Svaka k-dim. podmatrica od H je Hadamardova stupnja najviše d.
- H je prava Hadamardova matrica ako i samo ako je stupnja $d = 2$.

Propozicija.

- Ako postoji Hadamardova matrica dimenzije $n \geq 3$ i reda $v > 1$, onda je v paran.

Višedimenzionalne Hadamardove matrice

Neka je H Hadamardova matrica dimenzije n, reda v i stupnja d.

- Svi paralelni $(k-1)$-dimenzionalni slojevi od H su ortogonalni, za $d \leq k \leq n$.
- Svaka k-dim. podmatrica od H je Hadamardova stupnja najviše d.
- H je prava Hadamardova matrica ako i samo ako je stupnja $d = 2$.

Propozicija.

- Ako postoji Hadamardova matrica dimenzije $n \geq 3$ i reda $v > 1$, onda je v paran.
- Ako postoji prava Hadamardova matrica reda $v > 2$ (bilo koje dimenzije), onda je v djeljiv s 4.

Višedimenzionalne Hadamardove matrice

Neka je H Hadamardova matrica dimenzije n, reda v i stupnja d.

- Svi paralelni $(k-1)$-dimenzionalni slojevi od H su ortogonalni, za $d \leq k \leq n$.
- Svaka k-dim. podmatrica od H je Hadamardova stupnja najviše d.
- H je prava Hadamardova matrica ako i samo ako je stupnja $d = 2$.

Propozicija.

- Ako postoji Hadamardova matrica dimenzije $n \geq 3$ i reda $v > 1$, onda je v paran.
- Ako postoji prava Hadamardova matrica reda $v > 2$ (bilo koje dimenzije), onda je v djeljiv s 4.
- Postoje prave Hadamardove matrice svih dimenzija n i redova $v = 2^m$.

Višedimenzionalne Hadamardove matrice

Neka je H Hadamardova matrica dimenzije n, reda v i stupnja d.

- Svi paralelni $(k-1)$-dimenzionalni slojevi od H su ortogonalni, za $d \leq k \leq n$.
- Svaka k-dim. podmatrica od H je Hadamardova stupnja najviše d.
- H je prava Hadamardova matrica ako i samo ako je stupnja $d = 2$.

Propozicija.

- Ako postoji Hadamardova matrica dimenzije $n \geq 3$ i reda $v > 1$, onda je v paran.
- Ako postoji prava Hadamardova matrica reda $v > 2$ (bilo koje dimenzije), onda je v djeljiv s 4.
- Postoje prave Hadamardove matrice svih dimenzija n i redova $v = 2^m$.

Postoje li Hadamardove matrice dim. $n \geq 3$ i reda $v \equiv 2 \pmod 4$, $v > 2$?

Višedimenzionalne Hadamardove matrice

Neka je H Hadamardova matrica dimenzije n, reda v i stupnja d.

- Svi paralelni $(k-1)$-dimenzionalni slojevi od H su ortogonalni, za $d \leq k \leq n$.
- Svaka k-dim. podmatrica od H je Hadamardova stupnja najviše d.
- H je prava Hadamardova matrica ako i samo ako je stupnja $d = 2$.

Propozicija.

- Ako postoji Hadamardova matrica dimenzije $n \geq 3$ i reda $v > 1$, onda je v paran.
- Ako postoji prava Hadamardova matrica reda $v > 2$ (bilo koje dimenzije), onda je v djeljiv s 4.
- Postoje prave Hadamardove matrice svih dimenzija n i redova $v = 2^m$.

Postoje li Hadamardove matrice dim. $n \geq 3$ i reda $v \equiv 2 \pmod 4$, $v > 2$?

Postoje li prave Hadamardove matrice dimenzije $n \geq 3$ i reda $v \neq 2^m$?

Jennifer Seberry i Joseph Hammer

J. Seberry, *Higher-dimensional orthogonal designs and Hadamard matrices*, Combinatorial mathematics VII (Proc. Seventh Australian Conf., Univ. Newcastle, Newcastle, 1979), pp. 220–223, Lecture Notes in Math. **829**, Springer, Berlin, 1980.

J. Hammer, J. Seberry, *Higher-dimensional orthogonal designs and Hadamard matrices II*, Proceedings of the Ninth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (Univ. Manitoba, Winnipeg, Man., 1979), pp. 23–29, Congress. Numer. **XXVII**, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1980.

Jennifer Seberry i Joseph Hammer

J. Seberry, *Higher-dimensional orthogonal designs and Hadamard matrices*, Combinatorial mathematics VII (Proc. Seventh Australian Conf., Univ. Newcastle, Newcastle, 1979), pp. 220–223, Lecture Notes in Math. **829**, Springer, Berlin, 1980.

J. Hammer, J. Seberry, *Higher-dimensional orthogonal designs and Hadamard matrices II*, Proceedings of the Ninth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (Univ. Manitoba, Winnipeg, Man., 1979), pp. 23–29, Congress. Numer. **XXVII**, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1980.

- Definicija n-dimenzionalnih varijanti pojmova *orthogonal design* i *weighing matrix* i veze s n-dimenzionalnim Hadamardovim matricama.

Jennifer Seberry i Joseph Hammer

J. Seberry, *Higher-dimensional orthogonal designs and Hadamard matrices*, Combinatorial mathematics VII (Proc. Seventh Australian Conf., Univ. Newcastle, Newcastle, 1979), pp. 220–223, Lecture Notes in Math. **829**, Springer, Berlin, 1980.

J. Hammer, J. Seberry, *Higher-dimensional orthogonal designs and Hadamard matrices II*, Proceedings of the Ninth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (Univ. Manitoba, Winnipeg, Man., 1979), pp. 23–29, Congress. Numer. **XXVII**, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1980.

- Definicija n-dimenzionalnih varijanti pojmova *orthogonal design* i *weighing matrix* i veze s n-dimenzionalnim Hadamardovim matricama.
- Konstrukcija pravih n-dimenzionalnih Hadamardovih matrica od diferencijskih skupova.

Jennifer Seberry i Joseph Hammer

J. Seberry, *Higher-dimensional orthogonal designs and Hadamard matrices*, Combinatorial mathematics VII (Proc. Seventh Australian Conf., Univ. Newcastle, Newcastle, 1979), pp. 220–223, Lecture Notes in Math. **829**, Springer, Berlin, 1980.

J. Hammer, J. Seberry, *Higher-dimensional orthogonal designs and Hadamard matrices II*, Proceedings of the Ninth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (Univ. Manitoba, Winnipeg, Man., 1979), pp. 23–29, Congress. Numer. **XXVII**, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1980.

- Definicija n-dimenzionalnih varijanti pojmova *orthogonal design* i *weighing matrix* i veze s n-dimenzionalnim Hadamardovim matricama.
- Konstrukcija pravih n-dimenzionalnih Hadamardovih matrica od diferencijskih skupova.

$\Rightarrow$ Postoje prave n-dimenzionalne Hadamardove matrice reda $v \neq 2^m$.

Sos S. Agaian i dr.

S. S. Agaian, *On a three-dimensional Hadamard matrix of Williamson type*, Akad. Nauk Armyan. SSR Dokl. **72** (1981), no. 3, 131–134.

Sos S. Agaian i dr.

S. S. Agaian, *On a three-dimensional Hadamard matrix of Williamson type*, Akad. Nauk Armyan. SSR Dokl. **72** (1981), no. 3, 131–134.

S. S. Agaian, *Hadamard matrices and their applications*, Lecture Notes in Mathematics **1168**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

Sos S. Agaian i dr.

S. S. Agaian, *On a three-dimensional Hadamard matrix of Williamson type*, Akad. Nauk Armyan. SSR Dokl. **72** (1981), no. 3, 131–134.

S. S. Agaian, *Hadamard matrices and their applications*, Lecture Notes in Mathematics **1168**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

- Definicija n-dimenzionalne varijante *Butsonovih matrica*.

Sos S. Agaian i dr.

S. S. Agaian, *On a three-dimensional Hadamard matrix of Williamson type*, Akad. Nauk Armyan. SSR Dokl. **72** (1981), no. 3, 131–134.

S. S. Agaian, *Hadamard matrices and their applications*, Lecture Notes in Mathematics **1168**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

- Definicija n-dimenzionalne varijante *Butsonovih matrica*.

S. S. Agaian, H. G. Sarukhanyan, K. O. Egiazarian, J. Astola, *Hadamard transforms*, SPIE Press, 2011.

Sos S. Agaian i dr.

S. S. Agaian, *On a three-dimensional Hadamard matrix of Williamson type*, Akad. Nauk Armyan. SSR Dokl. **72** (1981), no. 3, 131–134.

S. S. Agaian, *Hadamard matrices and their applications*, Lecture Notes in Mathematics **1168**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

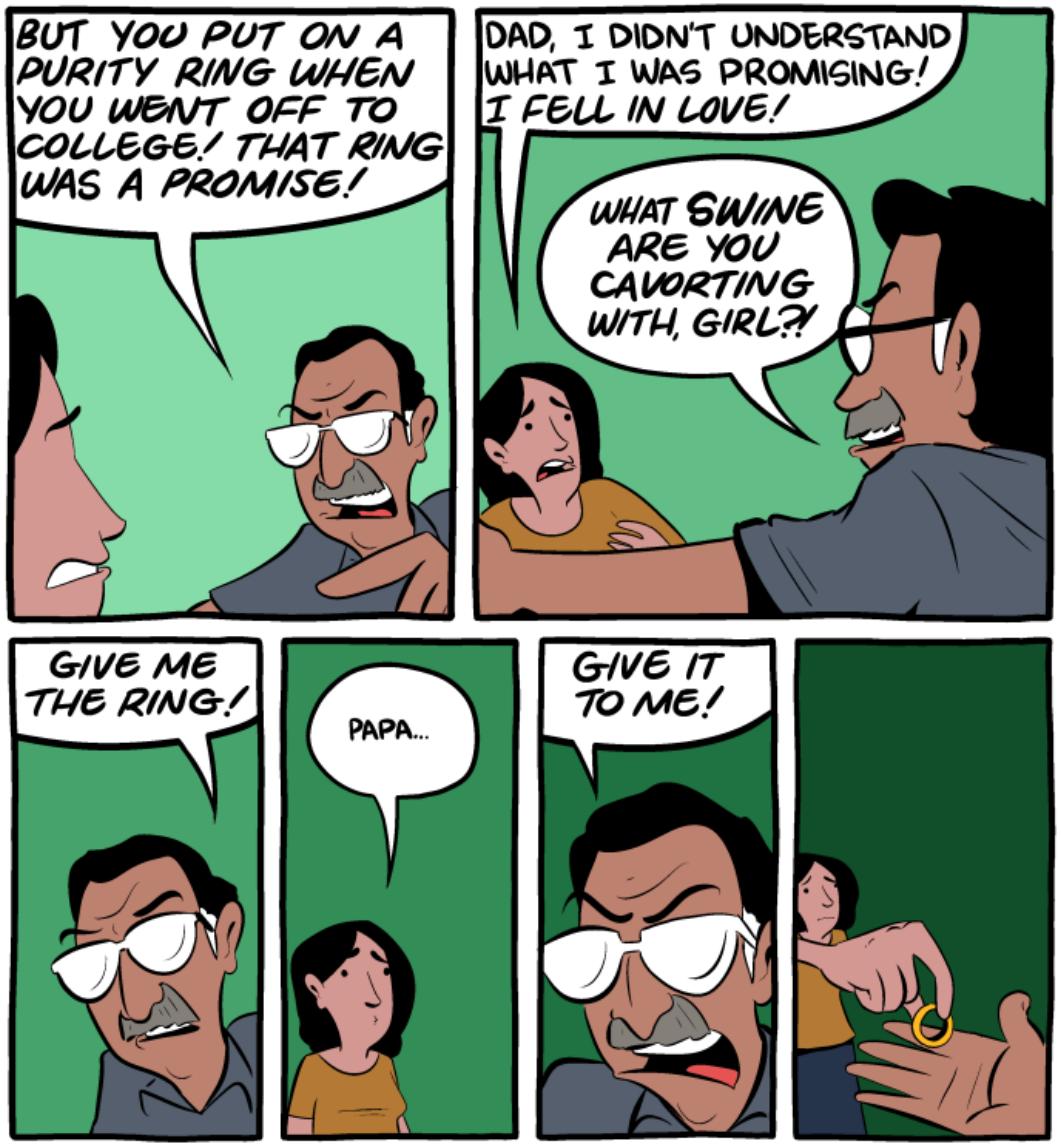
- Definicija n-dimenzionalne varijante *Butsonovih matrica*.

S. S. Agaian, H. G. Sarukhanyan, K. O. Egiazarian, J. Astola, *Hadamard transforms*, SPIE Press, 2011.

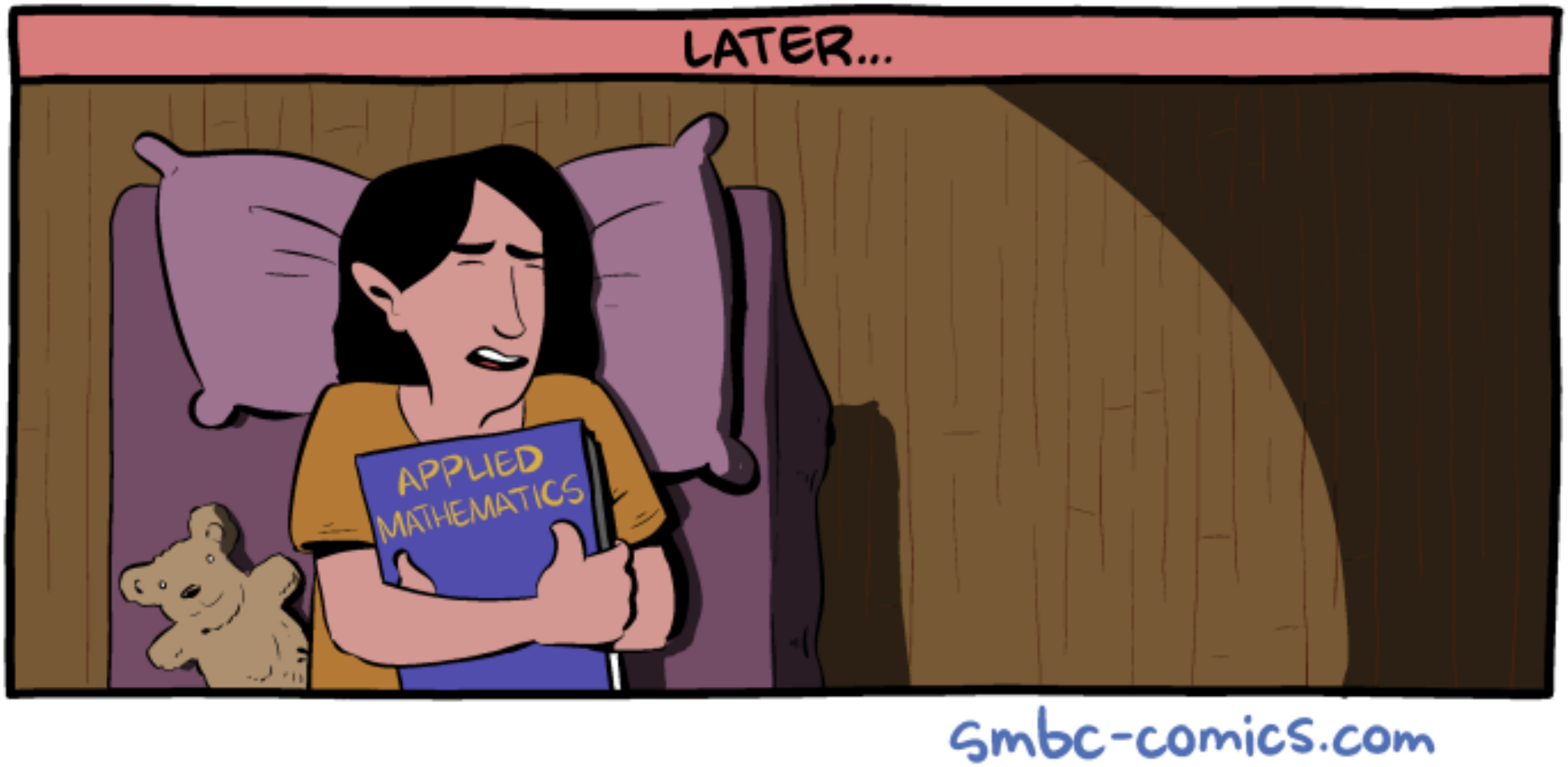
J. Seberry, M. Yamada, *Hadamard matrices, sequences, and block designs*, Contemporary design theory, 431–560, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Intersci. Publ., Wiley, New York, 1992.

J. Seberry, M. Yamada, *Hadamard matrices – constructions using number theory and algebra*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2020.

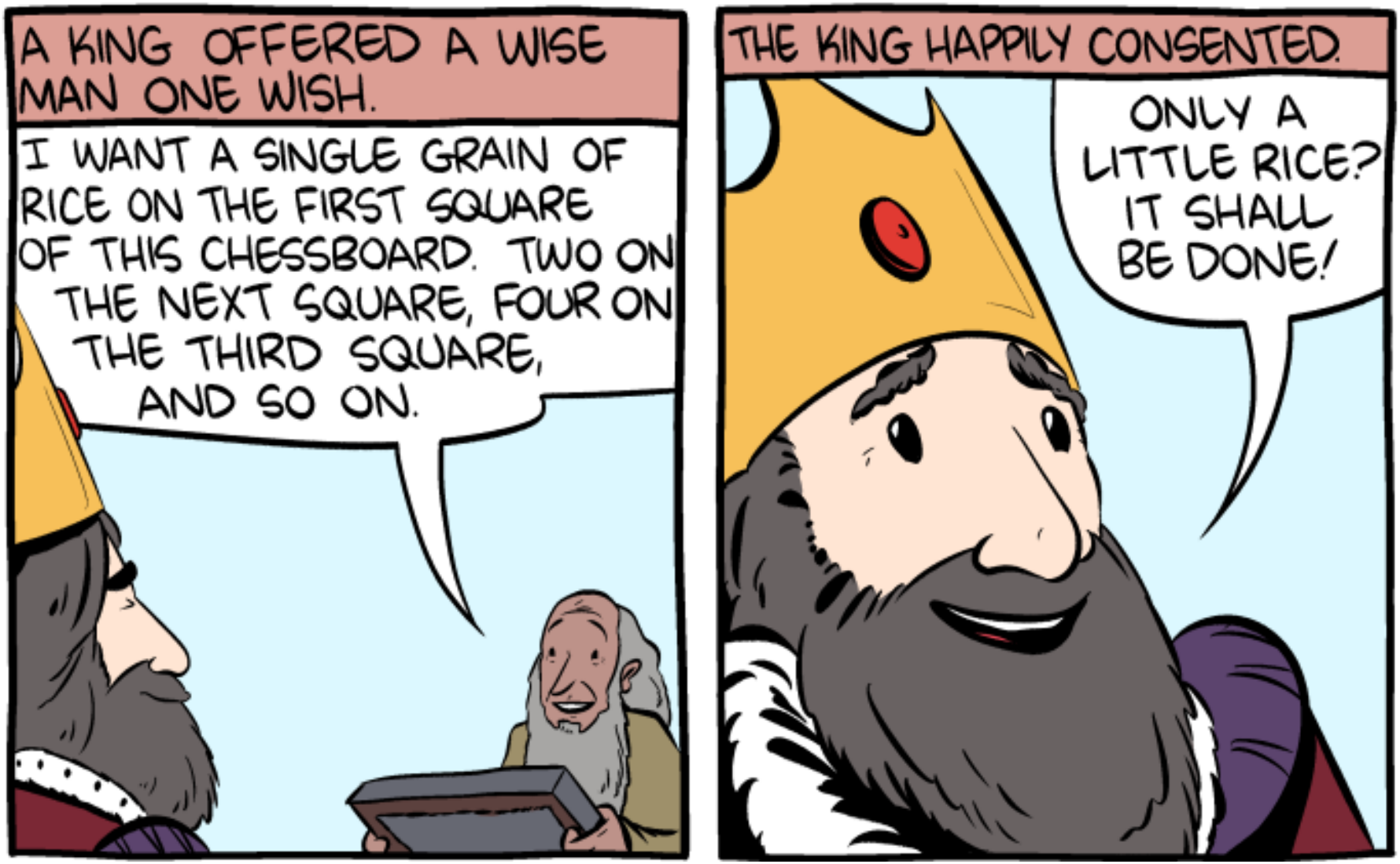
SMBC


BUT YOU PUT ON A PURITY RING WHEN YOU WENT OFF TO COLLEGE! THAT RING WAS A PROMISE!
DAD, I DIDN'T UNDERSTAND WHAT I WAS PROMISING! I FELL IN LOVE!
WHAT SWINE ARE YOU CAVORTING WITH, GIRL?!
GIVE ME THE RING!
PAPA...
GIVE IT TO ME!

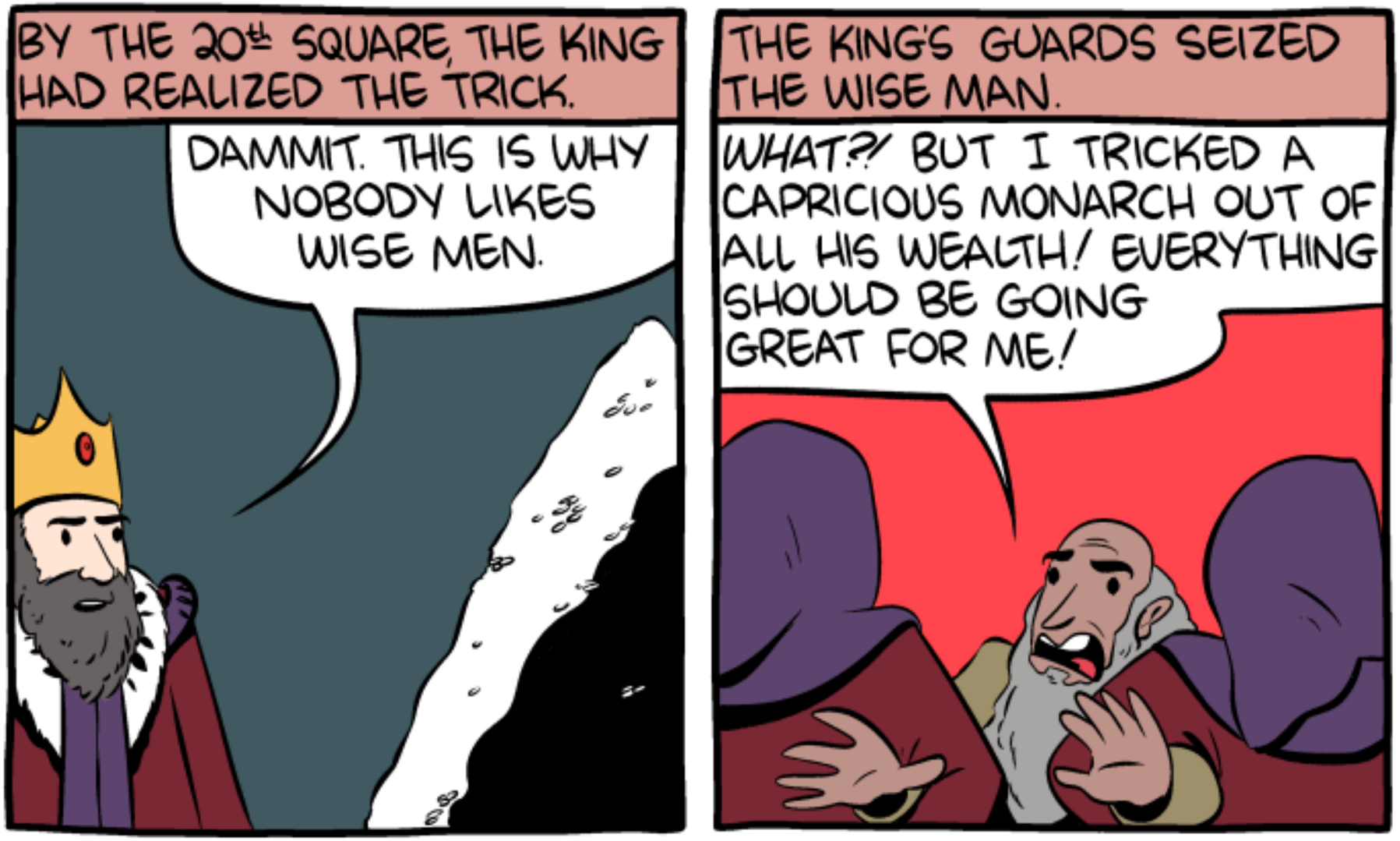
SMBC



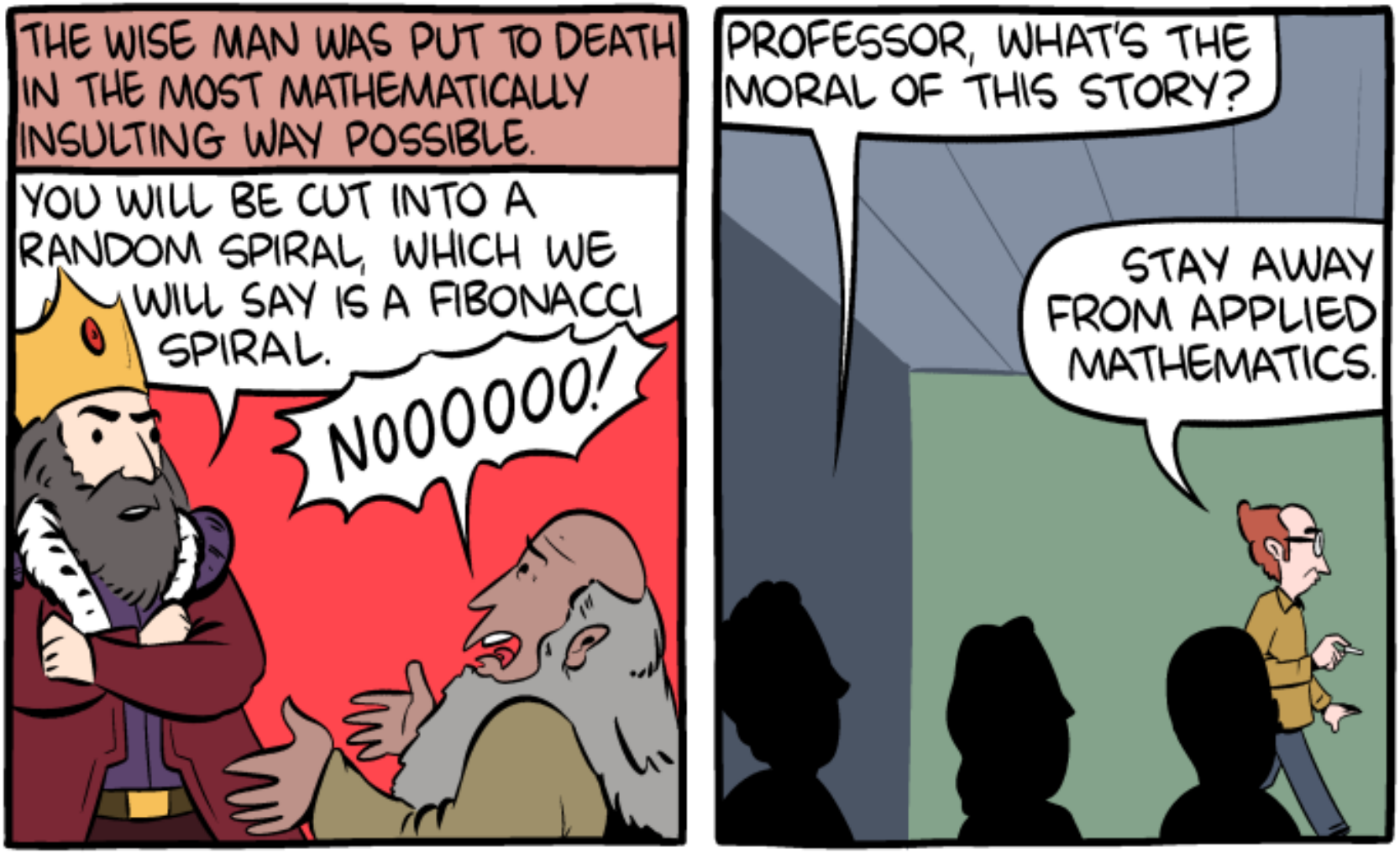
SMBC


A KING OFFERED A WISE MAN ONE WISH.
I WANT A SINGLE GRAIN OF RICE ON THE FIRST SQUARE OF THIS CHESSBOARD. TWO ON THE NEXT SQUARE, FOUR ON THE THIRD SQUARE, AND SO ON.
THE KING HAPPILY CONSENTED.
ONLY A LITTLE RICE? IT SHALL BE DONE!

SMBC


BY THE 20th SQUARE, THE KING HAD REALIZED THE TRICK.
DAMMIT. THIS IS WHY NOBODY LIKES WISE MEN.
THE KING'S GUARDS SEIZED THE WISE MAN.
WHAT?! BUT I TRICKED A CAPRICIOUS MONARCH OUT OF ALL HIS WEALTH! EVERYTHING SHOULD BE GOING GREAT FOR ME!

SMBC



smbc-comics.com

Yi Xian Yang

Y. X. Yang, *Proofs of some conjectures about higher-dimensional Hadamard matrices* (Chinese), Kexue Tongbao **31** (1986), no. 2, 85–88.

Yi Xian Yang

Y. X. Yang, *Proofs of some conjectures about higher-dimensional Hadamard matrices* (Chinese), Kexue Tongbao **31** (1986), no. 2, 85–88.

Produktna konstrukcija:

Neka je $h : \{1, \ldots, v\}^2 \to \{-1, 1\}$ dvodimenzionalna Hadamardova matrica reda v. Onda je

$$H(i_1, \ldots, i_n) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} h(i_j, i_k)$$

prava n-dimenzionalna Hadamardova matrica reda v.

Yi Xian Yang

Y. X. Yang, *Proofs of some conjectures about higher-dimensional Hadamard matrices* (Chinese), Kexue Tongbao **31** (1986), no. 2, 85–88.

Produktna konstrukcija:

Neka je $h : \{1, \ldots, v\}^2 \to \{-1, 1\}$ dvodimenzionalna Hadamardova matrica reda v. Onda je

$$H(i_1, \ldots, i_n) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} h(i_j, i_k)$$

prava n-dimenzionalna Hadamardova matrica reda v.

Y. X. Yang, X. X. Niu, C. Q. Xu, *Theory and applications of higher-dimensional Hadamard matrices, Second edition*, CRC Press, 2010.

Yi Xian Yang

Y. X. Yang, *Proofs of some conjectures about higher-dimensional Hadamard matrices* (Chinese), Kexue Tongbao **31** (1986), no. 2, 85–88.

Produktna konstrukcija:

Neka je $h : \{1, \ldots, v\}^2 \to \{-1, 1\}$ dvodimenzionalna Hadamardova matrica reda v. Onda je

$$H(i_1, \ldots, i_n) = \prod_{1 \le j < k \le n} h(i_j, i_k)$$

prava n-dimenzionalna Hadamardova matrica reda v.

Y. X. Yang, X. X. Niu, C. Q. Xu, *Theory and applications of higher-dimensional Hadamard matrices, Second edition*, CRC Press, 2010.

Postoje (neprave) n-dimenzionalne Hadamardove matrice reda $v = 6$ i za beskonačno mnogo drugih redova oblika $v \equiv 2 \pmod 4$.

Yi Xian Yang

Y. X. Yang, *Proofs of some conjectures about higher-dimensional Hadamard matrices* (Chinese), Kexue Tongbao **31** (1986), no. 2, 85–88.

Produktna konstrukcija:

Neka je $h : \{1, \ldots, v\}^2 \to \{-1, 1\}$ dvodimenzionalna Hadamardova matrica reda v. Onda je

$$H(i_1, \ldots, i_n) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} h(i_j, i_k)$$

prava n-dimenzionalna Hadamardova matrica reda v.

Y. X. Yang, X. X. Niu, C. Q. Xu, *Theory and applications of higher-dimensional Hadamard matrices, Second edition*, CRC Press, 2010.

Postoje (neprave) n-dimenzionalne Hadamardove matrice reda $v = 6$ i za beskonačno mnogo drugih redova oblika $v \equiv 2 \pmod 4$.

Otvoreno pitanje: postoje li za sve parne redove v?

Warwick de Launey

W. de Launey, *On the construction of n-dimensional designs from 2-dimensional designs*, Combin. mathematics and combin. computing, Vol. 1 (Brisbane, 1989), Australas. J. Combin. **1** (1990), 67–81.

Warwick de Launey

W. de Launey, *On the construction of n-dimensional designs from 2-dimensional designs*, Combin. mathematics and combin. computing, Vol. 1 (Brisbane, 1989), Australas. J. Combin. **1** (1990), 67–81.

Neka je S konačan skup simbola, Π grupa permutacija na S i $v \in \mathbb{N}$. Za matricu $X : \{1, \ldots, v\}^2 \to S$ kažemo da je (v, Π, β, S)-dizajn ako zadovoljava pravila balansiranosti β, koja su invarijantna na operacije:

(i) permutacije redaka i stupaca, (ii) transponiranje,

(iii) primjena permutacija iz Π na simbole u bilo kojem retku ili stupcu.

Warwick de Launey

W. de Launey, *On the construction of n-dimensional designs from 2-dimensional designs*, Combin. mathematics and combin. computing, Vol. 1 (Brisbane, 1989), Australas. J. Combin. **1** (1990), 67–81.

Neka je S konačan skup simbola, Π grupa permutacija na S i $v \in \mathbb{N}$. Za matricu $X : \{1, \ldots, v\}^2 \to S$ kažemo da je (v, Π, β, S)-dizajn ako zadovoljava pravila balansiranosti β, koja su invarijantna na operacije:

(i) permutacije redaka i stupaca, (ii) transponiranje,

(iii) primjena permutacija iz Π na simbole u bilo kojem retku ili stupcu.

Dizajni X i Y su ekvivalentni ako se jedan može prevesti u drugi konačnim nizom operacija tipa (i), (ii) i (iii).

Warwick de Launey

W. de Launey, *On the construction of n-dimensional designs from 2-dimensional designs*, Combin. mathematics and combin. computing, Vol. 1 (Brisbane, 1989), Australas. J. Combin. **1** (1990), 67–81.

Neka je S konačan skup simbola, Π grupa permutacija na S i $v \in \mathbb{N}$. Za matricu $X : \{1, \ldots, v\}^2 \to S$ kažemo da je (v, Π, β, S)-dizajn ako zadovoljava pravila balansiranosti β, koja su invarijantna na operacije:

(i) permutacije redaka i stupaca, (ii) transponiranje,

(iii) primjena permutacija iz Π na simbole u bilo kojem retku ili stupcu.

Dizajni X i Y su ekvivalentni ako se jedan može prevesti u drugi konačnim nizom operacija tipa (i), (ii) i (iii).

Primjer. $S = \{-1, 1\}$, $\Pi = \langle(-1\ 1)\rangle$, β: svaka dva retka su ortogonalna

Warwick de Launey

W. de Launey, *On the construction of n-dimensional designs from 2-dimensional designs*, Combin. mathematics and combin. computing, Vol. 1 (Brisbane, 1989), Australas. J. Combin. **1** (1990), 67–81.

Neka je S konačan skup simbola, Π grupa permutacija na S i $v \in \mathbb{N}$. Za matricu $X : \{1, \ldots, v\}^2 \to S$ kažemo da je (v, Π, β, S)-dizajn ako zadovoljava pravila balansiranosti β, koja su invarijantna na operacije:

(i) permutacije redaka i stupaca, (ii) transponiranje,

(iii) primjena permutacija iz Π na simbole u bilo kojem retku ili stupcu.

Dizajni X i Y su ekvivalentni ako se jedan može prevesti u drugi konačnim nizom operacija tipa (i), (ii) i (iii).

Primjer. $S = \{-1, 1\}$, $\Pi = \langle(-1\ 1)\rangle$, β: svaka dva retka su ortogonalna

$\rightsquigarrow$ Hadamardove matrice

Warwick de Launey

W. de Launey, *On the construction of n-dimensional designs from 2-dimensional designs*, Combin. mathematics and combin. computing, Vol. 1 (Brisbane, 1989), Australas. J. Combin. **1** (1990), 67–81.

Neka je S konačan skup simbola, Π grupa permutacija na S i $v \in \mathbb{N}$. Za matricu $X : \{1, \ldots, v\}^2 \to S$ kažemo da je (v, Π, β, S)-dizajn ako zadovoljava pravila balansiranosti β, koja su invarijantna na operacije:

(i) permutacije redaka i stupaca, (ii) transponiranje,

(iii) primjena permutacija iz Π na simbole u bilo kojem retku ili stupcu.

Dizajni X i Y su ekvivalentni ako se jedan može prevesti u drugi konačnim nizom operacija tipa (i), (ii) i (iii).

Primjer. $S = \{-1, 1\}$, $\Pi = \langle(-1\ 1)\rangle$, β: svaka dva retka su ortogonalna

$\rightsquigarrow$ Hadamardove matrice

Primjer. $S = \{0, 1\}$, $\Pi = \langle()\rangle$, β: sume stupaca su k, skalarni produkti redaka su λ

Warwick de Launey

W. de Launey, *On the construction of n-dimensional designs from 2-dimensional designs*, Combin. mathematics and combin. computing, Vol. 1 (Brisbane, 1989), Australas. J. Combin. **1** (1990), 67–81.

Neka je S konačan skup simbola, Π grupa permutacija na S i $v \in \mathbb{N}$. Za matricu $X : \{1, \ldots, v\}^2 \to S$ kažemo da je (v, Π, β, S)-dizajn ako zadovoljava pravila balansiranosti β, koja su invarijantna na operacije:

(i) permutacije redaka i stupaca, (ii) transponiranje,

(iii) primjena permutacija iz Π na simbole u bilo kojem retku ili stupcu.

Dizajni X i Y su ekvivalentni ako se jedan može prevesti u drugi konačnim nizom operacija tipa (i), (ii) i (iii).

Primjer. $S = \{-1, 1\}$, $\Pi = \langle(-1\ 1)\rangle$, β: svaka dva retka su ortogonalna

$\rightsquigarrow$ Hadamardove matrice

Primjer. $S = \{0, 1\}$, $\Pi = \langle()\rangle$, β: sume stupaca su k, skalarni produkti redaka su λ $\rightsquigarrow$ simetrični (v, k, λ) dizajni

Warwick de Launey

Drugi primjeri: ortogonalni dizajni, *weighing* matrice, latinski kvadrati...

Warwick de Launey

Drugi primjeri: ortogonalni dizajni, *weighing* matrice, latinski kvadrati...

Pravi n-dimenzionalni $(v, \Pi, \beta, S)^n$-dizajn je funkcija $X : \{1, \ldots, v\}^n \to S$ takva da su sve dvodimenzionalne "šnite" dizajni (v, Π, β, S).

Warwick de Launey

Drugi primjeri: ortogonalni dizajni, *weighing* matrice, latinski kvadrati...

Pravi n-dimenzionalni $(v, \Pi, \beta, S)^n$-dizajn je funkcija $X : \{1, \ldots, v\}^n \to S$ takva da su sve dvodimenzionalne "šnite" dizajni (v, Π, β, S).

Teorem. (*"Group development"* konstrukcija)

Neka je $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$ grupa i $f : G \to S$ funkcija takva da je $X_2(i, j) = f(g_i \cdot g_j)$ dizajn (v, Π, β, S). Onda je $X_n(i_1, \ldots, i_n) = f(g_{i_1} \cdots g_{i_n})$ pravi n-dimenzionalni dizajn $(v, \Pi, \beta, S)^n$.

Warwick de Launey

Drugi primjeri: ortogonalni dizajni, *weighing* matrice, latinski kvadrati...

Pravi n-dimenzionalni $(v, \Pi, \beta, S)^n$-dizajn je funkcija $X : \{1, \ldots, v\}^n \to S$ takva da su sve dvodimenzionalne "šnite" dizajni (v, Π, β, S).

Teorem. (*"Group development"* konstrukcija)

Neka je $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$ grupa i $f : G \to S$ funkcija takva da je $X_2(i, j) = f(g_i \cdot g_j)$ dizajn (v, Π, β, S). Onda je $X_n(i_1, \ldots, i_n) = f(g_{i_1} \cdots g_{i_n})$ pravi n-dimenzionalni dizajn $(v, \Pi, \beta, S)^n$.

Specijalni slučajevi:

1. Konstrukcija n-dimenzionalnih Hadamardovih matrica iz diferencijskih skupova od Hammer i Seberry.

Warwick de Launey

Drugi primjeri: ortogonalni dizajni, *weighing* matrice, latinski kvadrati...

Pravi n-dimenzionalni $(v, \Pi, \beta, S)^n$-dizajn je funkcija $X : \{1, \ldots, v\}^n \to S$ takva da su sve dvodimenzionalne "šnite" dizajni (v, Π, β, S).

Teorem. (*"Group development"* konstrukcija)

Neka je $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$ grupa i $f : G \to S$ funkcija takva da je $X_2(i, j) = f(g_i \cdot g_j)$ dizajn (v, Π, β, S). Onda je $X_n(i_1, \ldots, i_n) = f(g_{i_1} \cdots g_{i_n})$ pravi n-dimenzionalni dizajn $(v, \Pi, \beta, S)^n$.

Specijalni slučajevi:

1. Konstrukcija n-dimenzionalnih Hadamardovih matrica iz diferencijskih skupova od Hammer i Seberry.

2. Naše diferencijske kocke simetričnih dizajna.

Warwick de Launey

Drugi primjeri: ortogonalni dizajni, *weighing* matrice, latinski kvadrati...

Pravi n-dimenzionalni $(v, \Pi, \beta, S)^n$-dizajn je funkcija $X : \{1, \ldots, v\}^n \to S$ takva da su sve dvodimenzionalne "šnite" dizajni (v, Π, β, S).

Teorem. (*"Group development"* konstrukcija)

Neka je $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$ grupa i $f : G \to S$ funkcija takva da je $X_2(i, j) = f(g_i \cdot g_j)$ dizajn (v, Π, β, S). Onda je $X_n(i_1, \ldots, i_n) = f(g_{i_1} \cdots g_{i_n})$ pravi n-dimenzionalni dizajn $(v, \Pi, \beta, S)^n$.

Specijalni slučajevi:

1. Konstrukcija n-dimenzionalnih Hadamardovih matrica iz diferencijskih skupova od Hammer i Seberry.

2. Naše diferencijske kocke simetričnih dizajna.

Problem: Hadamardove matrice dobivene iz diferencijskih skupova su regularne i mogu postojati samo za redove oblika $v = 4u^2$.

Warwick de Launey i Kathryn Horadam

W. de Launey, K. J. Horadam, *A weak difference set construction for higher-dimensional designs*, Des. Codes Cryptogr. **3** (1993), no. 1, 75–87.

Warwick de Launey i Kathryn Horadam

W. de Launey, K. J. Horadam, *A weak difference set construction for higher-dimensional designs*, Des. Codes Cryptogr. **3** (1993), no. 1, 75–87.

Funkcija $\psi : G \times G \to \Pi$ je Abelova funkcija proširenja (*abelian extension function*, AEF) ako vrijedi:

(1) $\psi(a,b) \circ \psi(c,d) = \psi(c,d) \circ \psi(a,b)$, $\forall a,b,c,d \in G$,

(2) $\psi(a,b) \circ \psi(ab,c) = \psi(a,bc) \circ \psi(b,c)$, $\forall a,b,c \in G$.

Warwick de Launey i Kathryn Horadam

W. de Launey, K. J. Horadam, *A weak difference set construction for higher-dimensional designs*, Des. Codes Cryptogr. **3** (1993), no. 1, 75–87.

Funkcija $\psi : G \times G \to \Pi$ je Abelova funkcija proširenja (*abelian extension function*, AEF) ako vrijedi:

(1) $\psi(a,b) \circ \psi(c,d) = \psi(c,d) \circ \psi(a,b)$, $\forall a,b,c,d \in G$,

(2) $\psi(a,b) \circ \psi(ab,c) = \psi(a,bc) \circ \psi(b,c)$, $\forall a,b,c \in G$.

Teorem. (*"Cocyclic development"* konstrukcija)

Neka je $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$ grupa, $\psi : G \times G \to \Pi$ AEF i $f : G \to S$ funkcija takva da je $X_2(i,j) = \psi(g_i, g_j) f(g_i \cdot g_j)$ dizajn (v, Π, β, S). Onda je $X_n(i_1, \ldots, i_n) = \psi(g_{i_1}, g_{i_2}) \circ \psi(g_{i_1} g_{i_2}, g_{i_3}) \circ \ldots \circ \psi(g_{i_1} \cdots g_{i_{n-1}}, g_{i_n})\, f(g_{i_1} \cdots g_{i_n})$ pravi n-dimenzionalni dizajn $(v, \Pi, \beta, S)^n$.

Warwick de Launey i Kathryn Horadam

W. de Launey, K. J. Horadam, *A weak difference set construction for higher-dimensional designs*, Des. Codes Cryptogr. **3** (1993), no. 1, 75–87.

Funkcija $\psi : G \times G \to \Pi$ je Abelova funkcija proširenja (*abelian extension function*, AEF) ako vrijedi:

(1) $\psi(a,b) \circ \psi(c,d) = \psi(c,d) \circ \psi(a,b)$, $\forall a,b,c,d \in G$,

(2) $\psi(a,b) \circ \psi(ab,c) = \psi(a,bc) \circ \psi(b,c)$, $\forall a,b,c \in G$.

Teorem. (*"Cocyclic development"* konstrukcija)

Neka je $G = \{g_1, \ldots, g_v\}$ grupa, $\psi : G \times G \to \Pi$ AEF i $f : G \to S$ funkcija takva da je $X_2(i,j) = \psi(g_i, g_j) f(g_i \cdot g_j)$ dizajn (v, Π, β, S). Onda je $X_n(i_1, \ldots, i_n) = \psi(g_{i_1}, g_{i_2}) \circ \psi(g_{i_1} g_{i_2}, g_{i_3}) \circ \ldots \circ \psi(g_{i_1} \cdots g_{i_{n-1}}, g_{i_n})\, f(g_{i_1} \cdots g_{i_n})$ pravi n-dimenzionalni dizajn $(v, \Pi, \beta, S)^n$.

Funkcija $\psi : G \times G \to C$ u Abelovu grupu C koja zadovoljava svojstvo (2) zove se 2-kociklus iz G u C s trivijalnim djelovanjem. Takve funkcije pojavljuju se u teoriji kohomologije grupa.

Warwick de Launey i Kathryn Horadam

Hadamardovu matricu koju možemo konstruirati s pomoću AEF zovemo kocikličkom.

Warwick de Launey i Kathryn Horadam

Hadamardovu matricu koju možemo konstruirati s pomoću AEF zovemo kocikličkom.

Teorem.

Kocikličke Hadamardove matrice postoje za sve redove $v = 4u \leq 100$.

Warwick de Launey i Kathryn Horadam

Hadamardovu matricu koju možemo konstruirati s pomoću AEF zovemo kocikličkom.

Teorem.

Kocikličke Hadamardove matrice postoje za sve redove $v = 4u \leq 100$.

Osnažena Hadamardova hipoteza:

Kocikličke Hadamardove matrice postoje za sve redove oblika $v = 4u$.

Warwick de Launey i Kathryn Horadam

Hadamardovu matricu koju možemo konstruirati s pomoću AEF zovemo kocikličkom.

Teorem.

Kocikličke Hadamardove matrice postoje za sve redove $v = 4u \leq 100$.

Osnažena Hadamardova hipoteza:

Kocikličke Hadamardove matrice postoje za sve redove oblika $v = 4u$.

Grupovna konstrukcija $(v, \Pi, \beta, S)^n$-dizajna je specijalni slučaj kocikličke konstrukcije za $\psi(a, b) = 1$, $\forall a, b \in G$.

Warwick de Launey i Kathryn Horadam

Hadamardovu matricu koju možemo konstruirati s pomoću AEF zovemo kocikličkom.

Teorem.

Kocikličke Hadamardove matrice postoje za sve redove $v = 4u \leq 100$.

Osnažena Hadamardova hipoteza:

Kocikličke Hadamardove matrice postoje za sve redove oblika $v = 4u$.

Grupovna konstrukcija $(v, \Pi, \beta, S)^n$-dizajna je specijalni slučaj kocikličke konstrukcije za $\psi(a, b) = 1$, $\forall a, b \in G$.

U slučaju n-dimenzionalnih Hadamardovih matrica, produktna konstrukcija je također specijalni slučaj kocikličke konstrukcije! Uzimamo $f(a) = 1$, $\forall a \in G$ i $\psi : G \times G \to \{-1, 1\}$ koja je homomorfizam u prvoj varijabli (zbog svojstva (2) i u drugoj varijabli).

Warwick de Launey, Kathryn Horadam i Dane Flannery

D. L. Flannery, *Cocyclic Hadamard matrices and Hadamard groups are equivalent*, J. Algebra **192** (1997), no. 2, 749–779.

Warwick de Launey, Kathryn Horadam i Dane Flannery

D. L. Flannery, *Cocyclic Hadamard matrices and Hadamard groups are equivalent*, J. Algebra **192** (1997), no. 2, 749–779.

- N. Ito, *On Hadamard groups*, J. Algebra **168** (1994), no. 3, 981–987.
- N. Ito, *On Hadamard groups II*, J. Algebra **169** (1994), no. 3, 936–942.

Warwick de Launey, Kathryn Horadam i Dane Flannery

D. L. Flannery, *Cocyclic Hadamard matrices and Hadamard groups are equivalent*, J. Algebra **192** (1997), no. 2, 749–779.

- N. Ito, *On Hadamard groups*, J. Algebra **168** (1994), no. 3, 981–987.
- N. Ito, *On Hadamard groups II*, J. Algebra **169** (1994), no. 3, 936–942.

W. de Launey, D. L. Flannery, K. J. Horadam, *Cocyclic Hadamard matrices and difference sets*, Coding, cryptography and computer security (Lethbridge, AB, 1998), Discrete Appl. Math. **102** (2000), no. 1-2, 47–61.

Warwick de Launey, Kathryn Horadam i Dane Flannery

D. L. Flannery, *Cocyclic Hadamard matrices and Hadamard groups are equivalent*, J. Algebra **192** (1997), no. 2, 749–779.

- N. Ito, *On Hadamard groups*, J. Algebra **168** (1994), no. 3, 981–987.
- N. Ito, *On Hadamard groups II*, J. Algebra **169** (1994), no. 3, 936–942.

W. de Launey, D. L. Flannery, K. J. Horadam, *Cocyclic Hadamard matrices and difference sets*, Coding, cryptography and computer security (Lethbridge, AB, 1998), Discrete Appl. Math. **102** (2000), no. 1-2, 47–61.

- J. E. H. Elliott, A. T. Butson, *Relative difference sets*, Illinois J. Math. **10** (1966), 517–531.
- D. Jungnickel, *On automorphism groups of divisible designs*, Canadian J. Math. **34** (1982), no. 2, 257–297.
- J. Jedwab, *Generalized perfect arrays and Menon difference sets*, Des. Codes Cryptogr. **2** (1992), no. 1, 19–68.

Warwick de Launey, Kathryn Horadam i Dane Flannery

Teorem.

Ekvivalentno je:

- Postoji kociklička Hadamardova matrica reda $v = 4t$ nad grupom G.
- Postoji Hadamardova grupa E reda $8t$ s centralnom podgrupom $\langle -1 \rangle$ i $G = E/\langle -1 \rangle$.
- Postoji relativni $(4t, 2, 4t, 2t)$-diferencijski skup u centralnom proširenju $\langle -1 \rangle$ s G, obzirom na podgrupu $\langle -1 \rangle$.
- Postoji G-kociklički "*perfect binary array*" nad G.

Kathryn Horadam

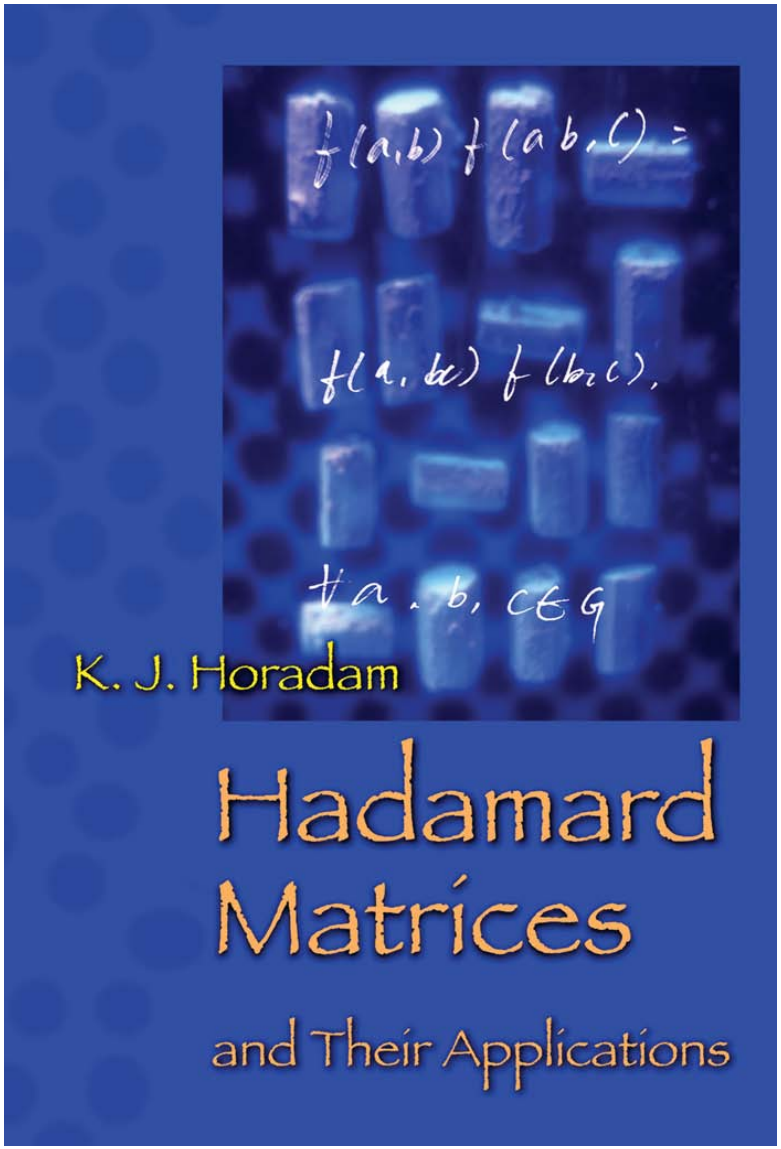
K. J. Horadam, *Hadamard matrices and their applications*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.

Kathryn Horadam

K. J. Horadam, *Hadamard matrices and their applications*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.

> *"Chapter 3 gives an impressive survey of applications in signal processing, coding theory and cryptography, which stands out as extremely well written and informative. There is some irony in seeing one whose training appears to be in* ***pure math*** *write what seems to be a definitive guide, while efforts by workers in these applied fields appear to have fallen short – in terms of accessibility of the writing, or of scope, or of technical merit of the work." —Robert Craigen*

Kathryn Horadam



Warwick de Launey i Dane Flannery

W. de Launey, D. Flannery, *Algebraic design theory*, Mathematical Surveys and Monographs **175**, American Math. Society, Providence, RI, 2011.

Warwick de Launey i Dane Flannery

W. de Launey, D. Flannery, *Algebraic design theory*, Mathematical Surveys and Monographs **175**, American Math. Society, Providence, RI, 2011.

> *"Throughout his career Warwick de Launey established new paradigms for orthogonal matrices and designs... he and Dane Flannery completed most of this book-length treatment of the subject, which Flannery completed soon after de Launey's death from cancer in 2010. The resulting text is a collaborative effort in which de Launey's ideas and style are supported within a self-contained algebraic superstructure developed by Flannery. The influence of others is also evident – notably that of Kathy Horadam, who played an important role in developing cocyclic design theory, which features prominently in this text."* —*Robert Craigen*

Ekvivalencija višedimenzionalnih Hadamardovih matrica

Kenneth Ma, *Equivalence classes of n-dimensional proper Hadamard matrices*, Australas. J. Combin. **25** (2002), 3–17.

Ekvivalencija višedimenzionalnih Hadamardovih matrica

Kenneth Ma, *Equivalence classes of n-dimensional proper Hadamard matrices*, Australas. J. Combin. **25** (2002), 3–17.

Teorem.

Sve "šnite" prave n-dimenzionalne Hadamardove matrice dobivene kocikličkom konstrukcijom međusobno su ekvivalentne. Ista tvrdnja vrijedi za produktnu konstrukciju i grupovnu konstrukciju.

Ekvivalencija višedimenzionalnih Hadamardovih matrica

Kenneth Ma, *Equivalence classes of n-dimensional proper Hadamard matrices*, Australas. J. Combin. **25** (2002), 3–17.

Teorem.

Sve "šnite" prave n-dimenzionalne Hadamardove matrice dobivene kocikličkom konstrukcijom međusobno su ekvivalentne. Ista tvrdnja vrijedi za produktnu konstrukciju i grupovnu konstrukciju.

Dvije n-dimenzionalne Hadamardove matrice reda v su ekvivalentne ako se jedna može dobiti iz druge primjenom permutacija iz S_v na pojedinim koordinatama i množenjem $(n-1)$-dimenzionalnih podmatrica s -1.

Ekvivalencija višedimenzionalnih Hadamardovih matrica

Kenneth Ma, *Equivalence classes of n-dimensional proper Hadamard matrices*, Australas. J. Combin. **25** (2002), 3–17.

Teorem.

Sve "šnite" prave n-dimenzionalne Hadamardove matrice dobivene kocikličkom konstrukcijom međusobno su ekvivalentne. Ista tvrdnja vrijedi za produktnu konstrukciju i grupovnu konstrukciju.

Dvije n-dimenzionalne Hadamardove matrice reda v su ekvivalentne ako se jedna može dobiti iz druge primjenom permutacija iz S_v na pojedinim koordinatama i množenjem $(n-1)$-dimenzionalnih podmatrica s -1.

Ma then goes on to show, as one would expect, that for any $n \geq 2$, if H and H' are equivalent Hadamard matrices, then the proper n-dimensional Hadamard matrices $\mathcal{P}(n, v, H)$ and $\mathcal{P}(n, v, H')$ are equivalent. He also shows that, if $H = \mathcal{G}(2, v, G, \phi)$ and $H' = \mathcal{G}(2, v, G', \phi')$ are permutation equivalent (only), then $\mathcal{G}(n, v, G, \phi)$ and $\mathcal{G}(n, v, G', \phi')$ are equivalent. It is likely that the result holds in general, but it has not yet been demonstrated.

Ekvivalencija višedimenzionalnih Hadamardovih matrica

Kenneth Ma, *Equivalence classes of n-dimensional proper Hadamard matrices*, Australas. J. Combin. **25** (2002), 3–17.

Teorem.

Sve "šnite" prave n-dimenzionalne Hadamardove matrice dobivene kocikličkom konstrukcijom međusobno su ekvivalentne. Ista tvrdnja vrijedi za produktnu konstrukciju i grupovnu konstrukciju.

Dvije n-dimenzionalne Hadamardove matrice reda v su ekvivalentne ako se jedna može dobiti iz druge primjenom permutacija iz S_v na pojedinim koordinatama i množenjem $(n-1)$-dimenzionalnih podmatrica s -1.

Research Problem 29 *Show that, if $\mathcal{G}(2, v, G, \phi)$ and $\mathcal{G}(2, v, G', \phi')$ are equivalent, then for any $n \geq 2$, $\mathcal{G}(n, v, G, \phi)$ and $\mathcal{G}(n, v, G', \phi')$ are equivalent.*

Research Problem 30 *Determine the number of equivalence classes of proper n-dimensional Hadamard matrices of order 2.*

Ekvivalencija višedimenzionalnih Hadamardovih matrica

W. de Launey, R. M. Stafford, *Automorphisms of higher-dimensional Hadamard matrices*, J. Combin. Des. **16** (2008), no. 6, 507–544.

Ekvivalencija višedimenzionalnih Hadamardovih matrica

W. de Launey, R. M. Stafford, *Automorphisms of higher-dimensional Hadamard matrices*, J. Combin. Des. **16** (2008), no. 6, 507–544.

Summary: "This article derives from first principles a definition of equivalence for higher-dimensional Hadamard matrices and thereby a definition of the automorphism group for higher-dimensional Hadamard matrices..."

Ekvivalencija višedimenzionalnih Hadamardovih matrica

W. de Launey, R. M. Stafford, *Automorphisms of higher-dimensional Hadamard matrices*, J. Combin. Des. **16** (2008), no. 6, 507–544.

> *Summary: "This article derives from first principles a definition of equivalence for higher-dimensional Hadamard matrices and thereby a definition of the automorphism group for higher-dimensional Hadamard matrices..."*

Dvije n-dimenzionalne Hadamardove matrice reda v su ekvivalentne ako se jedna može dobiti iz druge primjenom permutacija iz S_v na pojedinim koordinatama, množenjem $(n-1)$-dimenzionalnih podmatrica s -1 **te permutiranjem redoslijeda koordinata permutacijom iz S_n.**

Ekvivalencija višedimenzionalnih Hadamardovih matrica

W. de Launey, R. M. Stafford, *Automorphisms of higher-dimensional Hadamard matrices*, J. Combin. Des. **16** (2008), no. 6, 507–544.

> *Summary: "This article derives from first principles a definition of equivalence for higher-dimensional Hadamard matrices and thereby a definition of the automorphism group for higher-dimensional Hadamard matrices..."*

Dvije n-dimenzionalne Hadamardove matrice reda v su ekvivalentne ako se jedna može dobiti iz druge primjenom permutacija iz S_v na pojedinim koordinatama, množenjem $(n-1)$-dimenzionalnih podmatrica s -1 **te permutiranjem redoslijeda koordinata permutacijom iz S_n.**

Teorem.

Sve prave n-dimenzionalne Hadamardove matrice reda $v = 2$ su međusobno ekvivalentne.

Ekvivalencija višedimenzionalnih Hadamardovih matrica

W. de Launey, R. M. Stafford, *Automorphisms of higher-dimensional Hadamard matrices*, J. Combin. Des. **16** (2008), no. 6, 507–544.

Teorem.

Postoji konstanta $c > 1$ takva da od svake dvodimenzionalne Hadamardove matrice reda $v > 2$ produktnom konstrukcijom dobivamo bar c^v neekvivalentnih pravih n-dimenzionalnih Hadamardovih matrica.

Veze s kockama simetričnih dizajna

Postoje tri $(16, 6, 2)$ dizajna do na izomorfizam i dualnost:

$$|\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_1)| = 11520, \quad |\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_2)| = 768, \quad |\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_3)| = 384$$

Veze s kockama simetričnih dizajna

Postoje tri $(16, 6, 2)$ dizajna do na izomorfizam i dualnost:

$$|\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_1)| = 11520, \quad |\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_2)| = 768, \quad |\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_3)| = 384$$

Parametri su Menonovog tipa $(4u^2, 2u^2 - u, u^2 - u)$ za $u = 2$, pa zamjenom $0 \to -1$ dobivamo tri regularne Hadamardove matrice:

$$|\operatorname{Aut}(H_1)| = 20643840, \quad |\operatorname{Aut}(H_2)| = 589824, \quad |\operatorname{Aut}(H_3)| = 98304$$

Veze s kockama simetričnih dizajna

Postoje tri $(16, 6, 2)$ dizajna do na izomorfizam i dualnost:

$$|\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_1)| = 11520, \quad |\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_2)| = 768, \quad |\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_3)| = 384$$

Parametri su Menonovog tipa $(4u^2, 2u^2 - u, u^2 - u)$ za $u = 2$, pa zamjenom $0 \to -1$ dobivamo tri regularne Hadamardove matrice:

$$|\operatorname{Aut}(H_1)| = 20643840, \quad |\operatorname{Aut}(H_2)| = 589824, \quad |\operatorname{Aut}(H_3)| = 98304$$

Postoji još jedna Hadamardova matrica reda 16 s $|\operatorname{Aut}(H_4)| = 86016$ koju nismo dobili jer nije ekvivalentna regularnoj Hadamardovoj matrici.

Veze s kockama simetričnih dizajna

Postoje tri $(16, 6, 2)$ dizajna do na izomorfizam i dualnost:

$$|\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_1)| = 11520, \quad |\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_2)| = 768, \quad |\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_3)| = 384$$

Parametri su Menonovog tipa $(4u^2, 2u^2 - u, u^2 - u)$ za $u = 2$, pa zamjenom $0 \to -1$ dobivamo tri regularne Hadamardove matrice:

$$|\operatorname{Aut}(H_1)| = 20643840, \quad |\operatorname{Aut}(H_2)| = 589824, \quad |\operatorname{Aut}(H_3)| = 98304$$

Postoji još jedna Hadamardova matrica reda 16 s $|\operatorname{Aut}(H_4)| = 86016$ koju nismo dobili jer nije ekvivalentna regularnoj Hadamardovoj matrici.

Konstruirao sam 2396 neekvivalentnih trodimenzionalnih kocka simetričnih $(16, 6, 2)$ dizajna. Od toga je 27 diferencijskih, 946 grupovnih nediferencijskih i 1423 negrupovnih.

Veze s kockama simetričnih dizajna

Postoje tri $(16, 6, 2)$ dizajna do na izomorfizam i dualnost:

$$|\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_1)| = 11520, \quad |\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_2)| = 768, \quad |\operatorname{Aut}(\mathcal{D}_3)| = 384$$

Parametri su Menonovog tipa $(4u^2, 2u^2 - u, u^2 - u)$ za $u = 2$, pa zamjenom $0 \to -1$ dobivamo tri regularne Hadamardove matrice:

$$|\operatorname{Aut}(H_1)| = 20643840, \quad |\operatorname{Aut}(H_2)| = 589824, \quad |\operatorname{Aut}(H_3)| = 98304$$

Postoji još jedna Hadamardova matrica reda 16 s $|\operatorname{Aut}(H_4)| = 86016$ koju nismo dobili jer nije ekvivalentna regularnoj Hadamardovoj matrici.

Konstruirao sam 2396 neekvivalentnih trodimenzionalnih kocka simetričnih $(16, 6, 2)$ dizajna. Od toga je 27 diferencijskih, 946 grupovnih nediferencijskih i 1423 negrupovnih. Zamjenom $0 \to -1$ prevodimo ih u "totalno regularne" trodimenzionalne Hadamardove matrice. Možda su neke ekvivalentne, ali među njima sigurno ima onih koje nisu kocikličke jer im "šnite" nisu sve ekvivalentne!

Veze s kockama simetričnih dizajna

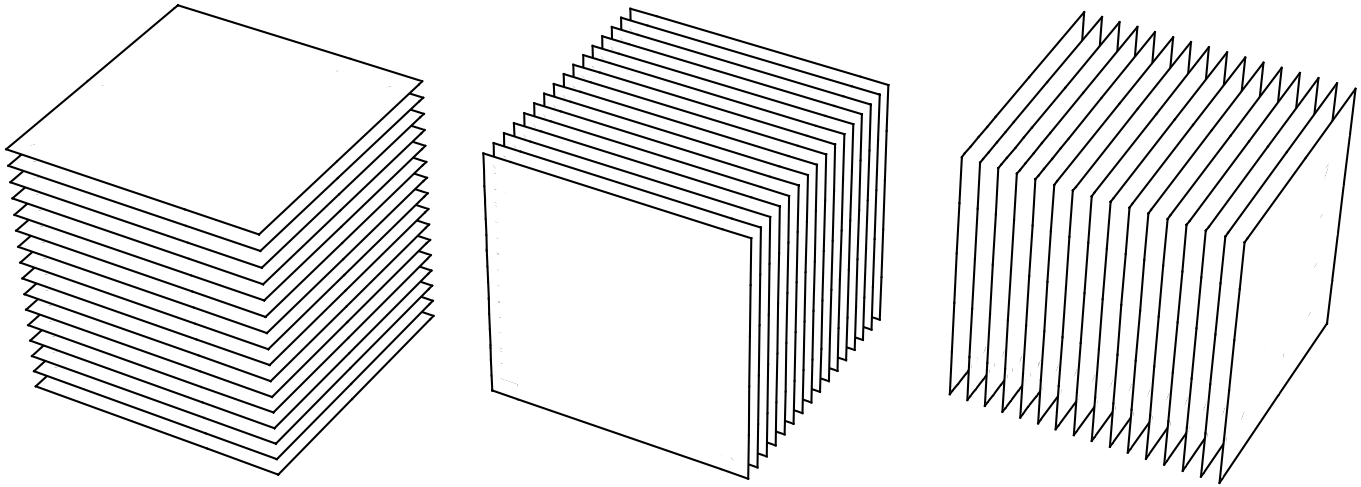
RBr	Invarijanta	Ndc	Ngc	Nngc
1	$\{\{\mathcal{D}_1^{16}\}^3\}$	24	204	383
2	$\{\{\mathcal{D}_2^{16}\}^3\}$	1	21	32
3	$\{\{\mathcal{D}_3^{16}\}^3\}$	2	43	1
4	$\{\{\mathcal{D}_1^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_2^{16}\}^1\}$	0	15	392
5	$\{\{\mathcal{D}_1^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_3^{16}\}^1\}$	0	46	2
6	$\{\{\mathcal{D}_2^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^{16}\}^1\}$	0	284	444
7	$\{\{\mathcal{D}_2^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_3^{16}\}^1\}$	0	53	0
8	$\{\{\mathcal{D}_3^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^{16}\}^1\}$	0	189	77
9	$\{\{\mathcal{D}_3^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_2^{16}\}^1\}$	0	14	0
10	$\{\{\mathcal{D}_1^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^{8}, \mathcal{D}_2^{8}\}^1\}$	0	6	72
11	$\{\{\mathcal{D}_1^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^{8}, \mathcal{D}_3^{8}\}^1\}$	0	15	0
12	$\{\{\mathcal{D}_2^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^{12}, \mathcal{D}_2^{4}\}^1\}$	0	4	0
13	$\{\{\mathcal{D}_2^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^{8}, \mathcal{D}_2^{8}\}^1\}$	0	6	0

Veze s kockama simetričnih dizajna

RBr	Invarijanta	Ndc	Ngc	Nngc
14	$\{\{\mathcal{D}_2^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^4, \mathcal{D}_2^{12}\}^1\}$	0	4	0
15	$\{\{\mathcal{D}_2^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^{12}, \mathcal{D}_3^4\}^1\}$	0	10	0
16	$\{\{\mathcal{D}_2^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^8, \mathcal{D}_3^8\}^1\}$	0	15	0
17	$\{\{\mathcal{D}_2^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^4, \mathcal{D}_3^{12}\}^1\}$	0	10	0
18	$\{\{\mathcal{D}_3^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^{12}, \mathcal{D}_2^4\}^1\}$	0	2	0
19	$\{\{\mathcal{D}_3^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^8, \mathcal{D}_2^8\}^1\}$	0	4	0
20	$\{\{\mathcal{D}_3^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^4, \mathcal{D}_2^{12}\}^1\}$	0	2	0
21	$\{\{\mathcal{D}_3^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^{12}, \mathcal{D}_3^4\}^1\}$	0	6	0
22	$\{\{\mathcal{D}_3^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^8, \mathcal{D}_3^8\}^1\}$	0	14	0
23	$\{\{\mathcal{D}_3^{16}\}^2, \{\mathcal{D}_1^4, \mathcal{D}_3^{12}\}^1\}$	0	6	0
24	$\{\{\mathcal{D}_1^4, \mathcal{D}_2^{12}\}^3\}$	0	0	8
25	$\{\{\mathcal{D}_1^{12}, \mathcal{D}_2^4\}^2, \{\mathcal{D}_1^4, \mathcal{D}_2^{12}\}^1\}$	0	0	12

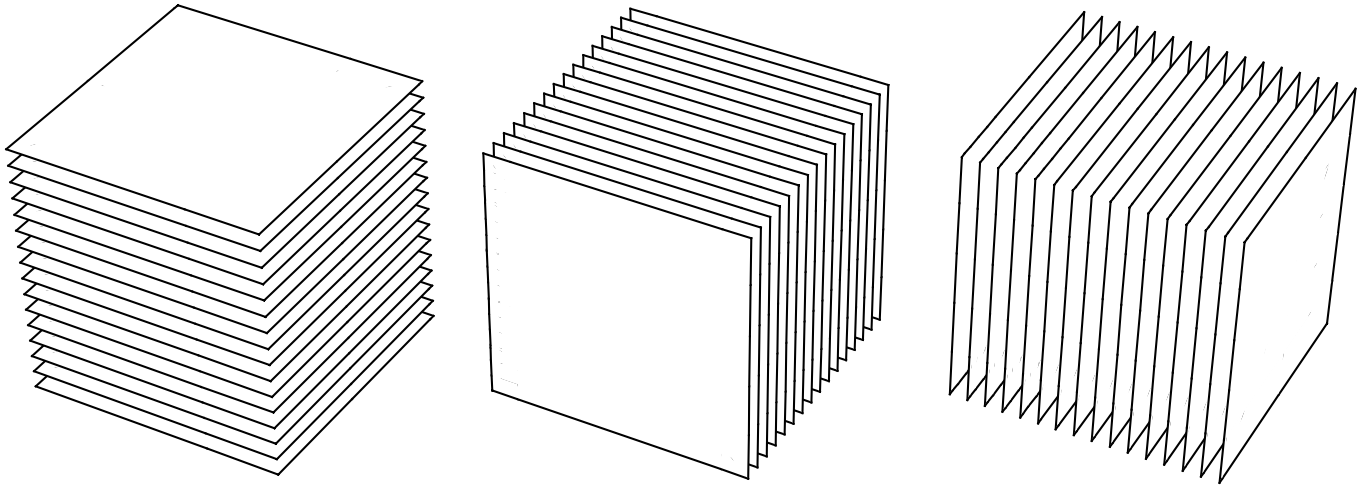
Veze s kockama simetričnih dizajna

Šnite:



Veze s kockama simetričnih dizajna

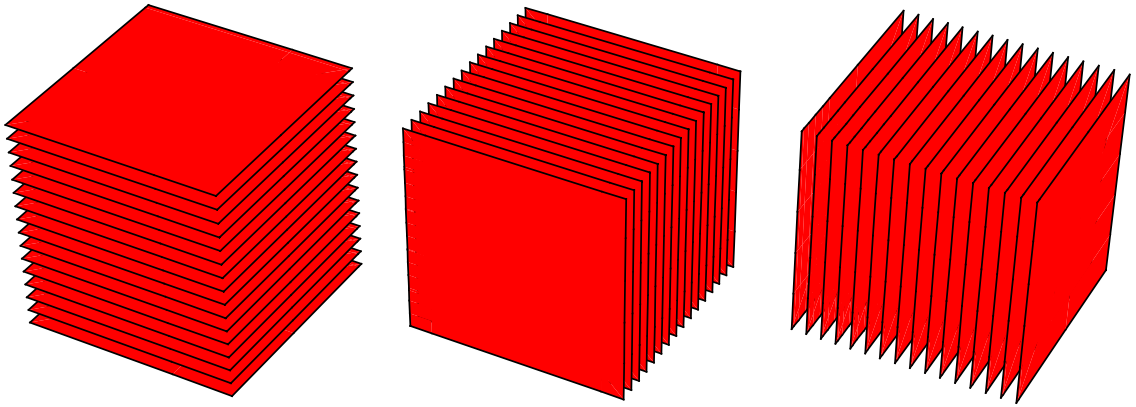
Šnite:



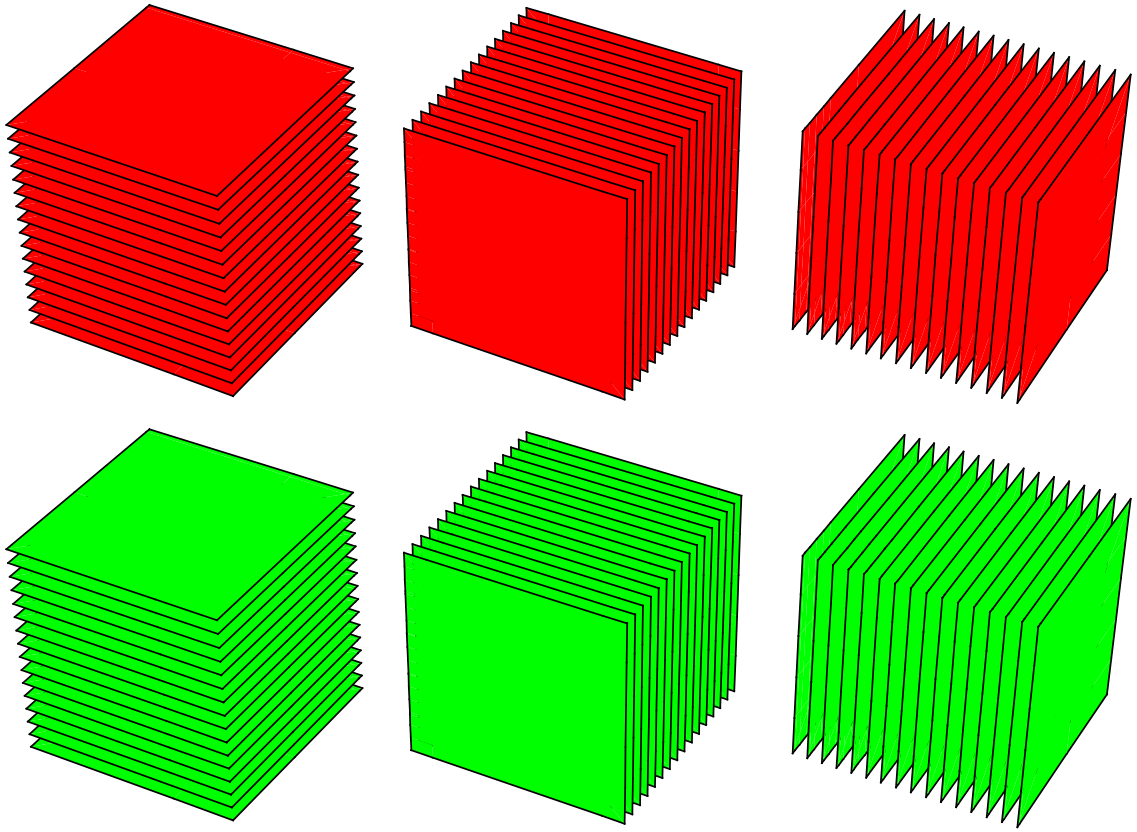
Dizajni / Hadamardove matrice:

$\mathcal{D}_1$ / H_1 $\mathcal{D}_2$ / H_2 $\mathcal{D}_3$ / H_3

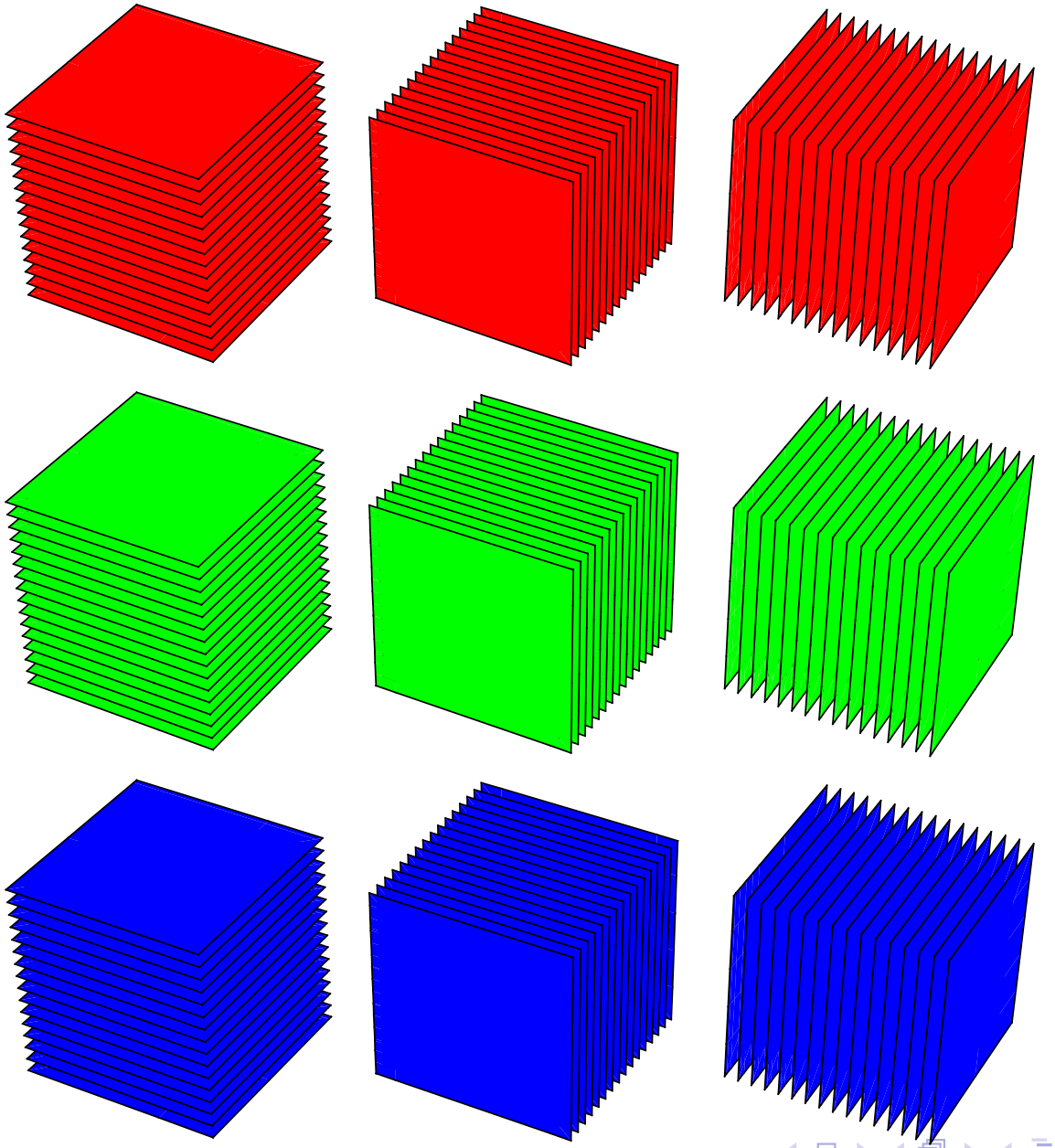
Veze s kockama simetričnih dizajna



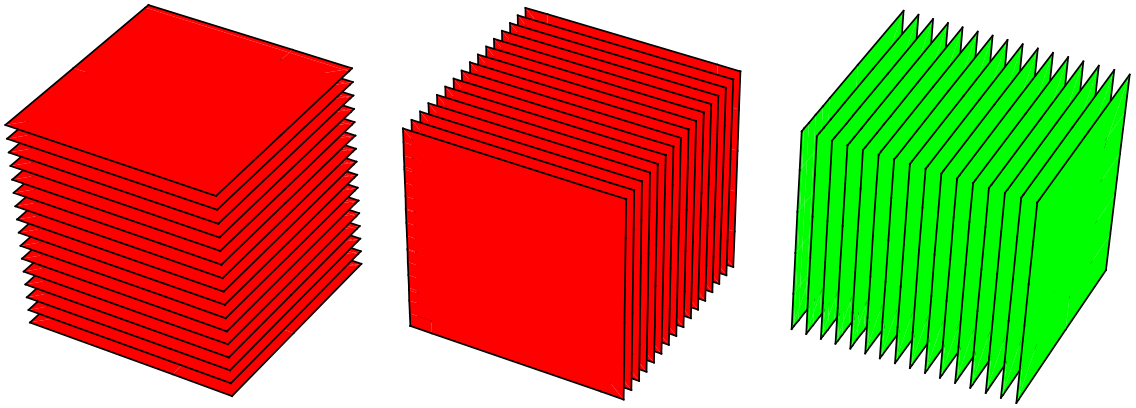
Veze s kockama simetričnih dizajna



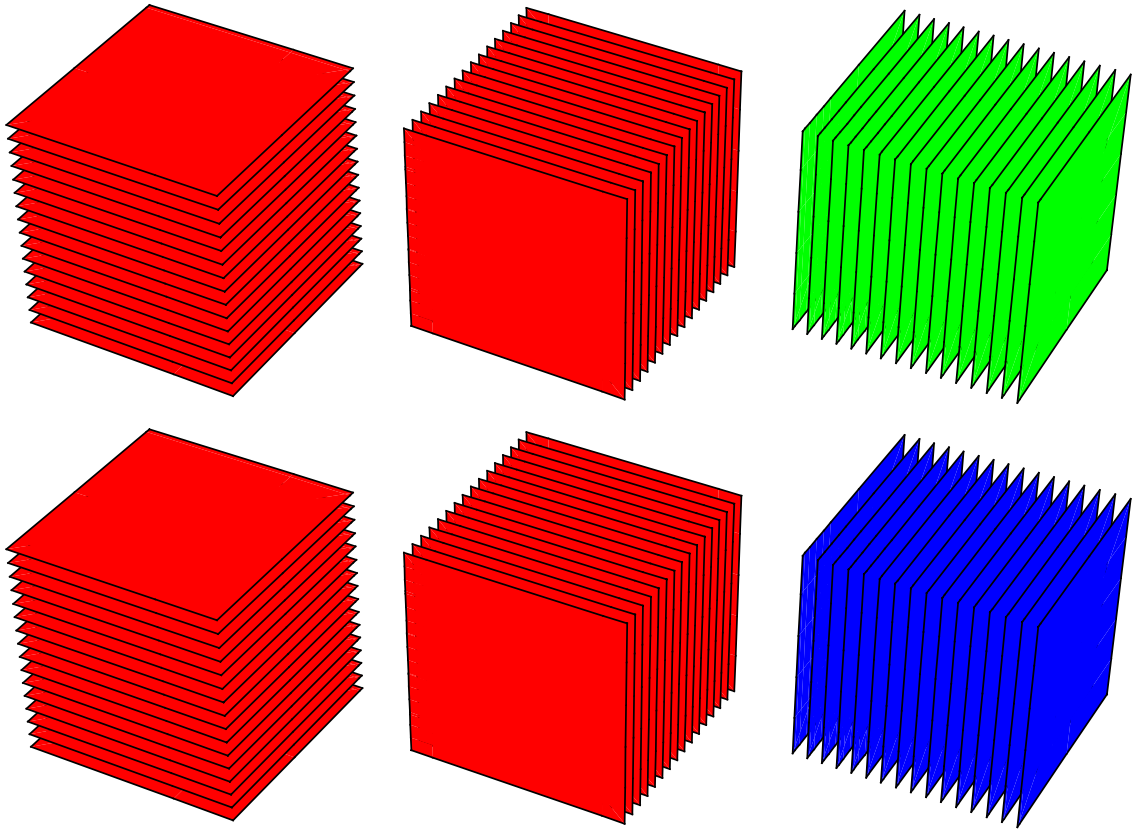
Veze s kockama simetričnih dizajna



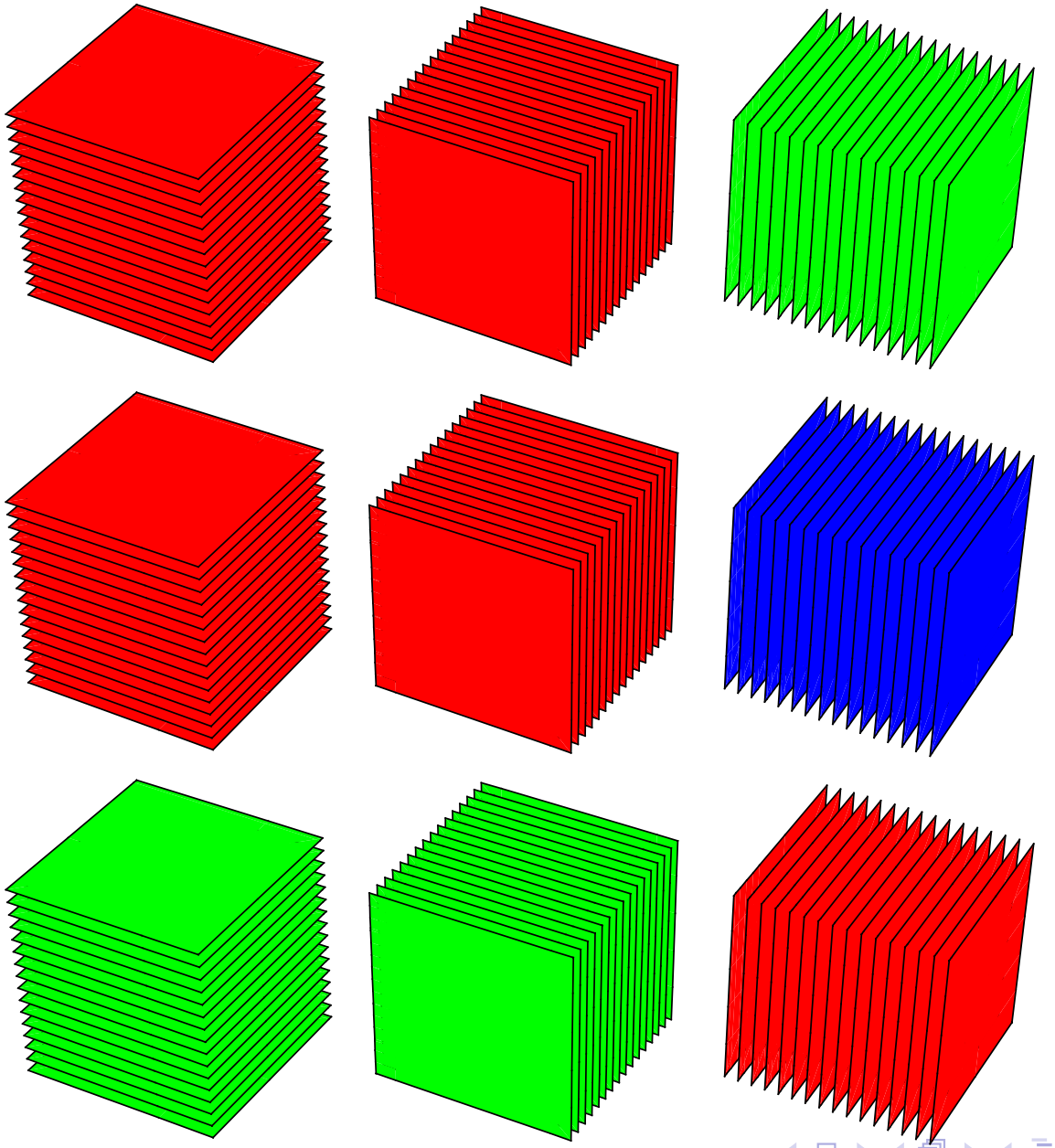
Veze s kockama simetričnih dizajna



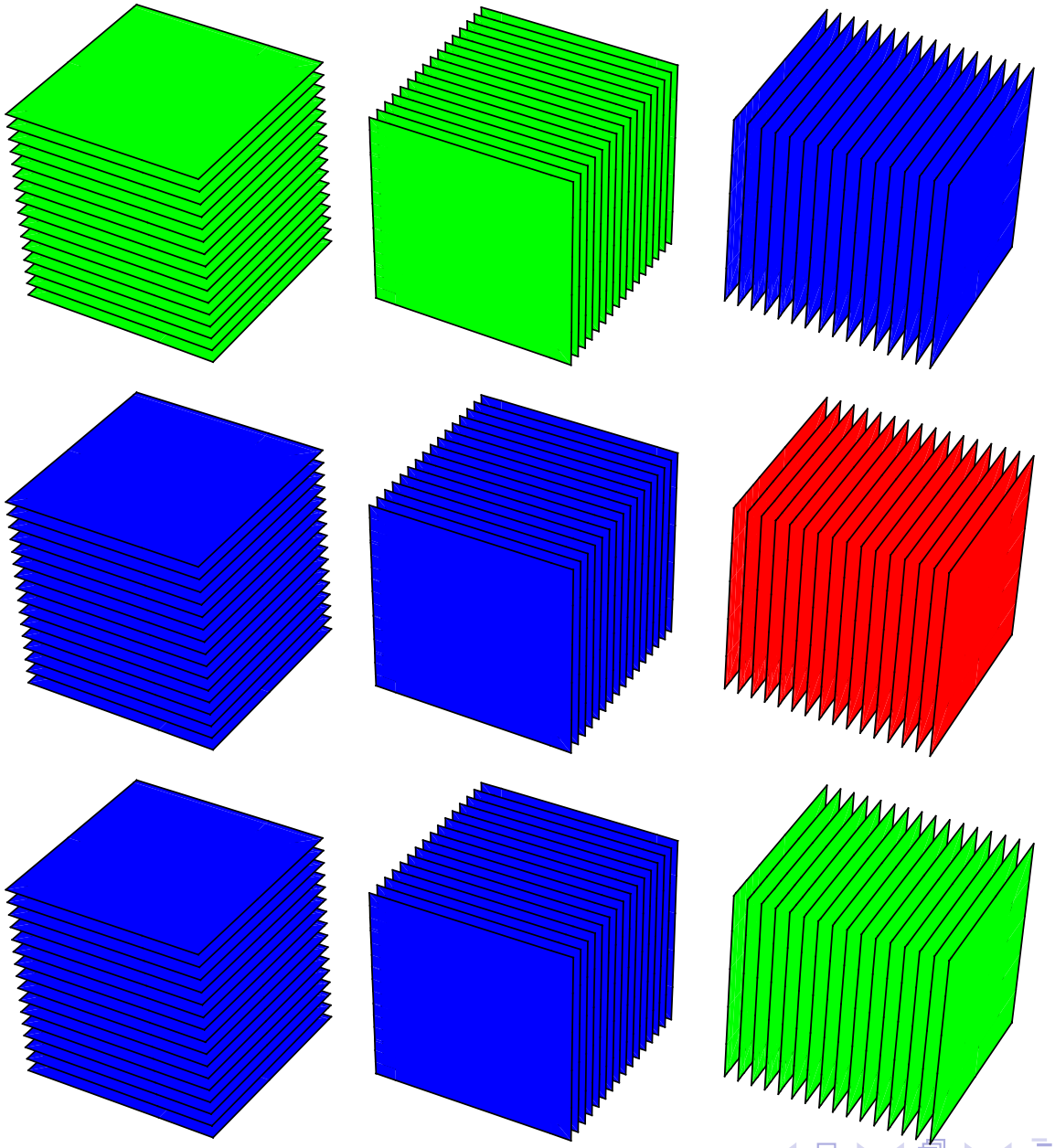
Veze s kockama simetričnih dizajna



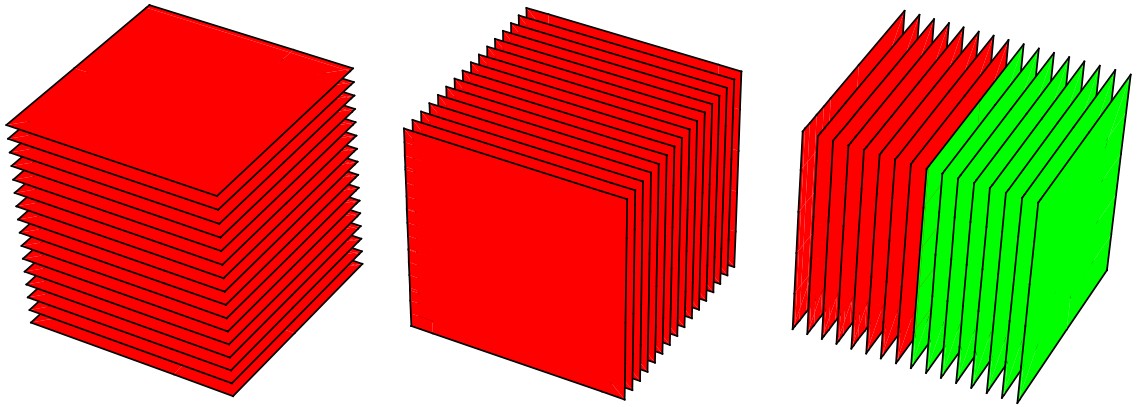
Veze s kockama simetričnih dizajna



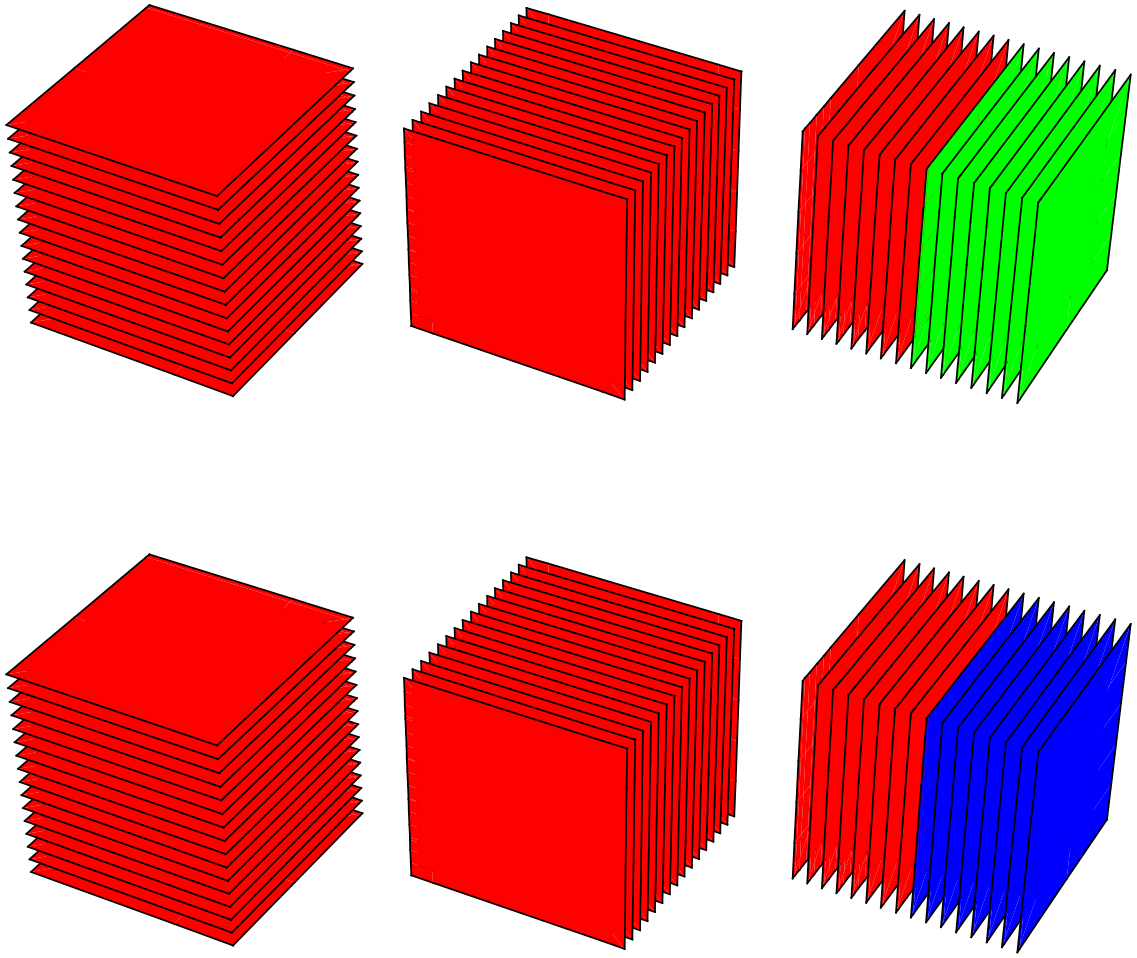
Veze s kockama simetričnih dizajna



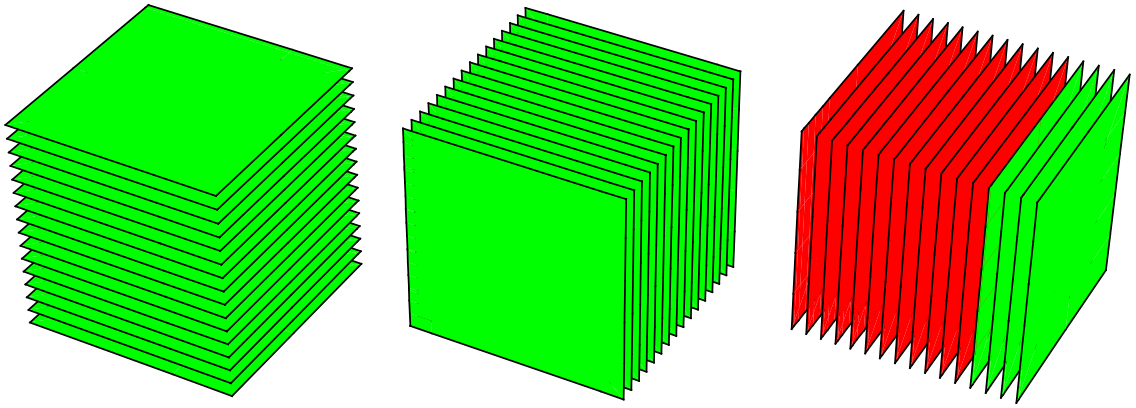
Veze s kockama simetričnih dizajna



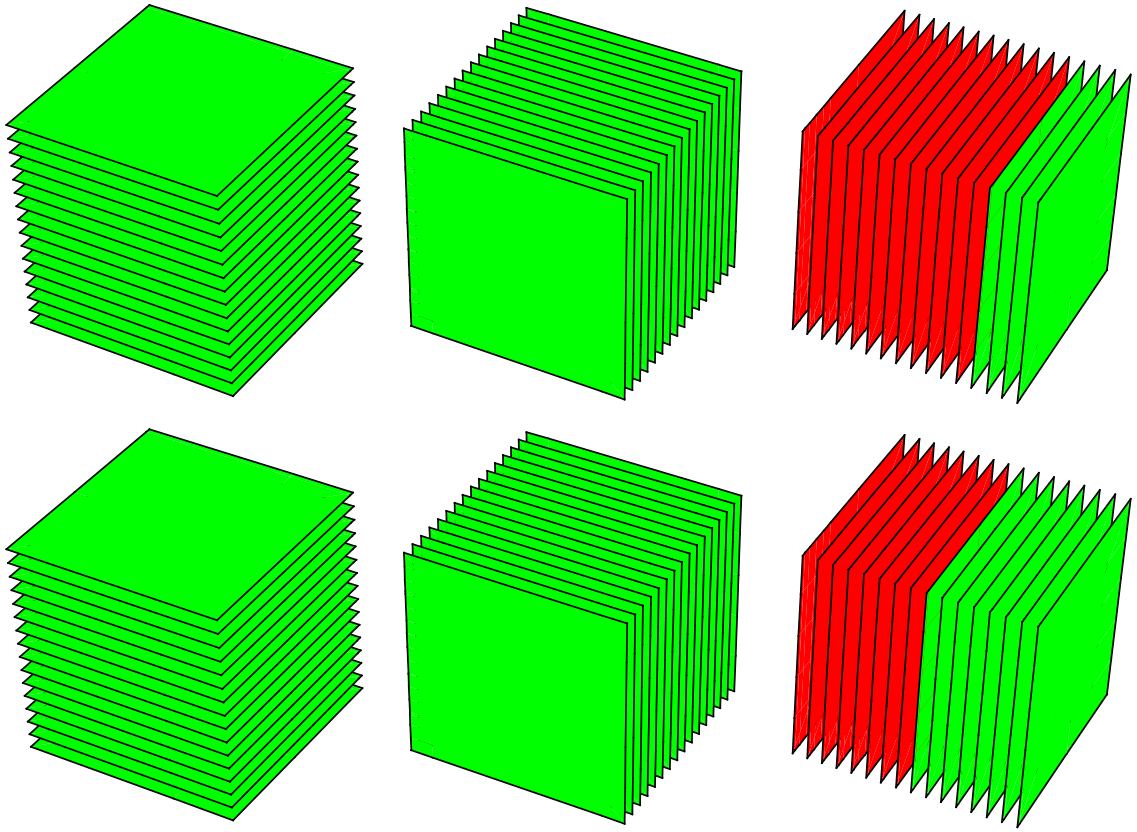
Veze s kockama simetričnih dizajna



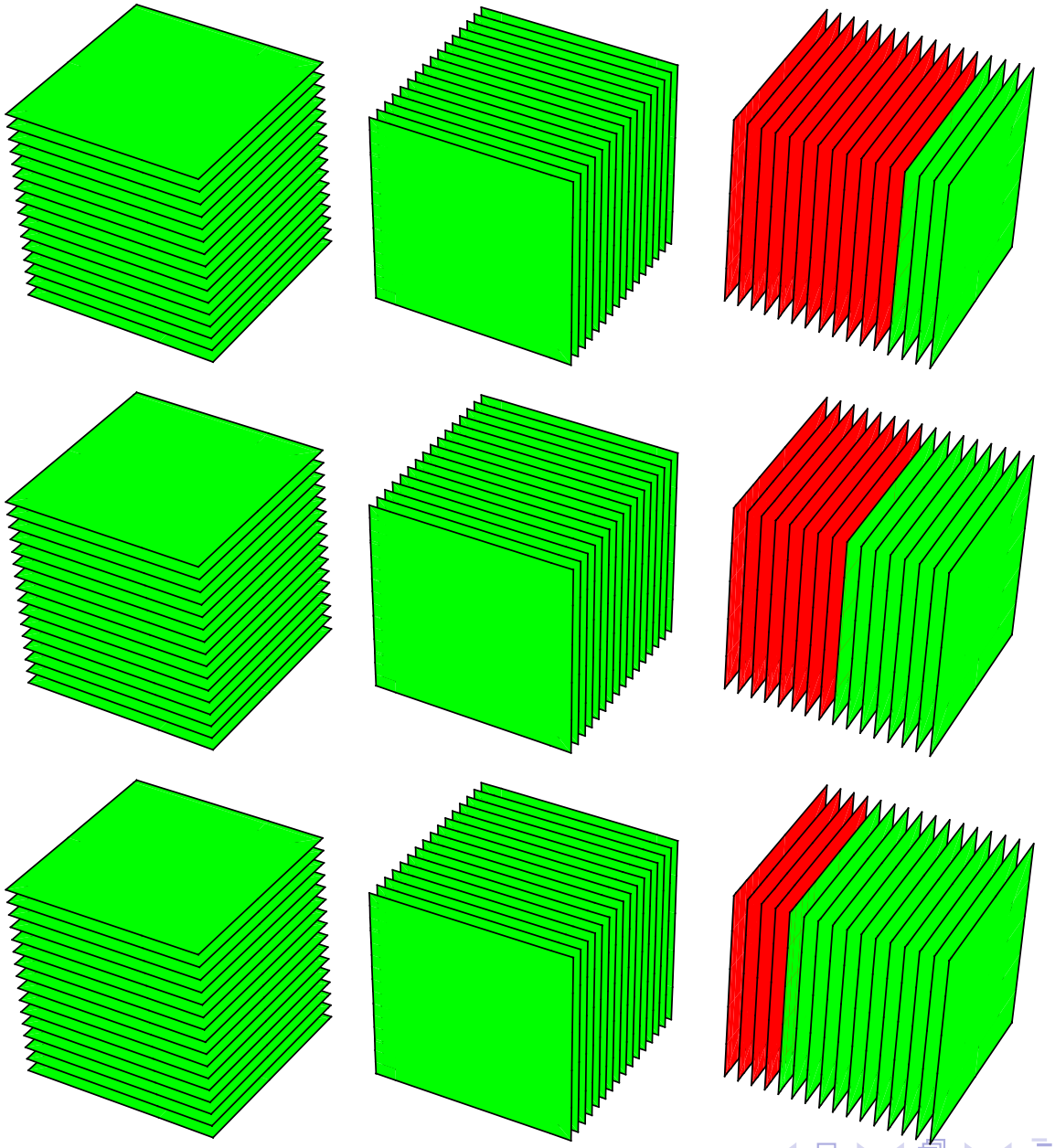
Veze s kockama simetričnih dizajna



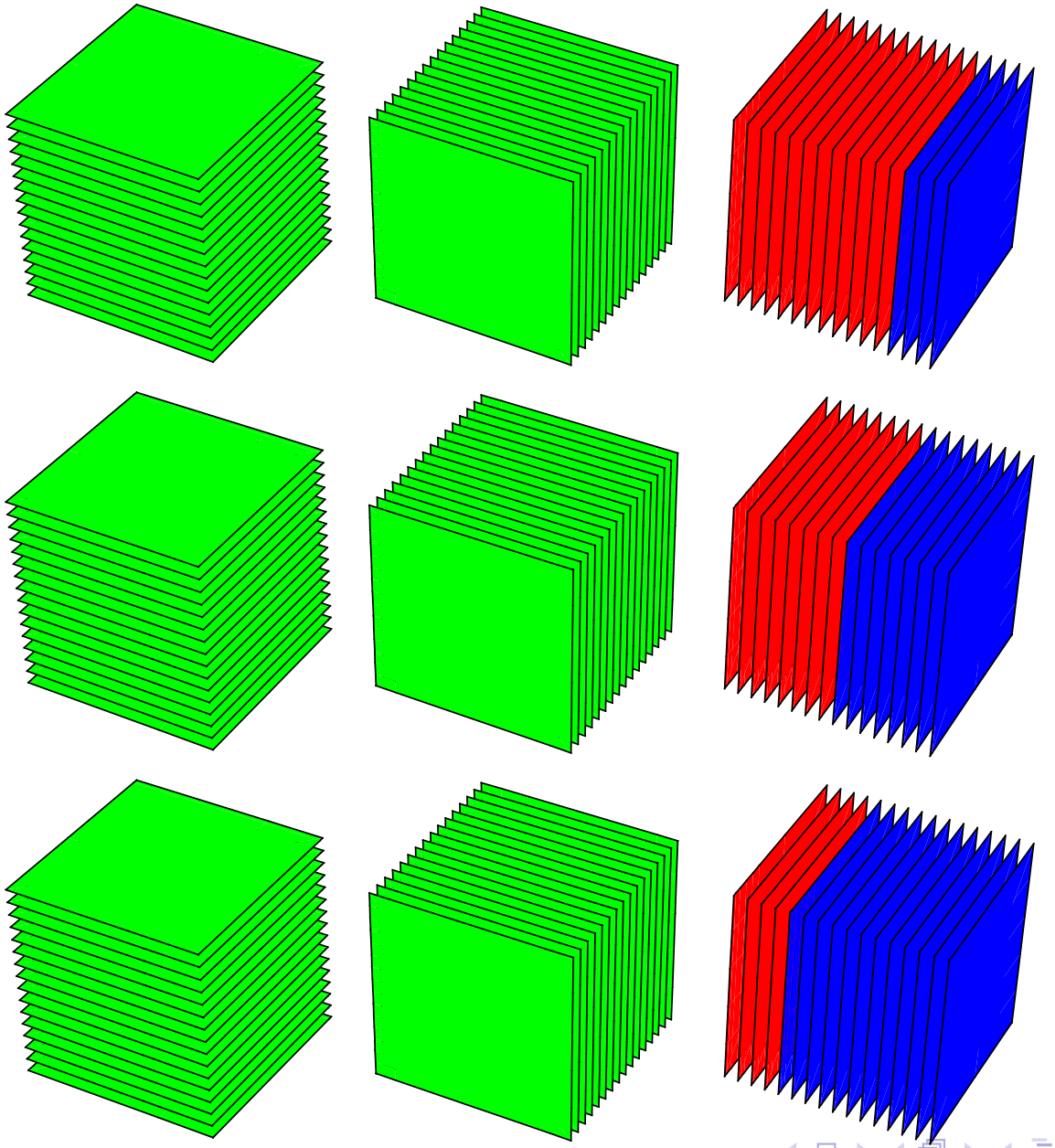
Veze s kockama simetričnih dizajna



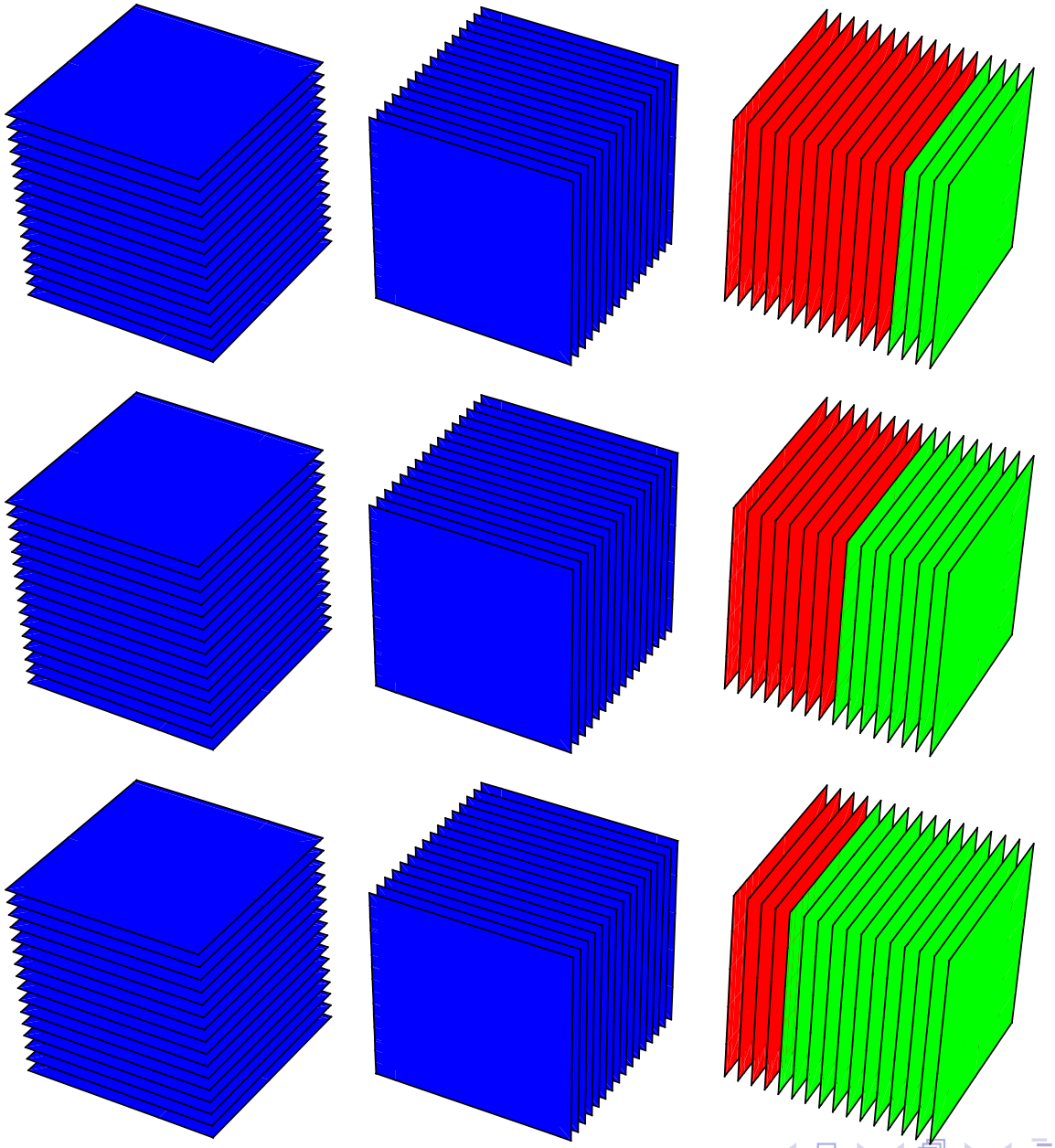
Veze s kockama simetričnih dizajna



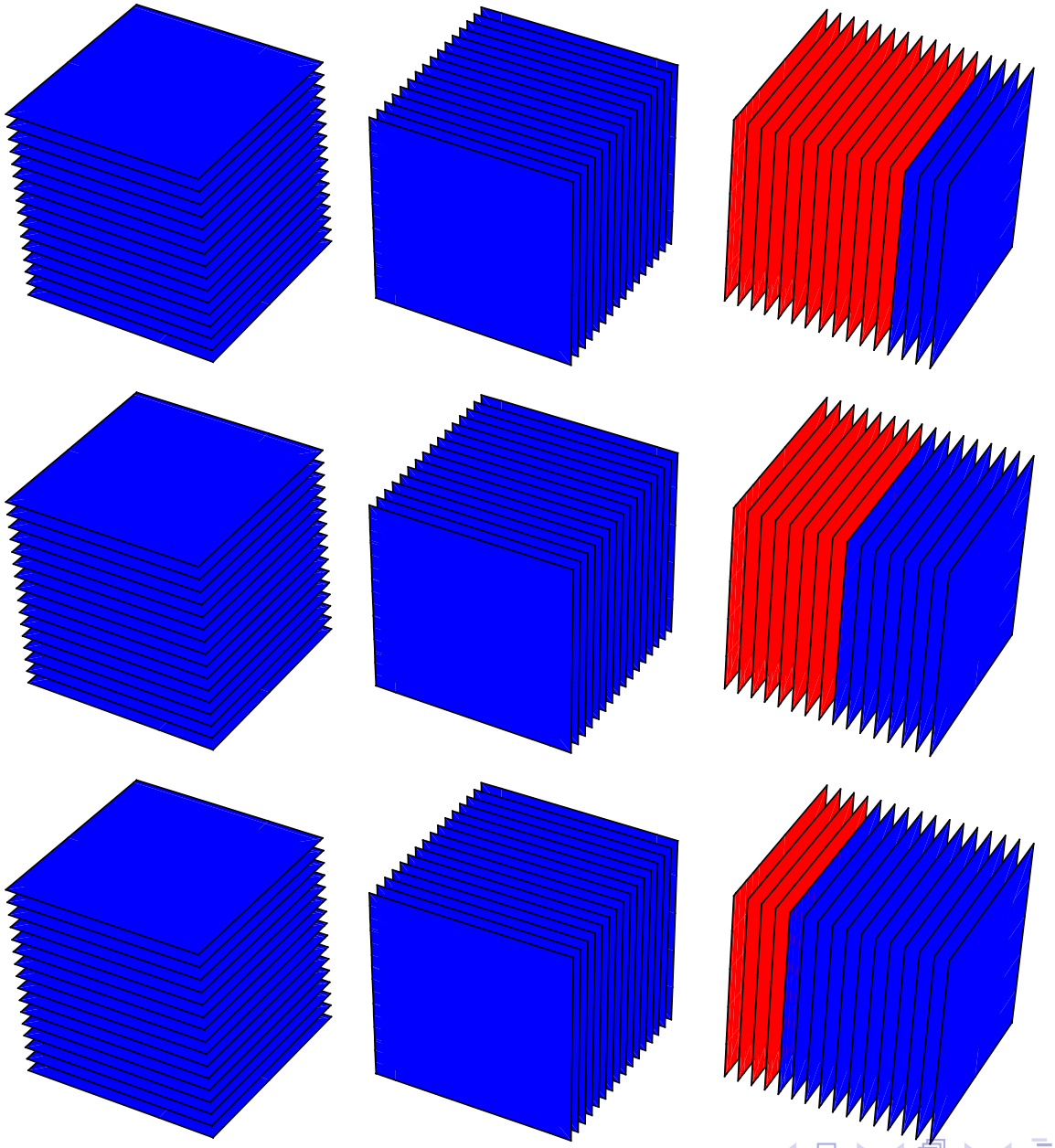
Veze s kockama simetričnih dizajna



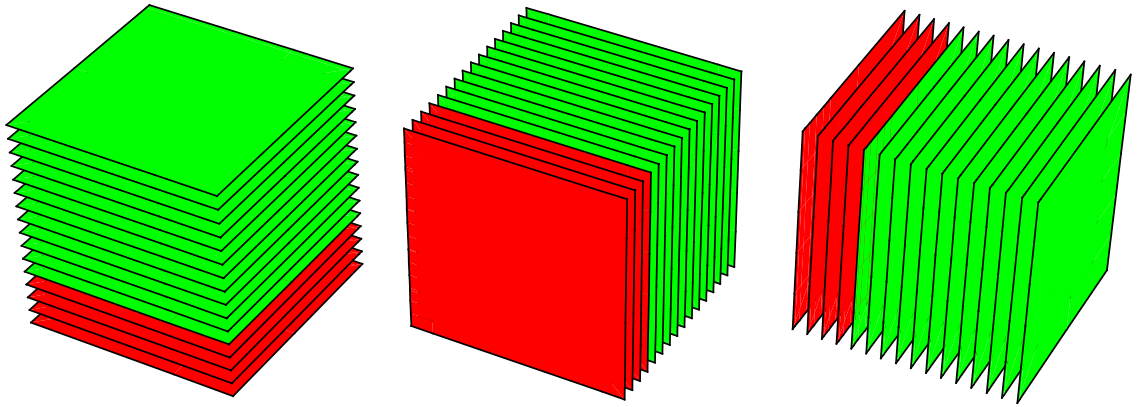
Veze s kockama simetričnih dizajna



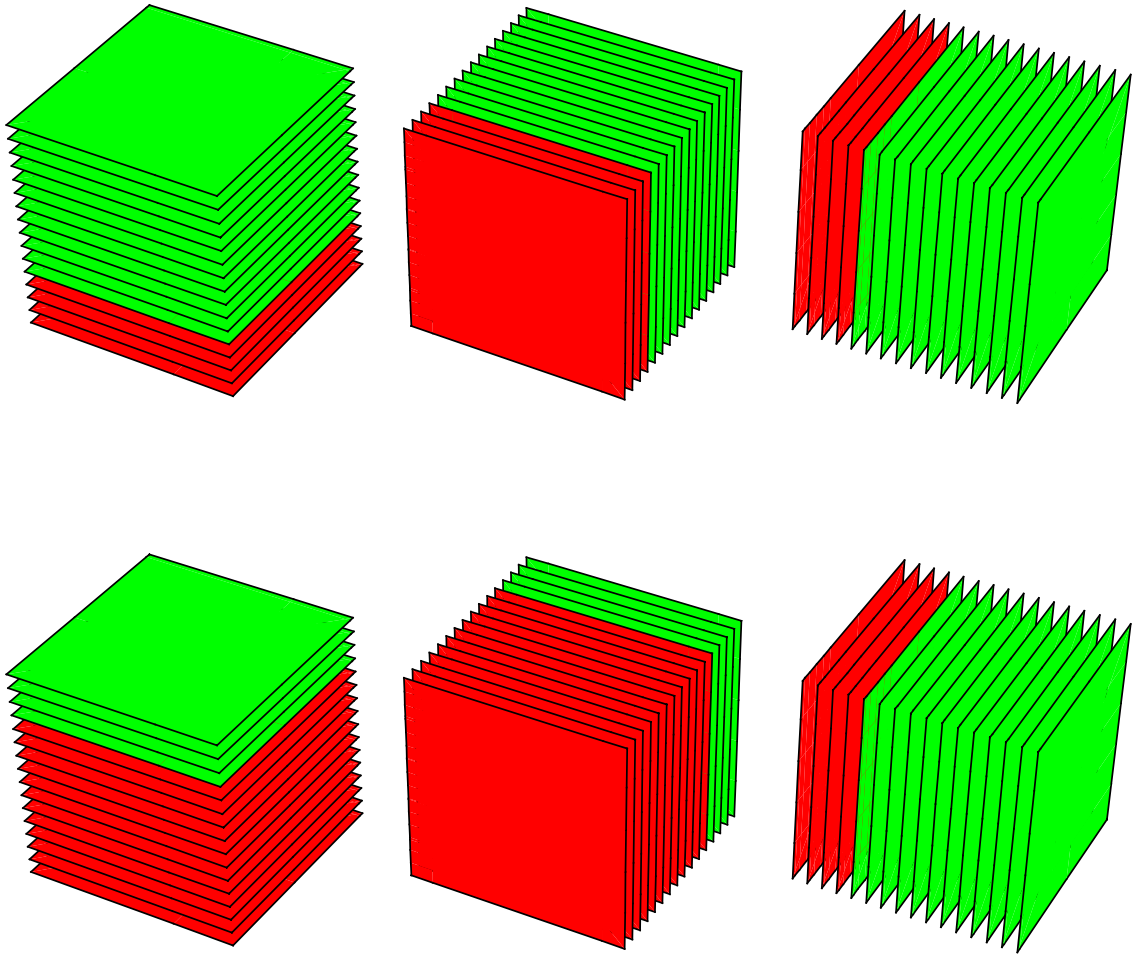
Veze s kockama simetričnih dizajna



Veze s kockama simetričnih dizajna



Veze s kockama simetričnih dizajna



Veze s kockama simetričnih dizajna

Pitanja:

- Produktna konstrukcija kocka simetričnih dizajna?

Veze s kockama simetričnih dizajna

Pitanja:

- Produktna konstrukcija kocka simetričnih dizajna?
- Može li se veza između dvodimenzionalnih Hadamardovih matrica i dizajna prenijeti na n-dimenzionalni slučaj?

Veze s kockama simetričnih dizajna

Pitanja:

- Produktna konstrukcija kocka simetričnih dizajna?
- Može li se veza između dvodimenzionalnih Hadamardovih matrica i dizajna prenijeti na n-dimenzionalni slučaj?
- Može li se naša konstrukcija grupovnih kocka s kojom dobivamo "nehomogene šnite" prenijeti na višedimenzionalne Hadamardove matrice?

Jedan noviji rad

V. Álvarez, J. A. Armario, M. D. Frau, P. Real, *On higher dimensional cocyclic Hadamard matrices*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **26** (2015), no. 1-2, 191–206.

Jedan noviji rad

V. Álvarez, J. A. Armario, M. D. Frau, P. Real, *On higher dimensional cocyclic Hadamard matrices*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **26** (2015), no. 1-2, 191–206.

In this paper, the authors ask a natural question: can n-dimensional cocycles with coefficients in the cyclic group C_2 be used to construct n-dimensional Hadamard matrices? In Section 2, the authors describe a method for computing a basis for the space of n-cocycles of a group G which avoids the need to compute inflation and transgression components separately. Section 3 is devoted to some sample computations for some groups of order $4t$: C_{4t}, $C_{2t} \times C_2$, $C_t \times C_2^2$ and the dihedral group D_{4t}. Section 4 is devoted to the construction of some improper $4 \times 4 \times 4$ Hadamard matrices. The paper concludes with some open problems.

—Reviewed by Padraig Ó Catháin

Jedan noviji rad

V. Álvarez, J. A. Armario, M. D. Frau, P. Real, *On higher dimensional cocyclic Hadamard matrices*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **26** (2015), no. 1-2, 191–206.

In this paper, the authors ask a natural question: can n-dimensional cocycles with coefficients in the cyclic group C_2 be used to construct n-dimensional Hadamard matrices? In Section 2, the authors describe a method for computing a basis for the space of n-cocycles of a group G which avoids the need to compute inflation and transgression components separately. Section 3 is devoted to some sample computations for some groups of order $4t$: C_{4t}, $C_{2t} \times C_2$, $C_t \times C_2^2$ and the dihedral group D_{4t}. Section 4 is devoted to the construction of some improper $4 \times 4 \times 4$ Hadamard matrices. The paper concludes with some open problems.

—Reviewed by Padraig Ó Catháin

AAECC

Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing

© Springer-Verlag 1993

Jedan noviji rad

The Virtues of Laziness: Complexity of the Tangent Cone Algorithm

Abdallah Assi[1] and Teo Mora[2]

[1] Department Mathématique, Université de Nice
[2] Dipartimento Informatica, Università di Genova

Received July 14, 1992

Abstract. The Tangent Cone Algorithm is a variant of Buchberger Algorithm, to compute standard bases with respect to orderings which are not well-orderings, which is useful in computational local algebra. We show here that its complexity is the same as the one of Buchberger Algorithm.

One should not a joyous heart tire with sorrows
nor with stone of worries grind merry time.
Nobody knows the mistery of what in the future will be
and we need wine, and lovers, and pleasant rest.
Omar Khayyâm, Robâ'iyyât

The end

Early pure mathematicians.