O dizajnima stupnja i snage 3*

Vedran Krčadinac

PMF-MO

29.10.2021.

* This work was fully supported by the Croatian Science Foundation under the project 9752.

Stupanj i snaga dizajna

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova.

Stupanj i snaga dizajna

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova.

Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn. Stupanj dizajna je broj različitih kardinaliteta presjeka blokova (presječnih brojeva):

$$d = |\{\, |B_1 \cap B_2| \,:\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \neq B_2 \}| \,.$$

Stupanj i snaga dizajna

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova.

Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn. Stupanj dizajna je broj različitih kardinaliteta presjeka blokova (presječnih brojeva):

$$d = |\{\, |B_1 \cap B_2| \,:\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \neq B_2 \}| \,.$$

Dizajni stupnja $d = 3$

Stupanj i snaga dizajna

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova.

Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn. Stupanj dizajna je broj različitih kardinaliteta presjeka blokova (presječnih brojeva):

$$d = |\{\, |B_1 \cap B_2| \,:\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \neq B_2 \}| \,.$$

Dizajni stupnja $d = 3$

$d = 3 \Longrightarrow t \leq 6$

D. K. Ray-Chaudhuri, R. M. Wilson, *On t-designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), 737–744.

Stupanj i snaga dizajna

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova.

Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn. Stupanj dizajna je broj različitih kardinaliteta presjeka blokova (presječnih brojeva):

$$d = |\{\, |B_1 \cap B_2| \,:\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \neq B_2 \}| \,.$$

Dizajni stupnja $d = 3$

$d = 3 \Longrightarrow t \leq 6$

D. K. Ray-Chaudhuri, R. M. Wilson, *On t-designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), 737–744.

$t = 6 \rightsquigarrow$ takvi dizajni ne postoje

C. Peterson, *On tight 6-designs*, Osaka J. Math. **14** (1977), 417–435.

Dizajni stupnja $d = 3$

$t = 5 \rightsquigarrow$ **hipoteza:** jedini primjer je Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$ s presječnim brojevima $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$ i njegov komplement

Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande, 5-*designs with three intersection numbers*, J. Combin. Theory Ser. A **69** (1995), no. 1, 36–50.

Dizajni stupnja $d = 3$

$t = 5 \rightsquigarrow$ **hipoteza:** jedini primjer je Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$ s presječnim brojevima $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$ i njegov komplement

Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande, 5-*designs with three intersection numbers*, J. Combin. Theory Ser. A **69** (1995), no. 1, 36–50.

$t = 4 \rightsquigarrow$ prethodni seminar *Shematski* 4-*dizajni*

Dizajni stupnja $d = 3$

$t = 5 \rightsquigarrow$ **hipoteza:** jedini primjer je Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$ s presječnim brojevima $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$ i njegov komplement

Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande, 5-*designs with three intersection numbers*, J. Combin. Theory Ser. A **69** (1995), no. 1, 36–50.

$t = 4 \rightsquigarrow$ prethodni seminar *Shematski* 4-*dizajni*

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Dizajni stupnja $d = 3$

$t = 5 \rightsquigarrow$ **hipoteza:** jedini primjer je Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$ s presječnim brojevima $x = 0$, $y = 2$, $z = 4$ i njegov komplement

Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande, 5-*designs with three intersection numbers*, J. Combin. Theory Ser. A **69** (1995), no. 1, 36–50.

$t = 4 \rightsquigarrow$ prethodni seminar *Shematski* 4-*dizajni*

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Za $d = 3$ i $t = 4$ to znači...

Neka su G_0, G_1, G_2, G_3 grafovi sa zajedničkim skupom vrhova $\mathcal{B}$. Vrhovi $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ su susjedni u grafu G_i ako se sijeku u k, x, y ili z točaka (redom za $i = 0, 1, 2, 3$).

Dizajni stupnja $d = 3$

Za svaki brid $\{B_1, B_2\}$ u G_ℓ, broj vrhova B_3 takvih da je $\{B_1, B_3\}$ brid u G_i, a $\{B_2, B_3\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Dizajni stupnja $d = 3$

Za svaki brid $\{B_1, B_2\}$ u G_ℓ, broj vrhova B_3 takvih da je $\{B_1, B_3\}$ brid u G_i, a $\{B_2, B_3\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Izrazili smo p_{ij}^{ℓ} preko parametara dizajna v, k, λ, x, y, z na dva načina:

- direktnim prebrojavanjem (jako ružne formule),
- preko svojstvenih vrijednosti sheme (malo manje ružne formule).

Dizajni stupnja $d = 3$

Za svaki brid $\{B_1, B_2\}$ u G_ℓ, broj vrhova B_3 takvih da je $\{B_1, B_3\}$ brid u G_i, a $\{B_2, B_3\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Izrazili smo p_{ij}^{ℓ} preko parametara dizajna v, k, λ, x, y, z na dva načina:

- direktnim prebrojavanjem (jako ružne formule),
- preko svojstvenih vrijednosti sheme (malo manje ružne formule).

$$p_1(j) = \frac{yz\,\theta_0(j) + (1-y-z)\theta_1(j) + 2\,\theta_2(j) - (y-k)(z-k)}{(y-x)(z-x)}$$

$$p_2(j) = \frac{xz\,\theta_0(j) + (1-x-z)\theta_1(j) + 2\,\theta_2(j) - (x-k)(z-k)}{(x-y)(z-y)}$$

$$p_3(j) = \frac{xy\,\theta_0(j) + (1-x-y)\theta_1(j) + 2\,\theta_2(j) - (x-k)(y-k)}{(x-z)(y-z)}$$

Dizajni stupnja $d = 3$

$$\theta_i(j) = \frac{b}{\binom{v}{k}} \binom{v-i-j}{v-k-j} \binom{k-j}{i-j} = \frac{\lambda}{\binom{v-4}{k-4}} \binom{v-i-j}{v-k-j} \binom{k-j}{i-j}$$

Dizajni stupnja $d = 3$

$$\theta_i(j) = \frac{b}{\binom{v}{k}} \binom{v-i-j}{v-k-j} \binom{k-j}{i-j} = \frac{\lambda}{\binom{v-4}{k-4}} \binom{v-i-j}{v-k-j} \binom{k-j}{i-j}$$

Pitanje od zadnji puta: zašto su svojstvene vrijednosti $p_i(j)$ cijeli brojevi?

Dizajni stupnja $d = 3$

$$\theta_i(j) = \frac{b}{\binom{v}{k}} \binom{v-i-j}{v-k-j} \binom{k-j}{i-j} = \frac{\lambda}{\binom{v-4}{k-4}} \binom{v-i-j}{v-k-j} \binom{k-j}{i-j}$$

Pitanje od zadnji puta: zašto su svojstvene vrijednosti $p_i(j)$ cijeli brojevi?

Odgovor: $p_i(0), \ldots, p_i(3)$ su svojstvene vrijednosti grafa G_i, tj. nultočke njegovog karakterističnog polinoma. To je polinom s cjelobrojnim koeficijentima i vodećim koeficijentom ± 1. Iz formula vidimo da su $p_i(j)$ racionalni brojevi, pa moraju biti cijeli brojevi.

Dizajni stupnja $d = 3$

$$\theta_i(j) = \frac{b}{\binom{v}{k}} \binom{v-i-j}{v-k-j} \binom{k-j}{i-j} = \frac{\lambda}{\binom{v-4}{k-4}} \binom{v-i-j}{v-k-j} \binom{k-j}{i-j}$$

Pitanje od zadnji puta: zašto su svojstvene vrijednosti $p_i(j)$ cijeli brojevi?

Odgovor: $p_i(0), \ldots, p_i(3)$ su svojstvene vrijednosti grafa G_i, tj. nultočke njegovog karakterističnog polinoma. To je polinom s cjelobrojnim koeficijentima i vodećim koeficijentom ± 1. Iz formula vidimo da su $p_i(j)$ racionalni brojevi, pa moraju biti cijeli brojevi.

Drugo pitanje od zadnji puta: beskonačna serija dopustivih parametara za shematske 4-dizajne?

Dopustivi parametri 4-(v, k, λ) za $d = 3$ i $v \leq 1000$

Br.	v	k	λ	x	y	z	$\exists$
1	11	5	1	1	2	3	✓
2	23	8	4	0	2	4	✓
3	23	11	48	3	5	7	✓
4	24	8	5	0	2	4	✓
5	47	11	8	1	3	5	✓
6	71	35	264	14	17	20	?
7	199	99	2328	44	49	54	?
8	391	195	9264	90	97	104	?
9	647	323	25680	152	161	170	?
10	659	329	390874	153	164	175	?
11	967	483	57720	230	241	252	?

Dopustivi parametri 4-(v, k, λ) za $d = 3$ i $v \leq 1000$

Br.	v	k	λ	x	y	z	$\exists$
1	11	5	1	1	2	3	✓
2	23	8	4	0	2	4	✓
3	23	11	48	3	5	7	✓
4	24	8	5	0	2	4	✓
5	47	11	8	1	3	5	✓
6	71	35	264	14	17	20	?
7	199	99	2328	44	49	54	?
8	391	195	9264	90	97	104	?
9	647	323	25680	152	161	170	?
10	659	329	390874	153	164	175	?
11	967	483	57720	230	241	252	?

Beskonačna serija dopustivih parametara

$$
\begin{aligned}
v &= 8n^2 - 1 \\
k &= 4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1) \\
\lambda &= 4n^4 - 7n^2 + 3 = (n-1)(n+1)(4n^2-3) \\
x &= 2n^2 - n - 1 = (n-1)(2n+1) \\
y &= 2n^2 - 1 \\
z &= 2n^2 + n - 1 = (n+1)(2n-1)
\end{aligned}
\qquad n \geq 3 \text{ neparan}
$$

Beskonačna serija dopustivih parametara

$$
\begin{aligned}
v &= 8n^2 - 1 \\
k &= 4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1) \\
\lambda &= 4n^4 - 7n^2 + 3 = (n-1)(n+1)(4n^2-3) \\
x &= 2n^2 - n - 1 = (n-1)(2n+1) \\
y &= 2n^2 - 1 \\
z &= 2n^2 + n - 1 = (n+1)(2n-1)
\end{aligned}
\qquad n \geq 3 \text{ neparan}
$$

$$
p_{33}^3 = \tfrac{1}{2}(n+1)(2n+3)(4n^2-2n-1)
$$

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

Za $d = 3$ i $t = 3$ **ne vrijedi** Cameron-Delsarteov teorem!

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

Za $d = 3$ i $t = 3$ **ne vrijedi** Cameron-Delsarteov teorem!

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Primjer 1: 3-$(10, 4, 1)$

To je dva puta derivirani mali Wittov dizajn 5-$(12, 6, 1)$.

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

Za $d = 3$ i $t = 3$ **ne vrijedi** Cameron-Delsarteov teorem!

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Primjer 1: 3-$(10, 4, 1)$

To je dva puta derivirani mali Wittov dizajn 5-$(12, 6, 1)$.

Ima tri presječna broja $\{x, y, z\} = \{0, 1, 2\}$, ali **nije shematski**.

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

Za $d = 3$ i $t = 3$ **ne vrijedi** Cameron-Delsarteov teorem!

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Primjer 1: 3-$(10, 4, 1)$

To je dva puta derivirani mali Wittov dizajn 5-$(12, 6, 1)$.

Ima tri presječna broja $\{x, y, z\} = \{0, 1, 2\}$, ali **nije shematski**.

Propozicija

Svaki Steinerov 3-$(v, k, 1)$ dizajn ima presječne brojeve iz skupa $\{0, 1, 2\}$, tj. stupanj mu je $d \leq 3$.

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

Za $d = 3$ i $t = 3$ **ne vrijedi** Cameron-Delsarteov teorem!

Teorem (Cameron, Delsarte, 1973.)

U dizajnu stupnja d i snage $t \geq 2d - 2$ blokovi tvore simetričnu asocijacijsku shemu s d klasa. To su takozvani shematski dizajni.

Primjer 1: $3\text{-}(10, 4, 1)$

To je dva puta derivirani mali Wittov dizajn $5\text{-}(12, 6, 1)$.

Ima tri presječna broja $\{x, y, z\} = \{0, 1, 2\}$, ali **nije shematski**.

Propozicija

Svaki Steinerov $3\text{-}(v, k, 1)$ dizajn ima presječne brojeve iz skupa $\{0, 1, 2\}$, tj. stupanj mu je $d \leq 3$.

Npr. dva puta derivirani veliki Wittov dizajn ima parametre $3\text{-}(22, 6, 1)$ i stupanj mu je $d = 2$ (presječni brojevi su $x = 0$, $y = 2$).

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

Primjer 2: 3-$(10, 5, 3)$

Postoji puno takvih dizajna. Većina je stupnja $d = 5$, tj. javljaju se sve moguće veličine presjeka blokova $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

Primjer 2: 3-$(10, 5, 3)$

Postoji puno takvih dizajna. Većina je stupnja $d = 5$, tj. javljaju se sve moguće veličine presjeka blokova $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

"Najljepši" među njima s grupom automorfizama $|M_{10}| = 720$ je stupnja $d = 3$ s presječnim brojevima $\{1, 2, 3\}$. Taj dizajn **jest shematski**.

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

Primjer 2: 3-$(10, 5, 3)$

Postoji puno takvih dizajna. Većina je stupnja $d = 5$, tj. javljaju se sve moguće veličine presjeka blokova $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

"Najljepši" među njima s grupom automorfizama $|M_{10}| = 720$ je stupnja $d = 3$ s presječnim brojevima $\{1, 2, 3\}$. Taj dizajn **jest shematski**.

Primjer 3: 3-$(11, 5, 4)$

Slična situacija: ima puno dizajna stupnja $d = 5$ sa svim mogućim presječnim brojevima. Jedan dizajn je stupnja $d = 3$ s presječnim brojevima $\{1, 2, 3\}$ i ima grupu automorfizama $|M_{11}| = 7920$.
I taj dizajn **jest shematski**.

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

Primjer 2: 3-$(10, 5, 3)$

Postoji puno takvih dizajna. Većina je stupnja $d = 5$, tj. javljaju se sve moguće veličine presjeka blokova $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

"Najljepši" među njima s grupom automorfizama $|M_{10}| = 720$ je stupnja $d = 3$ s presječnim brojevima $\{1, 2, 3\}$. Taj dizajn **jest shematski**.

Primjer 3: 3-$(11, 5, 4)$

Slična situacija: ima puno dizajna stupnja $d = 5$ sa svim mogućim presječnim brojevima. Jedan dizajn je stupnja $d = 3$ s presječnim brojevima $\{1, 2, 3\}$ i ima grupu automorfizama $|M_{11}| = 7920$.
I taj dizajn **jest shematski**.

Primjer 4: 3-$(14, 4, 1)$

Postoje barem tri dizajna stupnja $d = 3$ s presječnim brojevima $\{0, 1, 2\}$. Niti jedan od njih **nije shematski**.

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

P. J. Cameron, *Two remarks on Steiner systems*, Geometriae Dedicata **4** (1975), 403–418.

Teorem.

Ako postoji shematski Steinerov 3-$(v, k, 1)$ dizajn, onda je

$$v \leq 2 + \tfrac{1}{2}\, k(k-1)(k-2).$$

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

P. J. Cameron, *Two remarks on Steiner systems*, Geometriae Dedicata **4** (1975), 403–418.

Teorem.

Ako postoji shematski Steinerov 3-$(v, k, 1)$ dizajn, onda je

$$v \leq 2 + \tfrac{1}{2}\, k(k-1)(k-2).$$

Npr. za $k = 4$ slijedi $v \leq 14$. Dakle, 3-$(10, 4, 1)$ i 3-$(14, 4, 1)$ dizajni mogli bi biti shematski (ali ipak nisu), a 3-$(16, 4, 1)$ dizajni koji također postoje sigurno nisu shematski.

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

P. J. Cameron, *Two remarks on Steiner systems*, Geometriae Dedicata **4** (1975), 403–418.

Teorem.

Ako postoji shematski Steinerov 3-$(v, k, 1)$ dizajn, onda je

$$v \leq 2 + \tfrac{1}{2}\, k(k-1)(k-2).$$

Npr. za $k = 4$ slijedi $v \leq 14$. Dakle, 3-$(10, 4, 1)$ i 3-$(14, 4, 1)$ dizajni mogli bi biti shematski (ali ipak nisu), a 3-$(16, 4, 1)$ dizajni koji također postoje sigurno nisu shematski.

Primjer 5: Inverzijske ravnine parnog reda su beskonačna serija dizajna s parametrima 3-$(2^{2n} + 1, 2^n + 1, 1)$ i **shematske su**. To su jedini poznati Steinerovi 3-dizajni stupnja $d = 3$ koji imaju to svojstvo.

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

Pretpostavimo da dizajn s $d = t = 3$ jest shematski. Izračunavanje svojstvenih vrijednosti iz parametara i presječnih brojeva "propada" na ovom mjestu:

Lema.

Ako je $\mathcal{B}$ t-dizajn te $i + j \leq t$, onda vrijedi $\binom{v}{k} N_i \cdot N_j^\tau = b\, W_{i,k} \cdot W_{j,k}^\tau$. Pritom je $W_{i,k}$ Wilsonova $\binom{v}{i} \times \binom{v}{k}$ matrica inkluzije i-članih podskupova od V u k-članim podskupovima od V.

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

Pretpostavimo da dizajn s $d = t = 3$ jest shematski. Izračunavanje svojstvenih vrijednosti iz parametara i presječnih brojeva "propada" na ovom mjestu:

Lema.

Ako je $\mathcal{B}$ t-dizajn te $i + j \leq t$, onda vrijedi $\binom{v}{k} N_i \cdot N_j^\tau = b\, W_{i,k} \cdot W_{j,k}^\tau$. Pritom je $W_{i,k}$ Wilsonova $\binom{v}{i} \times \binom{v}{k}$ matrica inkluzije i-članih podskupova od V u k-članim podskupovima od V.

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= J - I \\ x\,A_1 + y\,A_2 + z\,A_3 &= N_1^\tau \cdot N_1 - k\,I \end{aligned}\right\} \text{ovisi samo o parametrima}$$

$$\binom{x}{2} A_1 + \binom{y}{2} A_2 + \binom{z}{2} A_3 = N_2^\tau \cdot N_2 - \binom{k}{2} I \quad \rightsquigarrow \quad \text{može ovisiti o dizajnu}$$

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

Nešto ipak možemo izračunati samo iz parametara i bez pretpostavke da je dizajn s $d = t = 3$ shematski. Neka je B_0 fiksni blok. Označimo s n_1, n_2, n_3 redom broj blokova koji ga sijeku u x, y, z točaka.

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

Nešto ipak možemo izračunati samo iz parametara i bez pretpostavke da je dizajn s $d = t = 3$ shematski. Neka je B_0 fiksni blok. Označimo s n_1, n_2, n_3 redom broj blokova koji ga sijeku u x, y, z točaka.

Ti brojevi zadovoljavaju:

$$n_1 + n_2 + n_3 = b - 1$$
$$x\, n_1 + y\, n_2 + z\, n_3 = k(r-1)$$
$$\binom{x}{2} n_1 + \binom{y}{2} n_2 + \binom{z}{2} n_3 = \binom{k}{2}(\lambda_2 - 1)$$

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

Nešto ipak možemo izračunati samo iz parametara i bez pretpostavke da je dizajn s $d = t = 3$ shematski. Neka je B_0 fiksni blok. Označimo s n_1, n_2, n_3 redom broj blokova koji ga sijeku u x, y, z točaka.

Ti brojevi zadovoljavaju:

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 &= b - 1 \\ x\, n_1 + y\, n_2 + z\, n_3 &= k(r-1) \\ \binom{x}{2} n_1 + \binom{y}{2} n_2 + \binom{z}{2} n_3 &= \binom{k}{2}(\lambda_2 - 1) \end{aligned}$$

Matrica sustava $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ \binom{x}{2} & \binom{y}{2} & \binom{z}{2} \end{bmatrix}$ ima det. $\frac{1}{2}(y-x)(z-x)(z-y) \neq 0$,

pa sustav ima jedinstveno rješenje. To znači da n_1, n_2, n_3 ovise samo o parametrima i presječnim brojevima, a ne o izboru bloka B_0!

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

$$n_1 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(y+z-r(y+z-1)-\lambda_2)k+(b-1)yz}{(y-x)(z-x)}$$

$$n_2 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(x+z-r(x+z-1)-\lambda_2)k+(b-1)xz}{(x-y)(z-y)}$$

$$n_3 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(x+y-r(x+y-1)-\lambda_2)k+(b-1)xy}{(x-z)(y-z)}$$

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

$$n_1 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(y+z-r(y+z-1)-\lambda_2)k+(b-1)yz}{(y-x)(z-x)}$$

$$n_2 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(x+z-r(x+z-1)-\lambda_2)k+(b-1)xz}{(x-y)(z-y)}$$

$$n_3 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(x+y-r(x+y-1)-\lambda_2)k+(b-1)xy}{(x-z)(y-z)}$$

Štoviše, imamo 3-dizajn, pa n_1, n_2, n_3 zadovoljavaju još jednu jednadžbu:

$$\binom{x}{3}n_1 + \binom{y}{3}n_2 + \binom{z}{3}n_3 = \binom{k}{3}(\lambda_3 - 1)$$

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

$$n_1 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(y+z-r(y+z-1)-\lambda_2)k+(b-1)yz}{(y-x)(z-x)}$$

$$n_2 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(x+z-r(x+z-1)-\lambda_2)k+(b-1)xz}{(x-y)(z-y)}$$

$$n_3 = \frac{(\lambda_2-1)k^2+(x+y-r(x+y-1)-\lambda_2)k+(b-1)xy}{(x-z)(y-z)}$$

Štoviše, imamo 3-dizajn, pa n_1, n_2, n_3 zadovoljavaju još jednu jednadžbu:

$$\binom{x}{3}n_1 + \binom{y}{3}n_2 + \binom{z}{3}n_3 = \binom{k}{3}(\lambda_3 - 1)$$

Zbog Ray-Chaudhuri i Wilsonove nejednakosti $b \leq \binom{v}{d}$, ako ograničimo $v \leq 50$, imamo konačno mnogo dopustivih parametara 3-dizajna. Za sve moguće $0 \leq x < y < z < k$ provjerimo jesu li n_1, n_2, n_3 prirodni brojevi i zadovoljavaju li dodatnu jednadžbu. Tako dobijemo **119** mogućih parametara dizajna s $d = t = 3$.

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

RBr.	v	k	λ	x	y	z	n_1	n_2	n_3	$\exists$	Shematski
1	10	4	1	0	1	2	3	8	18		
2	10	5	3	1	2	3	5	10	20		
3	11	5	2	0	2	3	2	20	10		
4	11	5	4	1	2	3	15	20	30		
5	14	4	1	0	1	2	20	40	30		
6	16	4	1	0	1	2	39	64	36		
7	16	6	2	0	2	3	5	30	20		
8	16	6	4	1	2	3	36	15	60		
9	16	8	45	0	3	5	1	224	224		
10	17	5	1	0	1	2	12	15	40		
11	17	8	28	2	4	6	69	243	27		
12	18	6	10	0	2	4	47	315	45		
13	18	8	21	2	4	6	85	205	15		
14	18	9	14	3	5	6	42	81	12		
							$\vdots$				

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

RBr.	v	k	λ	x	y	z	n_1	n_2	n_3	$\exists$	Shematski
1	10	4	1	0	1	2	3	8	18	✓	-
2	10	5	3	1	2	3	5	10	20	✓	✓
3	11	5	2	0	2	3	2	20	10	✗	✗
4	11	5	4	1	2	3	15	20	30	✓	✓
5	14	4	1	0	1	2	20	40	30	✓	-
6	16	4	1	0	1	2	39	64	36	✓	✗
7	16	6	2	0	2	3	5	30	20	✗	✗
8	16	6	4	1	2	3	36	15	60		⋮
9	16	8	45	0	3	5	1	224	224		
10	17	5	1	0	1	2	12	15	40		
11	17	8	28	2	4	6	69	243	27		
12	18	6	10	0	2	4	47	315	45		
13	18	8	21	2	4	6	85	205	15		
14	18	9	14	3	5	6	42	81	12		
							⋮				

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

RBr.	v	k	λ	x	y	z	n_1	n_2	n_3
⋮		⋮			⋮			⋮	
107	46	16	252	4	7	8	3360	3200	270
108	46	18	748	4	7	10	1958	9800	2156
109	47	11	44	1	3	5	1386	2475	462
110	47	20	76	6	7	10	135	360	585
111	49	9	21	0	1	3	360	2565	1680
112	50	4	1	0	1	2	3473	1288	138
113	50	5	1	0	1	2	1134	675	150
114	50	8	1	0	1	2	105	48	196
115	50	9	42	0	1	3	820	5535	3444
116	50	10	6	0	2	4	154	675	150
117	50	20	798	6	8	10	5025	3675	5019
118	50	24	506	8	11	14	507	3040	1352
119	50	25	138	10	13	15	340	625	210

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

To do...

- Pokušati konstruirati dizajne s parametrima iz tablice!

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

To do...

- Pokušati konstruirati dizajne s parametrima iz tablice!
- Paralelno razvijati novi GAP paket: Kramer-Mesnerova metoda - Wassermannov solver, ubrzanja zbog poznatih presječnih brojeva ("dobre orbite" i matrica kompatibilnosti), orbitne matrice za 3-dizajne s uvjetima na stupce, Cliquer umjesto solvera...

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

To do...

- Pokušati konstruirati dizajne s parametrima iz tablice!
- Paralelno razvijati novi GAP paket: Kramer-Mesnerova metoda - Wassermannov solver, ubrzanja zbog poznatih presječnih brojeva ("dobre orbite" i matrica kompatibilnosti), orbitne matrice za 3-dizajne s uvjetima na stupce, Cliquer umjesto solvera...
- Beskonačne serije dizajna ili dopustivih parametara?

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

To do...

- Pokušati konstruirati dizajne s parametrima iz tablice!
- Paralelno razvijati novi GAP paket: Kramer-Mesnerova metoda - Wassermannov solver, ubrzanja zbog poznatih presječnih brojeva ("dobre orbite" i matrica kompatibilnosti), orbitne matrice za 3-dizajne s uvjetima na stupce, Cliquer umjesto solvera...
- Beskonačne serije dizajna ili dopustivih parametara?
- Što možemo reći o shematskim dizajnima? Generalizacija Cameronovog teorema na $\lambda > 1$?

Dizajni stupnja $d = 3$ i snage $t = 3$

To do...

- Pokušati konstruirati dizajne s parametrima iz tablice!
- Paralelno razvijati novi GAP paket: Kramer-Mesnerova metoda - Wassermannov solver, ubrzanja zbog poznatih presječnih brojeva ("dobre orbite" i matrica kompatibilnosti), orbitne matrice za 3-dizajne s uvjetima na stupce, Cliquer umjesto solvera...
- Beskonačne serije dizajna ili dopustivih parametara?
- Što možemo reći o shematskim dizajnima? Generalizacija Cameronovog teorema na $\lambda > 1$?
- ...

ACCO

Ciljevi projekta:

O1. Razvoj algoritamskih metoda konstrukcije i klasifikacije kombinatorinih objekata s dodatnom algebarskom strukturom. Razvijene metode koristit će algebarska i kombinatorna svojstva objekata da bi bile primjenjive na objekte s većim parametrima i probleme koji su izvan dosega poznatih konstrukcijskih metoda.

O2. Proširivanje teorijskog znanja o kombinatornim objektima koji su predmet istraživanja. **Zanimljivi teoremi često se otkrivaju i dokazuju zahvaljujući dostupnim primjerima.** Očekujemo da će rezultati ovog projekta dovesti do takvih otkrića.

O3. Razvoj softverskog paketa, implementiranog u sustavu GAP, za konstrukciju i analizu kombinatornih objekata.

Kraj

Hvala na pažnji!