Delsarteovi dizajni*

Vedran Krčadinac

Prirodoslovno-matematički fakultet

Sveučilište u Zagrebu

24.2.2023.

* This work was fully supported by the Croatian Science Foundation under the project 9752.

Kombinatorni dizajni

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova. Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn.

Kombinatorni dizajni

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova. Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn.

$$\lambda_s = \frac{\lambda \cdot \binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}, \qquad s = 0, \ldots, t$$

Kombinatorni dizajni

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova. Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn.

$$\lambda_s = \frac{\lambda \cdot \binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}, \qquad s = 0, \ldots, t$$

Steinerovi dizajni: $\lambda = 1$

Kombinatorni dizajni

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova. Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn.

$$\lambda_s = \frac{\lambda \cdot \binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}, \qquad s = 0, \ldots, t$$

Steinerovi dizajni: $\lambda = 1$ (npr. Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$)

Kombinatorni dizajni

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova. Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn.

$$\lambda_s = \frac{\lambda \cdot \binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}, \qquad s = 0, \ldots, t$$

Steinerovi dizajni: $\lambda = 1$ (npr. Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$)

Simetrični dizajni: $v = b = |\mathcal{B}|$

Kombinatorni dizajni

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova. Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn.

$$\lambda_s = \frac{\lambda \cdot \binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}, \qquad s = 0, \ldots, t$$

Steinerovi dizajni: $\lambda = 1$ (npr. Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$)

Simetrični dizajni: $v = b = |\mathcal{B}| \quad \Rightarrow t = 2$

Kombinatorni dizajni

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova. Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn.

$$\lambda_s = \frac{\lambda \cdot \binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}, \qquad s = 0, \ldots, t$$

Steinerovi dizajni: $\lambda = 1$ (npr. Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$)

Simetrični dizajni: $v = b = |\mathcal{B}| \quad \Rightarrow t = 2$

Glavno pitanje: za koje parametre t-(v, k, λ) postoje dizajni?

Kombinatorni dizajni

Dizajn s parametrima t-(v, k, λ) čine v-člani skup točaka V i familija $\mathcal{B}$ k-članih podskupova od V (blokova) takva da je svaki t-člani podskup od V sadržan u točno λ blokova. Snaga dizajna je najveći t za koji je on t-dizajn.

$$\lambda_s = \frac{\lambda \cdot \binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}, \qquad s = 0, \ldots, t$$

Steinerovi dizajni: $\lambda = 1$ (npr. Wittov dizajn 5-$(24, 8, 1)$)

Simetrični dizajni: $v = b = |\mathcal{B}| \quad \Rightarrow t = 2$

Glavno pitanje: za koje parametre t-(v, k, λ) postoje dizajni?

Nužni uvjeti, direktne konstrukcije, rekurzivne konstrukcije, teorem Bruck-Ryser-Chowla (1950.)...

Smisao teorije dizajna

E. Bannai, E. Bannai, H. Tanaka, Y. Zhu, *Design theory from the viewpoint of algebraic combinatorics*, Graphs Combin. **33** (2017), no. 1, 1–41.

"The concept of combinatorial t-design is to find subsets which approximate the whole space $\binom{V}{k}$ i.e., the set of k-element subsets of a set V of cardinality $|V| = v$."

Smisao teorije dizajna

E. Bannai, E. Bannai, H. Tanaka, Y. Zhu, *Design theory from the viewpoint of algebraic combinatorics*, Graphs Combin. **33** (2017), no. 1, 1–41.

"The concept of combinatorial t-design is to find subsets which approximate the whole space $\binom{V}{k}$ i.e., the set of k-element subsets of a set V of cardinality $|V| = v$."

"Spherical designs are finite sets of points X on the unit sphere $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ which approximate the sphere S^{n-1} in the following sense..."

$$\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} f(x)d\sigma(x) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)$$

Smisao teorije dizajna

E. Bannai, E. Bannai, H. Tanaka, Y. Zhu, *Design theory from the viewpoint of algebraic combinatorics*, Graphs Combin. **33** (2017), no. 1, 1–41.

"The concept of combinatorial t-design is to find subsets which approximate the whole space $\binom{V}{k}$ i.e., the set of k-element subsets of a set V of cardinality $|V| = v$."

"Spherical designs are finite sets of points X on the unit sphere $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ which approximate the sphere S^{n-1} in the following sense..."

$$\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} f(x)d\sigma(x) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)$$

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic Combinatorics*, De Gruyter, 2021.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_ℓ, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_ℓ, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Za vrhove x, y takve da je $\{x, y\}$ brid u G_i kažemo da su i-asocirani.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_ℓ, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Za vrhove x, y takve da je $\{x, y\}$ brid u G_i kažemo da su i-asocirani.

Grafovi koji čine asocijacijsku shemu su regularni: G_i je stupnja $n_i = p_{ii}^0$.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa zajedničkim n-članim skupom vrhova X takvih da vrijedi:

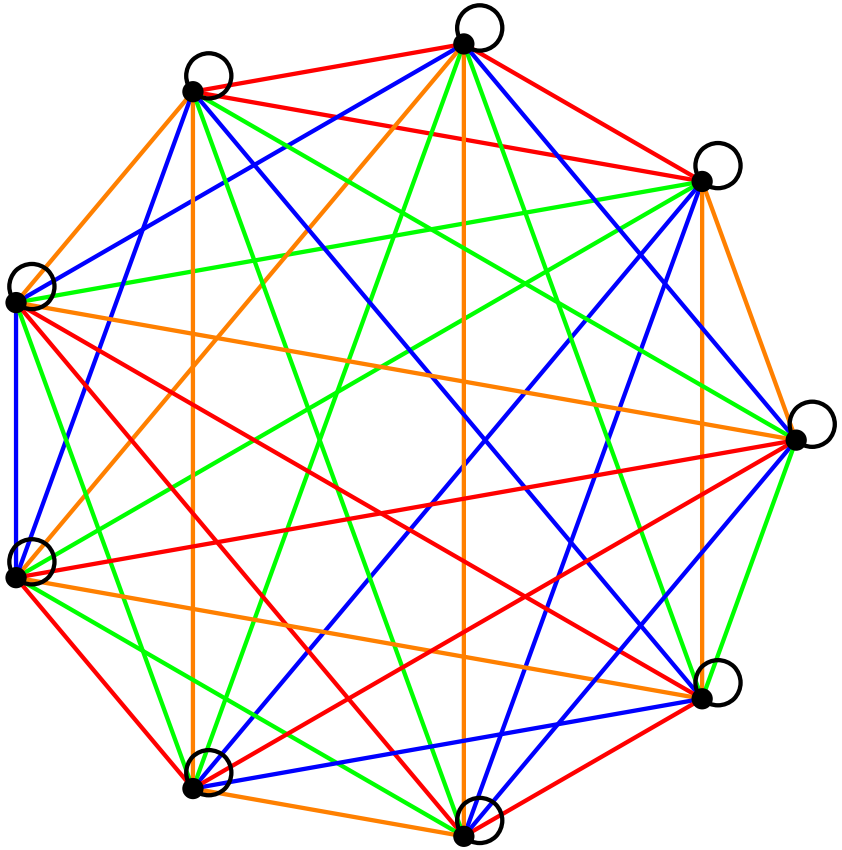
- G_0 je graf koji sadrži sve petlje i nema drugih bridova.
- $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju potpunog grafa K_n.
- Za svaki brid $\{x, y\}$ u G_ℓ, broj vrhova z takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{z, y\}$ brid u G_j ovisi samo o indeksima i, j, ℓ. Označavamo ga p_{ij}^{ℓ} i zovemo presječnim brojem sheme.

Za vrhove x, y takve da je $\{x, y\}$ brid u G_i kažemo da su i-asocirani.

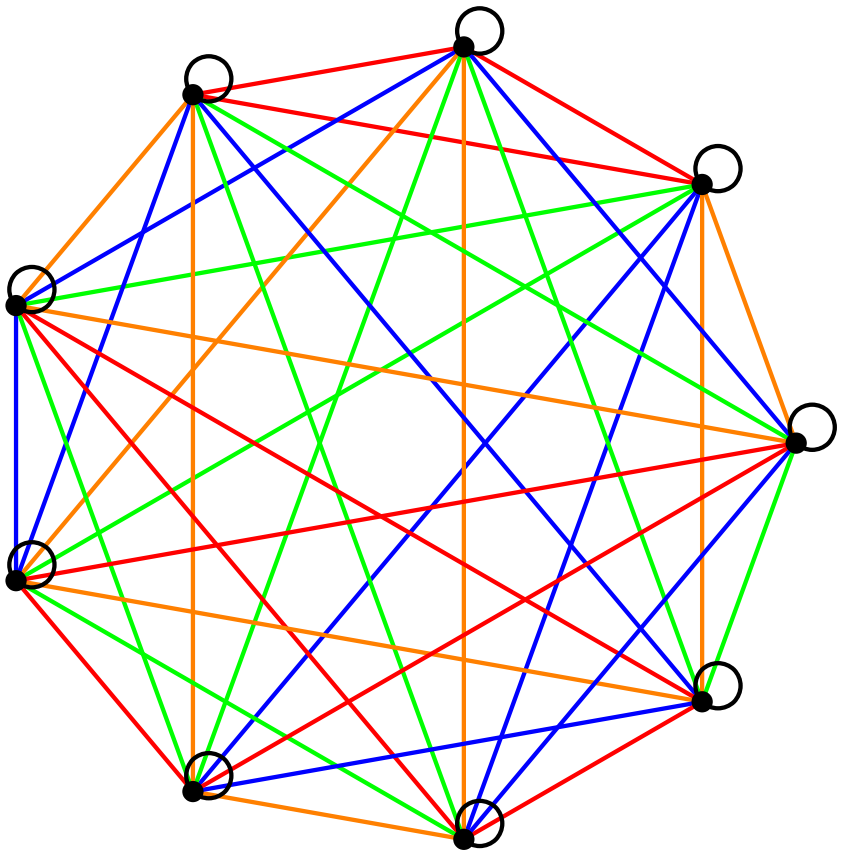
Grafovi koji čine asocijacijsku shemu su regularni: G_i je stupnja $n_i = p_{ii}^0$.

Neka su $A_0, \ldots, A_d$ matrice susjedstva grafova $G_0, \ldots, G_d$. To su simetrične $\{0, 1\}$-matrice tipa $n \times n$. Ekvivalentnu definiciju asocijacijske sheme dobivamo prevođenjem zahtjeva na jezik matrica.

Asocijacijske sheme



Asocijacijske sheme



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 3 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od simetričnih $\{0,1\}$-matrica $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takvih da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od simetričnih $\{0,1\}$-matrica $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takvih da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od simetričnih $\{0,1\}$-matrica $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takvih da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$, za sve $i, j \in \{0, \ldots, d\}$.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od simetričnih $\{0,1\}$-matrica $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takvih da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$, za sve $i, j \in \{0, \ldots, d\}$.

Zbog simetričnosti i trećeg svojstva, vrijedi komutativnost $A_i \cdot A_j = A_j \cdot A_i$.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od simetričnih $\{0,1\}$-matrica $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takvih da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$, za sve $i, j \in \{0, \ldots, d\}$.

Zbog simetričnosti i trećeg svojstva, vrijedi komutativnost $A_i \cdot A_j = A_j \cdot A_i$.

Potprostor $\langle A_0, \ldots, A_d \rangle$ od $M_n(\mathbb{R})$ je komutativna algebra s jedinicom, koju zovemo Bose-Mesnerovom algebrom sheme.

Asocijacijske sheme

Asocijacijska shema s d klasa sastoji se od simetričnih $\{0,1\}$-matrica $A_0, \ldots, A_d$ tipa $n \times n$ takvih da vrijedi:

- $A_0 = I$ (jedinična matrica).
- $A_0 + \ldots + A_d = J$ (matrica popunjena jedinicama).
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$, za sve $i, j \in \{0, \ldots, d\}$.

Zbog simetričnosti i trećeg svojstva, vrijedi komutativnost $A_i \cdot A_j = A_j \cdot A_i$.

Potprostor $\langle A_0, \ldots, A_d \rangle$ od $M_n(\mathbb{R})$ je komutativna algebra s jedinicom, koju zovemo Bose-Mesnerovom algebrom sheme.

Budući da su matrice $A_0, \ldots, A_d$ simetrične i komutiraju, možemo ih simultano dijagonalizirati. Neka su $p_i(j)$, $j = 0, \ldots, d$ svojstvene vrijednosti matrice A_i s kratnostima redom $m_0, \ldots, m_d$, a $E_0, \ldots, E_d$ matrice ortogonalnih projekcija na odgovarajuće svojstvene potprostore. To je još jedna baza Bose-Mesnerove algebre.

Dualnost u Bose-Mesnerovoj algebri

- $\{A_0, \ldots, A_d\}$ je baza Schurovih idempotenta
- $A_i \circ A_j = \begin{cases} A_i, & i = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$
- $A_0 = I$
- $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$
- $A_i \cdot E_j = p_i(j)\, E_j$
- $A_i = \sum_{j=0}^{d} p_i(j) E_j$
- $A_i \cdot A_j = \sum_{\ell=0}^{d} p_{ij}^{\ell} A_\ell$

- $\{E_0, \ldots, E_d\}$ je baza glavnih idempotenta
- $E_i \cdot E_j = \begin{cases} E_i, & i = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$
- $E_0 = \frac{1}{n} J$
- $\sum_{i=0}^{d} E_i = I$
- $E_i \circ A_j = \frac{1}{n} q_i(j)\, A_j$
- $E_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} q_i(j) A_j$
- $E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{d} q_{ij}^{\ell} E_\ell$

Primjer: Johnsonova shema

Neka je $X = \binom{V}{k}$ skup svih k-članih podskupova v-članog skupa V.

Primjer: Johnsonova shema

Neka je $X = \binom{V}{k}$ skup svih k-članih podskupova v-članog skupa V.
Onda je $n = |X| = \binom{v}{k}$ i za $K_1, K_2 \in X$ vrijedi $0 \leq |K_1 \cap K_2| \leq k$.

Primjer: Johnsonova shema

Neka je $X = \binom{V}{k}$ skup svih k-članih podskupova v-članog skupa V.

Onda je $n = |X| = \binom{v}{k}$ i za $K_1, K_2 \in X$ vrijedi $0 \leq |K_1 \cap K_2| \leq k$.

Neka su K_1 i K_2 susjedni u grafu G_i (i-asocirani) ako je $|K_1 \cap K_2| = k - i$, za $i = 0, \ldots, k$. Tako dobivamo asocijacijsku shemu s k klasa koju zovemo Johnsonovom shemom $J(v, k)$.

Primjer: Johnsonova shema

Neka je $X = \binom{V}{k}$ skup svih k-članih podskupova v-članog skupa V.

Onda je $n = |X| = \binom{v}{k}$ i za $K_1, K_2 \in X$ vrijedi $0 \leq |K_1 \cap K_2| \leq k$.

Neka su K_1 i K_2 susjedni u grafu G_i (i-asocirani) ako je $|K_1 \cap K_2| = k - i$, za $i = 0, \ldots, k$. Tako dobivamo asocijacijsku shemu s k klasa koju zovemo Johnsonovom shemom $J(v, k)$.

- Svaki vrh $K \in \binom{V}{k}$ susjedan je samom sebi u G_0.

Primjer: Johnsonova shema

Neka je $X = \binom{V}{k}$ skup svih k-članih podskupova v-članog skupa V.

Onda je $n = |X| = \binom{v}{k}$ i za $K_1, K_2 \in X$ vrijedi $0 \leq |K_1 \cap K_2| \leq k$.

Neka su K_1 i K_2 susjedni u grafu G_i (i-asocirani) ako je $|K_1 \cap K_2| = k - i$, za $i = 0, \ldots, k$. Tako dobivamo asocijacijsku shemu s k klasa koju zovemo Johnsonovom shemom $J(v, k)$.

- Svaki vrh $K \in \binom{V}{k}$ susjedan je samom sebi u G_0.
- Svaka dva vrha $K_1, K_2 \in \binom{V}{k}$, $K_1 \neq K_2$, susjedna su točno u jednom od grafova $G_1, \ldots, G_k$.

Primjer: Johnsonova shema

Neka je $X = \binom{V}{k}$ skup svih k-članih podskupova v-članog skupa V.

Onda je $n = |X| = \binom{v}{k}$ i za $K_1, K_2 \in X$ vrijedi $0 \leq |K_1 \cap K_2| \leq k$.

Neka su K_1 i K_2 susjedni u grafu G_i (i-asocirani) ako je $|K_1 \cap K_2| = k - i$, za $i = 0, \ldots, k$. Tako dobivamo asocijacijsku shemu s k klasa koju zovemo Johnsonovom shemom $J(v, k)$.

- Svaki vrh $K \in \binom{V}{k}$ susjedan je samom sebi u G_0.
- Svaka dva vrha $K_1, K_2 \in \binom{V}{k}$, $K_1 \neq K_2$, susjedna su točno u jednom od grafova $G_1, \ldots, G_k$.
- Za svaki brid $\{K_1, K_2\}$ u G_ℓ ($|K_1 \cap K_2| = k - \ell$) brojimo vrhove K_3 takve da je $\{K_1, K_3\}$ brid u G_i ($|K_1 \cap K_3| = k - i$), a $\{K_2, K_3\}$ je brid u G_j ($|K_2 \cap K_3| = k - j$):

Primjer: Johnsonova shema

Neka je $X = \binom{V}{k}$ skup svih k-članih podskupova v-članog skupa V.

Onda je $n = |X| = \binom{v}{k}$ i za $K_1, K_2 \in X$ vrijedi $0 \leq |K_1 \cap K_2| \leq k$.

Neka su K_1 i K_2 susjedni u grafu G_i (i-asocirani) ako je $|K_1 \cap K_2| = k - i$, za $i = 0, \ldots, k$. Tako dobivamo asocijacijsku shemu s k klasa koju zovemo Johnsonovom shemom $J(v, k)$.

- Svaki vrh $K \in \binom{V}{k}$ susjedan je samom sebi u G_0.
- Svaka dva vrha $K_1, K_2 \in \binom{V}{k}$, $K_1 \neq K_2$, susjedna su točno u jednom od grafova $G_1, \ldots, G_k$.
- Za svaki brid $\{K_1, K_2\}$ u G_ℓ ($|K_1 \cap K_2| = k - \ell$) brojimo vrhove K_3 takve da je $\{K_1, K_3\}$ brid u G_i ($|K_1 \cap K_3| = k - i$), a $\{K_2, K_3\}$ je brid u G_j ($|K_2 \cap K_3| = k - j$):

$$p_{ij}^{\ell} = \sum_{r=0}^{k-\ell} \binom{k-\ell}{r} \binom{\ell}{k-i-r} \binom{\ell}{k-j-r} \binom{v-k-\ell}{i+j+r-k}$$

Primjer: Johnsonova shema

Neka je $X = \binom{V}{k}$ skup svih k-članih podskupova v-članog skupa V.

Onda je $n = |X| = \binom{v}{k}$ i za $K_1, K_2 \in X$ vrijedi $0 \leq |K_1 \cap K_2| \leq k$.

Neka su K_1 i K_2 susjedni u grafu G_i (i-asocirani) ako je $|K_1 \cap K_2| = k - i$, za $i = 0, \ldots, k$. Tako dobivamo asocijacijsku shemu s k klasa koju zovemo Johnsonovom shemom $J(v, k)$.

- Svaki vrh $K \in \binom{V}{k}$ susjedan je samom sebi u G_0.
- Svaka dva vrha $K_1, K_2 \in \binom{V}{k}$, $K_1 \neq K_2$, susjedna su točno u jednom od grafova $G_1, \ldots, G_k$.
- Za svaki brid $\{K_1, K_2\}$ u G_ℓ ($|K_1 \cap K_2| = k - \ell$) brojimo vrhove K_3 takve da je $\{K_1, K_3\}$ brid u G_i ($|K_1 \cap K_3| = k - i$), a $\{K_2, K_3\}$ je brid u G_j ($|K_2 \cap K_3| = k - j$):

$$p_{ij}^{\ell} = \sum_{r=0}^{k-\ell} \binom{k-\ell}{r} \binom{\ell}{k-i-r} \binom{\ell}{k-j-r} \binom{v-k-\ell}{i+j+r-k}$$

Ne ovisi o K_1, K_2, nego samo o indeksima i, j, ℓ!

Primjer: Johnsonova shema

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme:

$$p_i(j) = \sum_{r=0}^{i} (-1)^{i-r} \binom{k-r}{i-r} \binom{v-k+r-j}{r} \binom{k-j}{r}$$

Svojstveni potprostori:

$$\langle \mathbf{1} \rangle \oplus T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_k = \mathbb{R}^n, \qquad m_i = \dim T_i = \binom{v}{i} - \binom{v}{i-1}$$

Primjer: Johnsonova shema

Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme:

$$p_i(j) = \sum_{r=0}^{i} (-1)^{i-r} \binom{k-r}{i-r} \binom{v-k+r-j}{r} \binom{k-j}{r}$$

Svojstveni potprostori:

$$\langle \mathbf{1} \rangle \oplus T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_k = \mathbb{R}^n, \qquad m_i = \dim T_i = \binom{v}{i} - \binom{v}{i-1}$$

Skup vrhova Johnsonove sheme $J(v,k)$ je familija $X = \binom{V}{k}$ **svih** k-članih podskupova od V. Dizajn je podfamilija $\mathcal{B} \subseteq X$. Ako numeriramo elemente od X, možemo je reprezentirati karakterističnim vektorom $f \in \{0,1\}^n$, $n = \binom{v}{k}$.

Primjer: Johnsonova shema

Poznato je da je f karakteristični vektor t-(v, k, λ) dizajna ako i samo ako zadovoljava sustav linearnih jednadžbi

$$W_{t,k} \cdot f = \lambda \mathbf{1}$$

Pritom je $W_{t,k}$ Wilsonova $\binom{v}{t} \times \binom{v}{k}$ matrica inkluzije t-članih podskupova u k-članim podskupovima od V.

Primjer: Johnsonova shema

Poznato je da je f karakteristični vektor t-(v, k, λ) dizajna ako i samo ako zadovoljava sustav linearnih jednadžbi

$$W_{t,k} \cdot f = \lambda \mathbf{1}$$

Pritom je $W_{t,k}$ Wilsonova $\binom{v}{t} \times \binom{v}{k}$ matrica inkluzije t-članih podskupova u k-članim podskupovima od V.

Kramer-Mesnerova metoda: zadamo grupu permutacija $G \leq S(V)$ i rješavamo "komprimirani" sustav

$$W_{t,k}^{G} \cdot f = \lambda \mathbf{1}$$

Earl S. Kramer, Dale M. Mesner, *t-designs on hypergraphs*, Discrete Mathematics **15** (1976), 263–296.

Primjer: Johnsonova shema

Teorem (Philippe Delsarte, 1973.).

Neka je $X = \binom{V}{k}$ skup svih k-članih podskupova od V i f karakteristični vektor familije $\mathcal{B} \subseteq X$. Familija $\mathcal{B}$ je t-dizajn ako i samo ako vrijedi

$$E_i \cdot f = 0, \quad \text{za } i = 1, \ldots, t.$$

Ovdje su E_i glavne idempotente Johnsonove sheme $J(v, k)$.

Primjer: Johnsonova shema

Teorem (Philippe Delsarte, 1973.).

Neka je $X = \binom{V}{k}$ skup svih k-članih podskupova od V i f karakteristični vektor familije $\mathcal{B} \subseteq X$. Familija $\mathcal{B}$ je t-dizajn ako i samo ako vrijedi

$$E_i \cdot f = 0, \quad \text{za } i = 1, \ldots, t.$$

Ovdje su E_i glavne idempotente Johnsonove sheme $J(v, k)$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}$ t-dizajn. Onda je $W_{t,k} \cdot f = \lambda \mathbf{1}$ za neki $\lambda \in \mathbb{N}$, pa je $(u - v) \cdot f = 0$ za bilo koja dva retka u, v matrice $W_{t,k}$.

Primjer: Johnsonova shema

Teorem (Philippe Delsarte, 1973.).

Neka je $X = \binom{V}{k}$ skup svih k-članih podskupova od V i f karakteristični vektor familije $\mathcal{B} \subseteq X$. Familija $\mathcal{B}$ je t-dizajn ako i samo ako vrijedi

$$E_i \cdot f = 0, \quad \text{za } i = 1, \ldots, t.$$

Ovdje su E_i glavne idempotente Johnsonove sheme $J(v, k)$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}$ t-dizajn. Onda je $W_{t,k} \cdot f = \lambda \mathbf{1}$ za neki $\lambda \in \mathbb{N}$, pa je $(u - v) \cdot f = 0$ za bilo koja dva retka u, v matrice $W_{t,k}$.

Dakle, f je ortogonalan na potprostor razapet razlikama redaka matrice $W_{t,k}$, a to je ortogonalni komplement od $\mathbf{1}$ u potprostoru $\operatorname{Im} W_{t,k}^{\tau} = \langle \mathbf{1} \rangle \oplus T_1 \oplus \cdots \oplus T_t$, što je $T_1 \oplus \cdots \oplus T_t$.

Primjer: Johnsonova shema

Teorem (Philippe Delsarte, 1973.).

Neka je $X = \binom{V}{k}$ skup svih k-članih podskupova od V i f karakteristični vektor familije $\mathcal{B} \subseteq X$. Familija $\mathcal{B}$ je t-dizajn ako i samo ako vrijedi

$$E_i \cdot f = 0, \quad \text{za } i = 1, \ldots, t.$$

Ovdje su E_i glavne idempotente Johnsonove sheme $J(v, k)$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}$ t-dizajn. Onda je $W_{t,k} \cdot f = \lambda \mathbf{1}$ za neki $\lambda \in \mathbb{N}$, pa je $(u - v) \cdot f = 0$ za bilo koja dva retka u, v matrice $W_{t,k}$.

Dakle, f je ortogonalan na potprostor razapet razlikama redaka matrice $W_{t,k}$, a to je ortogonalni komplement od $\mathbf{1}$ u potprostoru $\operatorname{Im} W_{t,k}^{\tau} = \langle \mathbf{1} \rangle \oplus T_1 \oplus \cdots \oplus T_t$, što je $T_1 \oplus \cdots \oplus T_t$. Slijedi da je $f \perp T_i$, tj. $E_i \cdot f = 0$ za $i = 1, \ldots, t$. Na sličan način pokazuje se obrat.

Kratka povijest asocijacijskih shema

R. C. Bose, T. Shimamoto, *Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes*, J. Amer. Statist. Assoc. **47** (1952), 151–184.

R. C. Bose, D. M. Mesner, *On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 21–38.

Kratka povijest asocijacijskih shema

R. C. Bose, T. Shimamoto, *Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes*, J. Amer. Statist. Assoc. **47** (1952), 151–184.

R. C. Bose, D. M. Mesner, *On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs*, Ann. Math. Statist. **30** (1959), 21–38.

B. Weisfeiler, A. A. Lehman, *Reduction of a graph to a canonical form and an algebra which appears in this process* (in Russian), Scientific-Technological Investigations **2** (1968), 12–16.

J. J. Graham, G. I. Lehrer, *Cellular algebras*, Invent. Math. **123** (1996), no. 1, 1–34.

Kratka povijest asocijacijskih shema

D. G. Higman, *Coherent configurations. I. Ordinary representation theory*, Geometriae Dedicata **4** (1975), no. 1, 1–32.

D. G. Higman, *Coherent configurations. II. Weights*, Geometriae Dedicata **5** (1976), no. 4, 413–424.

"Teorija grupa bez grupa."

Kratka povijest asocijacijskih shema

D. G. Higman, *Coherent configurations. I. Ordinary representation theory*, Geometriae Dedicata **4** (1975), no. 1, 1–32.

D. G. Higman, *Coherent configurations. II. Weights*, Geometriae Dedicata **5** (1976), no. 4, 413–424.

"Teorija grupa bez grupa."

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Kratka povijest asocijacijskih shema

D. G. Higman, *Coherent configurations. I. Ordinary representation theory*, Geometriae Dedicata **4** (1975), no. 1, 1–32.

D. G. Higman, *Coherent configurations. II. Weights*, Geometriae Dedicata **5** (1976), no. 4, 413–424.

"Teorija grupa bez grupa."

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema sa skupom vrhova X. Podskup $Y \subseteq X$ je (Delsarteov) t-dizajn u $\mathcal{A}$ ako za karatkeristični vektor f od Y vrijedi $E_i \cdot f = 0$, za $t = 1, \ldots, t$.

Delsarteovi dizajni

Teorem (Philippe Delsarte, 1973.).

Familija $\mathcal{B} \subseteq \binom{V}{k}$ je kombinatorni t-dizajn ako i samo ako je Delsarteov t-dizajn u Johnsonovoj shemi.

Delsarteovi dizajni

Teorem (Philippe Delsarte, 1973.).

Familija $\mathcal{B} \subseteq \binom{V}{k}$ je kombinatorni t-dizajn ako i samo ako je Delsarteov t-dizajn u Johnsonovoj shemi.

Što su Delsarteovi t-dizajni u drugim asocijacijskim shemama?

Delsarteovi dizajni

Teorem (Philippe Delsarte, 1973.).

Familija $\mathcal{B} \subseteq \binom{V}{k}$ je kombinatorni t-dizajn ako i samo ako je Delsarteov t-dizajn u Johnsonovoj shemi.

Što su Delsarteovi t-dizajni u drugim asocijacijskim shemama?

Hammingova shema $H(m, q)$ sastoji se uređenih m-torki (riječi) nad alfabetom Q veličine q:

$$X = Q^m = \{(a_1, \ldots, a_m) \mid a_i \in Q\}, \quad n = |X| = q^m.$$

Hammingova metrika zadana je s $d(a, b) = |\{i \in \{1, \ldots, m\} \mid a_i \neq b_i\}|$. Riječi $a, b \in X$ su i-asocirane u $H(m, q)$ ako je $d(a, b) = i$.

Hammingova shema

U teoriji kodiranja cilj je naći podskup $Y \subseteq X$ sa što većom minimalnom udaljenosti $\delta = \min\{d(a,b) \mid a,b \in Y, a \neq b\}$. To omogućuje detekciju $\delta - 1$ pogrešaka i ispravljanje $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$ pogrešaka ako komuniciramo slanjem kodnih riječi iz Y.

Hammingova shema

U teoriji kodiranja cilj je naći podskup $Y \subseteq X$ sa što većom minimalnom udaljenosti $\delta = \min\{d(a,b) \mid a,b \in Y, a \neq b\}$. To omogućuje detekciju $\delta - 1$ pogrešaka i ispravljanje $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$ pogrešaka ako komuniciramo slanjem kodnih riječi iz Y.

U Delsarteovoj teoriji kodovima minimalne težine δ odgovaraju δ-klike u asocijacijskoj shemi. To su podskupovi $Y \subseteq X$ takvi da za sve $a, b \in Y$, $a \neq b$ vrijedi: ako su i-asocirani, onda je $i \geq \delta$. Delsarte dokazuje ocjene za klike u asocijacijskim shemama i u specijalnom slučaju Hammingove sheme dobiva ocjene za parametre kodova.

Hammingova shema

U teoriji kodiranja cilj je naći podskup $Y \subseteq X$ sa što većom minimalnom udaljenosti $\delta = \min\{d(a,b) \mid a,b \in Y, a \neq b\}$. To omogućuje detekciju $\delta - 1$ pogrešaka i ispravljanje $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$ pogrešaka ako komuniciramo slanjem kodnih riječi iz Y.

U Delsarteovoj teoriji kodovima minimalne težine δ odgovaraju δ-klike u asocijacijskoj shemi. To su podskupovi $Y \subseteq X$ takvi da za sve $a, b \in Y$, $a \neq b$ vrijedi: ako su i-asocirani, onda je $i \geq \delta$. Delsarte dokazuje ocjene za klike u asocijacijskim shemama i u specijalnom slučaju Hammingove sheme dobiva ocjene za parametre kodova.

Što su Delsarteovi t-dizajni u Hammingovoj shemi $H(m,q)$?

Hammingova shema

U teoriji kodiranja cilj je naći podskup $Y \subseteq X$ sa što većom minimalnom udaljenosti $\delta = \min\{d(a,b) \mid a,b \in Y, a \neq b\}$. To omogućuje detekciju $\delta - 1$ pogrešaka i ispravljanje $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$ pogrešaka ako komuniciramo slanjem kodnih riječi iz Y.

U Delsarteovoj teoriji kodovima minimalne težine δ odgovaraju δ-klike u asocijacijskoj shemi. To su podskupovi $Y \subseteq X$ takvi da za sve $a, b \in Y$, $a \neq b$ vrijedi: ako su i-asocirani, onda je $i \geq \delta$. Delsarte dokazuje ocjene za klike u asocijacijskim shemama i u specijalnom slučaju Hammingove sheme dobiva ocjene za parametre kodova.

Što su Delsarteovi t-dizajni u Hammingovoj shemi $H(m,q)$?

"Orthogonal array" stupnja m, reda q, snage t i indeksa λ je podskup $Y \subseteq X$ veličine $N = |Y|$ takav da se restrikcijom riječi iz Y na bilo kojih t koordinata dobiva svaka riječ iz Q^t točno λ puta. Oznaka: $OA(N,m,q,t)$ ili $OA_\lambda(t,m,q)$ (vrijedi $N = \lambda \cdot q^t$).

Hammingova shema

Primjer. Neka su $A^{(\ell)} = [a_{ij}^{(\ell)}]$, $\ell = 1, \ldots, m-2$ međusobno ortogonalni latinski kvadrati reda q. Onda skup od $N = q^2$ riječi

$$Y = \left\{ (i, j, a_{ij}^{(1)}, \ldots, a_{ij}^{(m-2)}) \mid i, j = 1, \ldots, q \right\}$$

čini $OA(q^2, m, q, 2)$ snage $t = 2$ i indeksa $\lambda = 1$.

Hammingova shema

Primjer. Neka su $A^{(\ell)} = [a_{ij}^{(\ell)}]$, $\ell = 1, \ldots, m-2$ međusobno ortogonalni latinski kvadrati reda q. Onda skup od $N = q^2$ riječi

$$Y = \left\{ (i, j, a_{ij}^{(1)}, \ldots, a_{ij}^{(m-2)}) \mid i, j = 1, \ldots, q \right\}$$

čini $OA(q^2, m, q, 2)$ snage $t = 2$ i indeksa $\lambda = 1$.

A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane, J. Stufken, *Orthogonal arrays. Theory and applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.

Hammingova shema

Primjer. Neka su $A^{(\ell)} = [a_{ij}^{(\ell)}]$, $\ell = 1, \ldots, m-2$ međusobno ortogonalni latinski kvadrati reda q. Onda skup od $N = q^2$ riječi

$$Y = \left\{ (i, j, a_{ij}^{(1)}, \ldots, a_{ij}^{(m-2)}) \mid i, j = 1, \ldots, q \right\}$$

čini $OA(q^2, m, q, 2)$ snage $t = 2$ i indeksa $\lambda = 1$.

A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane, J. Stufken, *Orthogonal arrays. Theory and applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.

Fisher (1940.): $b \geq v$

Hammingova shema

Primjer. Neka su $A^{(\ell)} = [a_{ij}^{(\ell)}]$, $\ell = 1, \ldots, m-2$ međusobno ortogonalni latinski kvadrati reda q. Onda skup od $N = q^2$ riječi

$$Y = \left\{ (i, j, a_{ij}^{(1)}, \ldots, a_{ij}^{(m-2)}) \mid i, j = 1, \ldots, q \right\}$$

čini $OA(q^2, m, q, 2)$ snage $t = 2$ i indeksa $\lambda = 1$.

A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane, J. Stufken, *Orthogonal arrays. Theory and applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.

Fisher (1940.): $b \geq v$ Ray-Chaudhuri, Wilson (1975.): $b \geq \binom{v}{\lfloor t/2 \rfloor}$

Hammingova shema

Primjer. Neka su $A^{(\ell)} = [a_{ij}^{(\ell)}]$, $\ell = 1, \ldots, m-2$ međusobno ortogonalni latinski kvadrati reda q. Onda skup od $N = q^2$ riječi

$$Y = \left\{ (i, j, a_{ij}^{(1)}, \ldots, a_{ij}^{(m-2)}) \mid i, j = 1, \ldots, q \right\}$$

čini $OA(q^2, m, q, 2)$ snage $t = 2$ i indeksa $\lambda = 1$.

A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane, J. Stufken, *Orthogonal arrays. Theory and applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.

Fisher (1940.): $b \geq v$ Ray-Chaudhuri, Wilson (1975.): $b \geq \binom{v}{\lfloor t/2 \rfloor}$

C. R. Rao (1947.): $N \geq \sum_{i=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{m}{i} (q-1)^i$

Grassmannova shema

Grassmannova shema $G_q(v,k)$ sastoji se od svih k-dimenzionalnih potprostora v-dimenzionalnog vektorskog prostora V nad konačnim poljem $GF(q)$. Dva k-potprostora $A, B \subseteq V$ su i-asocirana ako je $\dim(A \cap B) = k - i$.

Grassmannova shema

Grassmannova shema $G_q(v,k)$ sastoji se od svih k-dimenzionalnih potprostora v-dimenzionalnog vektorskog prostora V nad konačnim poljem $GF(q)$. Dva k-potprostora $A, B \subseteq V$ su i-asocirana ako je $\dim(A \cap B) = k - i$.

Što su Delsarteovi t-dizajni u Grassmannovoj shemi $G_q(v,k)$?

Grassmannova shema

Grassmannova shema $G_q(v,k)$ sastoji se od svih k-dimenzionalnih potprostora v-dimenzionalnog vektorskog prostora V nad konačnim poljem $GF(q)$. Dva k-potprostora $A, B \subseteq V$ su i-asocirana ako je $\dim(A \cap B) = k - i$.

Što su Delsarteovi t-dizajni u Grassmannovoj shemi $G_q(v,k)$?

Dizajn nad $GF(q)$ s parametrima t-$(v,k,\lambda;q)$ je familija $\mathcal{B}$ nekih k-potprostora od V takva da je svaki t-potprostor sadržan u točno λ potprostora iz $\mathcal{B}$.

Grassmannova shema

Grassmannova shema $G_q(v,k)$ sastoji se od svih k-dimenzionalnih potprostora v-dimenzionalnog vektorskog prostora V nad konačnim poljem $GF(q)$. Dva k-potprostora $A, B \subseteq V$ su i-asocirana ako je $\dim(A \cap B) = k - i$.

Što su Delsarteovi t-dizajni u Grassmannovoj shemi $G_q(v,k)$?

Dizajn nad $GF(q)$ s parametrima t-$(v,k,\lambda;q)$ je familija $\mathcal{B}$ nekih k-potprostora od V takva da je svaki t-potprostor sadržan u točno λ potprostora iz $\mathcal{B}$.

P. J. Cameron, *Generalisation of Fisher's inequality to fields with more than one element*, Combinatorics (Proc. British Combinatorial Conf., Univ. Coll. Wales, Aberystwyth, 1973), pp. 9–13. London Math. Soc. Lecture Note Ser., No. 13, Cambridge Univ. Press, London, 1974.

Grassmannova shema

P. Delsarte, *Association schemes and t-designs in regular semilattices*, J. Combinatorial Theory Ser. A **20** (1976), no. 2, 230–243.

Grassmannova shema

P. Delsarte, *Association schemes and t-designs in regular semilattices*, J. Combinatorial Theory Ser. A **20** (1976), no. 2, 230–243.

M. Braun, T. Etzion, P. R. J. Östergård, A. Vardy, A. Wassermann, *Existence of q-analogs of Steiner systems*, Forum Math. Pi **4** (2016), e7, 14 pp.

$\rightsquigarrow$ Postoje 2-$(13, 3, 1; 2)$ dizajni.

Grassmannova shema

P. Delsarte, *Association schemes and t-designs in regular semilattices*, J. Combinatorial Theory Ser. A **20** (1976), no. 2, 230–243.

M. Braun, T. Etzion, P. R. J. Östergård, A. Vardy, A. Wassermann, *Existence of q-analogs of Steiner systems*, Forum Math. Pi **4** (2016), e7, 14 pp.

$\rightsquigarrow$ Postoje 2-$(13, 3, 1; 2)$ dizajni.

Postoji li 2-$(7, 3, 1; 2)$ dizajn, tj. Fanova ravnina nad $GF(2)$?

Shema simetrične grupe S_n

Neka je S_n simetrična grupa stupnja n. Za svaku klasu konjugacije C_α definiramo graf G_α sa skupom vrhova S_n u kojem su permutacije g i h susjedne ako je $gh^{-1} \in C_\alpha$. Tako dobivamo asocijacijsku shemu od S_n.

Shema simetrične grupe S_n

Neka je S_n simetrična grupa stupnja n. Za svaku klasu konjugacije C_α definiramo graf G_α sa skupom vrhova S_n u kojem su permutacije g i h susjedne ako je $gh^{-1} \in C_\alpha$. Tako dobivamo asocijacijsku shemu od S_n.

Što su odgovarajući Delsarteovi dizajni?

Shema simetrične grupe S_n

Neka je S_n simetrična grupa stupnja n. Za svaku klasu konjugacije C_α definiramo graf G_α sa skupom vrhova S_n u kojem su permutacije g i h susjedne ako je $gh^{-1} \in C_\alpha$. Tako dobivamo asocijacijsku shemu od S_n.

Što su odgovarajući Delsarteovi dizajni?

Neka je $\Omega = \{1, \ldots, n\}$. Youngova tablica je uređena particija $P = (P_1, \ldots, P_k)$ od Ω takva da je $|P_1| \geq \cdots \geq |P_k|$. Oblik od P je particija $\lambda = (|P_1|, \ldots, |P_k|)$ prirodnog broja n.

Shema simetrične grupe S_n

Neka je S_n simetrična grupa stupnja n. Za svaku klasu konjugacije C_α definiramo graf G_α sa skupom vrhova S_n u kojem su permutacije g i h susjedne ako je $gh^{-1} \in C_\alpha$. Tako dobivamo asocijacijsku shemu od S_n.

Što su odgovarajući Delsarteovi dizajni?

Neka je $\Omega = \{1, \ldots, n\}$. Youngova tablica je uređena particija $P = (P_1, \ldots, P_k)$ od Ω takva da je $|P_1| \geq \cdots \geq |P_k|$. Oblik od P je particija $\lambda = (|P_1|, \ldots, |P_k|)$ prirodnog broja n.

Za podgrupu $G \leq S_n$ kažemo da je λ-tranzitivna ako za svake dvije Youngove tablice P i Q oblika λ postoji $g \in G$ takav da je $gP = Q$.

Shema simetrične grupe S_n

Neka je S_n simetrična grupa stupnja n. Za svaku klasu konjugacije C_α definiramo graf G_α sa skupom vrhova S_n u kojem su permutacije g i h susjedne ako je $gh^{-1} \in C_\alpha$. Tako dobivamo asocijacijsku shemu od S_n.

Što su odgovarajući Delsarteovi dizajni?

Neka je $\Omega = \{1, \ldots, n\}$. Youngova tablica je uređena particija $P = (P_1, \ldots, P_k)$ od Ω takva da je $|P_1| \geq \cdots \geq |P_k|$. Oblik od P je particija $\lambda = (|P_1|, \ldots, |P_k|)$ prirodnog broja n.

Za podgrupu $G \leq S_n$ kažemo da je λ-tranzitivna ako za svake dvije Youngove tablice P i Q oblika λ postoji $g \in G$ takav da je $gP = Q$.

Za podskup $D \leq S_n$ kažemo da je λ-tranzitivan ako postoji broj r takav da za svake dvije Youngove tablice P i Q oblika λ postoji točno r permutacija $g \in D$ za koje je $gP = Q$.

Shema simetrične grupe S_n

Uobičajena t-tranzitivnost ekvivalentna je s λ-tranzitivnosti za particiju $\lambda = (n-t, 1, \ldots, 1)$, a t-homogenost za particiju $\lambda = (n-t, t)$.

Shema simetrične grupe S_n

Uobičajena t-tranzitivnost ekvivalentna je s λ-tranzitivnosti za particiju $\lambda = (n-t, 1, \ldots, 1)$, a t-homogenost za particiju $\lambda = (n-t, t)$.

Pokazuje se da su λ-tranzitivni skupovi permutacija ekvivalentni s Delsarteovim $\mathcal{T}$-dizajnima u asocijacijskoj shemi od S_n, za $\mathcal{T} = \{\mu \mid \mu \succeq \lambda\}$. U ovoj asocijacijskoj shemi glavne idempotente nisu indeksirane prirodnim brojevima, nego particijama prirodnih brojeva uređenim s $\succeq$ kao u Youngovoj rešetki (inkluzijom odgovarajućih Ferrersovih dijagrama).

Shema simetrične grupe S_n

Uobičajena t-tranzitivnost ekvivalentna je s λ-tranzitivnosti za particiju $\lambda = (n-t, 1, \ldots, 1)$, a t-homogenost za particiju $\lambda = (n-t, t)$.

Pokazuje se da su λ-tranzitivni skupovi permutacija ekvivalentni s Delsarteovim $\mathcal{T}$-dizajnima u asocijacijskoj shemi od S_n, za $\mathcal{T} = \{\mu \mid \mu \succeq \lambda\}$. U ovoj asocijacijskoj shemi glavne idempotente nisu indeksirane prirodnim brojevima, nego particijama prirodnih brojeva uređenim s $\succeq$ kao u Youngovoj rešetki (inkluzijom odgovarajućih Ferrersovih dijagrama).

W. J. Martin, B. E. Sagan, *A new notion of transitivity for groups and sets of permutations*, J. London Math. Soc. (2) **73** (2006), no. 1, 1–13.

Produkt asocijacijskih shema i miješani dizajni

Neka je skup $m \times m$ matrica $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_d\}$ asocijacijska shema s d klasa, a skup $n \times n$ matrica $\mathcal{B} = \{B_0, \ldots, B_e\}$ asocijacijska shema s e klasa. Onda je skup $mn \times mn$ matrica

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \{A_i \otimes B_j \mid i = 0, \ldots, d,\ j = 0, \ldots, e\}$$

asocijacijska shema s $de + d + e$ klasa, pri čemu je $\otimes$ Kroneckerov produkt matrica.

Produkt asocijacijskih shema i miješani dizajni

Neka je skup $m \times m$ matrica $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_d\}$ asocijacijska shema s d klasa, a skup $n \times n$ matrica $\mathcal{B} = \{B_0, \ldots, B_e\}$ asocijacijska shema s e klasa. Onda je skup $mn \times mn$ matrica

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \{A_i \otimes B_j \mid i = 0, \ldots, d,\ j = 0, \ldots, e\}$$

asocijacijska shema s $de + d + e$ klasa, pri čemu je $\otimes$ Kroneckerov produkt matrica.

W. J. Martin, *Designs in product association schemes*, Des. Codes Cryptogr. **16** (1999), no. 3, 271–289.

W. J. Martin, *Mixed block designs*, J. Combin. Des. **6** (1998), no. 2, 151–163.

Produkt asocijacijskih shema i miješani dizajni

Neka je skup $m \times m$ matrica $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_d\}$ asocijacijska shema s d klasa, a skup $n \times n$ matrica $\mathcal{B} = \{B_0, \ldots, B_e\}$ asocijacijska shema s e klasa. Onda je skup $mn \times mn$ matrica

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \{A_i \otimes B_j \mid i = 0, \ldots, d,\ j = 0, \ldots, e\}$$

asocijacijska shema s $de + d + e$ klasa, pri čemu je $\otimes$ Kroneckerov produkt matrica.

W. J. Martin, *Designs in product association schemes*, Des. Codes Cryptogr. **16** (1999), no. 3, 271–289.

W. J. Martin, *Mixed block designs*, J. Combin. Des. **6** (1998), no. 2, 151–163.

Što su Delsarteovi dizajni u produktu dviju Johnsonovih shema $J(v_1, k_1) \otimes J(v_2, k_2)$?

Produkt asocijacijskih shema i miješani dizajni

Neka su V_1 i V_2 skupovi, $|V_i| = v_i$ i $1 \leq k_i < v_i$ za $i = 1, 2$. Parove (S_1, S_2) podskupova $S_i \subseteq V_i$ zovemo domine. Kažemo da (S_1, S_2) dominira (T_1, T_2) ako vrijedi $T_1 \subseteq S_1$ i $T_2 \subseteq S_2$.

Produkt asocijacijskih shema i miješani dizajni

Neka su V_1 i V_2 skupovi, $|V_i| = v_i$ i $1 \leq k_i < v_i$ za $i = 1, 2$. Parove (S_1, S_2) podskupova $S_i \subseteq V_i$ zovemo domine. Kažemo da (S_1, S_2) dominira (T_1, T_2) ako vrijedi $T_1 \subseteq S_1$ i $T_2 \subseteq S_2$.

Familija domina $\mathcal{B} \subseteq \binom{V_1}{k_1} \times \binom{V_2}{k_2}$ je miješani dizajn s parametrima t-$(v_1, k_1, v_2, k_2, \Lambda)$, za $\Lambda = \{\lambda_{(t_1,t_2)} \mid 0 \leq t_i \leq k_i, t_1 + t_2 \leq t\}$, ako je svaki par (T_1, T_2) s $T_i \subseteq V_i$, $|T_i| = t_i \leq k_i$, $t_1 + t_2 \leq t$ dominiran s točno $\lambda_{(t_1,t_2)}$ domina iz $\mathcal{B}$.

Produkt asocijacijskih shema i miješani dizajni

Neka su V_1 i V_2 skupovi, $|V_i| = v_i$ i $1 \leq k_i < v_i$ za $i = 1, 2$. Parove (S_1, S_2) podskupova $S_i \subseteq V_i$ zovemo domine. Kažemo da (S_1, S_2) dominira (T_1, T_2) ako vrijedi $T_1 \subseteq S_1$ i $T_2 \subseteq S_2$.

Familija domina $\mathcal{B} \subseteq \binom{V_1}{k_1} \times \binom{V_2}{k_2}$ je miješani dizajn s parametrima t-$(v_1, k_1, v_2, k_2, \Lambda)$, za $\Lambda = \{\lambda_{(t_1,t_2)} \mid 0 \leq t_i \leq k_i, t_1 + t_2 \leq t\}$, ako je svaki par (T_1, T_2) s $T_i \subseteq V_i$, $|T_i| = t_i \leq k_i$, $t_1 + t_2 \leq t$ dominiran s točno $\lambda_{(t_1,t_2)}$ domina iz $\mathcal{B}$.

Akad.g. 2023./24. $\rightsquigarrow$ **Kolegij na doktorskom studiju o asocijacijskim shemama!**

Produkt asocijacijskih shema i miješani dizajni

Neka su V_1 i V_2 skupovi, $|V_i| = v_i$ i $1 \leq k_i < v_i$ za $i = 1, 2$. Parove (S_1, S_2) podskupova $S_i \subseteq V_i$ zovemo domine. Kažemo da (S_1, S_2) dominira (T_1, T_2) ako vrijedi $T_1 \subseteq S_1$ i $T_2 \subseteq S_2$.

Familija domina $\mathcal{B} \subseteq \binom{V_1}{k_1} \times \binom{V_2}{k_2}$ je miješani dizajn s parametrima t-$(v_1, k_1, v_2, k_2, \Lambda)$, za $\Lambda = \{\lambda_{(t_1,t_2)} \mid 0 \leq t_i \leq k_i, t_1 + t_2 \leq t\}$, ako je svaki par (T_1, T_2) s $T_i \subseteq V_i$, $|T_i| = t_i \leq k_i$, $t_1 + t_2 \leq t$ dominiran s točno $\lambda_{(t_1,t_2)}$ domina iz $\mathcal{B}$.

Akad.g. 2023./24. $\rightsquigarrow$ **Kolegij na doktorskom studiju o asocijacijskim shemama!**

Kraj

Hvala na pažnji!