Asocijacijske sheme

Lucija Relić

Prirodoslovno-matematički fakultet — Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

23. siječnja 2023.

Asocijacijske sheme

- teorija kodiranja, teorija dizajna, algebarska teorija grafova, teorija grupa

Asocijacijske sheme

- teorija kodiranja, teorija dizajna, algebarska teorija grafova, teorija grupa
- započelo proučavanje primjenom u statistici
- proučavanje parcijalno balansiranih nepotpunih blokovnih dizajna i njihove primjene u analizi varijance
  R. C. Bose, T. Shimamoto, *Classification and Analysis of Partially Balanced Incomplete Block Designs with Two Associate Classes*, Journal of the American Statistical Association 47.258 (1952)

Asocijacijske sheme

- teorija kodiranja, teorija dizajna, algebarska teorija grafova, teorija grupa
- započelo proučavanje primjenom u statistici
- proučavanje parcijalno balansiranih nepotpunih blokovnih dizajna i njihove primjene u analizi varijance
  R. C. Bose, T. Shimamoto, *Classification and Analysis of Partially Balanced Incomplete Block Designs with Two Associate Classes*, Journal of the American Statistical Association 47.258 (1952)
- korištenje svojstva asocijacijskih shema pri konstruiranju ograda u linearnom programiranju
  P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Research Laboratories, 1973.

Asocijacijske sheme

Definicija

Asocijacijska shema s d klasa na n-članom skupu X, $n \in \mathbb{N}$, skup je neusmjerenih nepraznih grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa skupom vrhova X takav da vrijedi:

1. *graf G_0 kao skup bridova ima samo petlje na svim vrhovima iz X,*
2. *za različite elemente $x, y \in X$ postoji točno jedan graf G_i koji sadrži brid $\{x, y\}$,*
3. *za sve $x, y \in X$ te za sve $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ broj elemenata $z \in X$ takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{y, z\}$ brid u G_j ovisi samo o grafu G_k koji sadrži brid $\{x, y\}$. Taj broj zovemo presječnim brojem sheme i označavamo $p^k_{i,j}$.*

Za graf G_i kažemo da je i-ta klasa sheme, a za elemente $x, y \in X$ kažemo da su i-asocirani ako je $\{x, y\}$ brid u grafu G_i.

Asocijacijske sheme

Definicija

Asocijacijska shema s d klasa na n-članom skupu X, $n \in \mathbb{N}$, skup je neusmjerenih nepraznih grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa skupom vrhova X takav da vrijedi:

1. *graf G_0 kao skup bridova ima samo petlje na svim vrhovima iz X,*
2. *za različite elemente $x, y \in X$ postoji točno jedan graf G_i koji sadrži brid $\{x, y\}$,*
3. *za sve $x, y \in X$ te za sve $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ broj elemenata $z \in X$ takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{y, z\}$ brid u G_j ovisi samo o grafu G_k koji sadrži brid $\{x, y\}$. Taj broj zovemo presječnim brojem sheme i označavamo $p^k_{i,j}$.*

Za graf G_i kažemo da je i-ta klasa sheme, a za elemente $x, y \in X$ kažemo da su i-asocirani ako je $\{x, y\}$ brid u grafu G_i.

Grafovi asocijacijske sheme su regularni.

Asocijacijske sheme

Definicija

Asocijacijska shema s d klasa je skup matrica $\{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ različitih od nulmatrice dimenzija $n \times n$ s elementima 0 ili 1 koje zadovoljavaju sljedeća svojstva:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. $A_i^t = A_i$, $i = 0, 1, \ldots, d$,
4. *produkt matrica $A_i A_j$ je linearna kombinacija matrica $A_0, A_1, \ldots, A_d$ za sve i, j.*

Asocijacijske sheme

Definicija

Asocijacijska shema s d klasa je skup matrica $\{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ različitih od nulmatrice dimenzija $n \times n$ s elementima 0 ili 1 koje zadovoljavaju sljedeća svojstva:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. $A_i^t = A_i$, $i = 0, 1, \ldots, d$,
4. *produkt matrica $A_i A_j$ je linearna kombinacija matrica $A_0, A_1, \ldots, A_d$ za sve i, j.*

Matrice asocijacijske sheme komutiraju s obzirom na matrično množenje.

Ekvivalencija definicija

Definicija

Neka je G graf sa skupom vrhova $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, i skupom bridova E. Matrica susjedstva grafa G je matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ definirana sa

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{za } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Ekvivalencija definicija

Definicija

Neka je G graf sa skupom vrhova $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, i skupom bridova E. Matrica susjedstva grafa G je matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ definirana sa

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{za } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

- matrica susjedstva simetrična za neusmjerene grafove
- I je matrica susjedstva od G_0
- particioniranje potpunog grafa odgovara relaciji $\sum_{i=1}^{d} A_i = J - I$

Ekvivalencija definicija

Definicija

Neka je G graf sa skupom vrhova $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, i skupom bridova E. Matrica susjedstva grafa G je matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ definirana sa

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} 1, & za\ \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & inače. \end{cases}$$

- matrica susjedstva simetrična za neusmjerene grafove
- I je matrica susjedstva od G_0
- particioniranje potpunog grafa odgovara relaciji $\sum_{i=1}^{d} A_i = J - I$
- neka su $i, j \in \{0, 1, \ldots, d\}$ te $x, y \in X$, $[A_i \cdot A_j]_{x,y}$ je broj vrhova $z \in X$ koji su sa x susjedni u grafu G_i, a sa y u grafu G_j

$$[A_i \cdot A_j]_{x,y} = \sum_{z \in X} [A_i]_{x,z} \cdot [A_j]_{z,y}$$

Ekvivalencija definicija

Definicija

Neka je G graf sa skupom vrhova $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, i skupom bridova E. Matrica susjedstva grafa G je matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ definirana sa

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{za } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

- matrica susjedstva simetrična za neusmjerene grafove
- I je matrica susjedstva od G_0
- particioniranje potpunog grafa odgovara relaciji $\sum_{i=1}^{d} A_i = J - I$
- neka su $i, j \in \{0, 1, \ldots, d\}$ te $x, y \in X$, $[A_i \cdot A_j]_{x,y}$ je broj vrhova $z \in X$ koji su sa x susjedni u grafu G_i, a sa y u grafu G_j

$$[A_i \cdot A_j]_{x,y} = \sum_{z \in X} [A_i]_{x,z} \cdot [A_j]_{z,y} = p_{i,j}^k$$

Johnsonova shema

Neka je $X = \binom{V}{k}$ familija svih k-članih podskupova v-članog skupa V. Johnsonov graf $J(v, k)$ je graf kojemu je skup vrhova X, a dva su skupa (vrha) susjedna ako se sijeku u $k - 1$ elemenata.

Johnsonova shema

Neka je $X = \binom{V}{k}$ familija svih k-članih podskupova v-članog skupa V. Johnsonov graf $J(v, k)$ je graf kojemu je skup vrhova X, a dva su skupa (vrha) susjedna ako se sijeku u $k - 1$ elemenata.

Generalizirani Johnsonov graf $J(v, k, i)$ ima skup vrhova X, a skupovi (vrhovi) su susjedni ako se sijeku u $k - i$ elemenata.
$J(v, k, k)$ poznat je i pod imenom Kneserov graf.

Johnsonova shema

Neka je $X = \binom{V}{k}$ familija svih k-članih podskupova v-članog skupa V. Johnsonov graf $J(v, k)$ je graf kojemu je skup vrhova X, a dva su skupa (vrha) susjedna ako se sijeku u $k - 1$ elemenata.

Generalizirani Johnsonov graf $J(v, k, i)$ ima skup vrhova X, a skupovi (vrhovi) su susjedni ako se sijeku u $k - i$ elemenata.
$J(v, k, k)$ poznat je i pod imenom Kneserov graf.

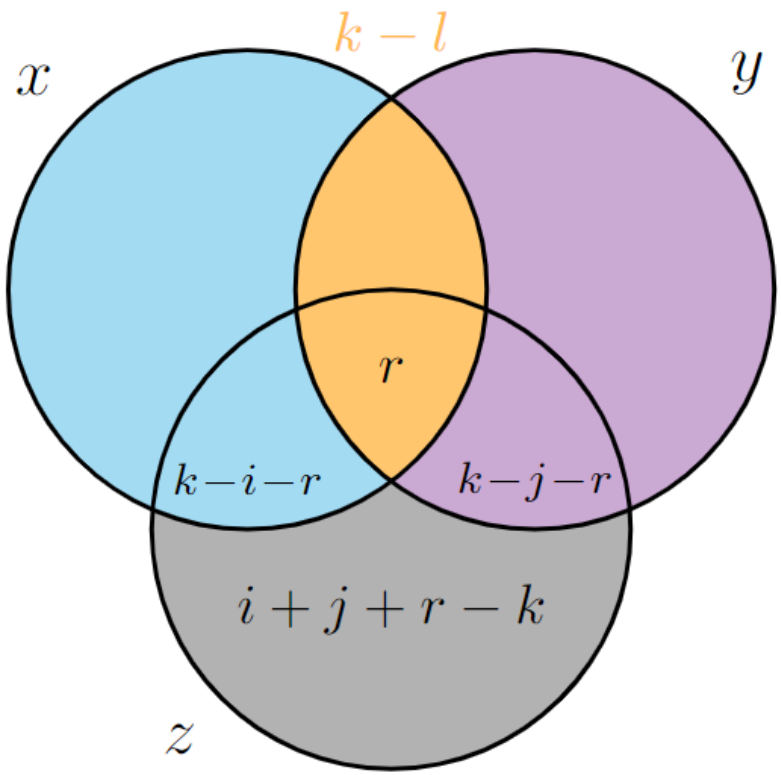
Skup generaliziranih Johnsonovih grafova $J(v, k, i)$ za $i = 0, 1, \ldots, k$, odnosno njihovih matrica susjedstva, čini asocijacijsku shemu s k klasa poznatu kao Johnsonova shema.

Johnsonova shema - provjera definicije

0. Johnsonov graf je neusmjeren
1. u grafu $J(v,k,0)$ vrhovi su susjedni ako se sijeku u $k-0=k$ elemenata, a proizvoljan k-člani podskup od V jedino se sam sa sobom siječe u točno k elemenata, pa je $G_0 = J(v,k,0)$ graf koji kao bridove ima samo sve petlje
2. dva skupa mogu imati točno $k-i$ elemenata u presjeku samo za jedan indeks i, a grafovi $J(v,k,i)$ za $i=1,\dots,k$ particioniraju potpun graf K_n za $n=\binom{v}{k}$, dakle svaki brid pojavljuje se u točno jednom grafu $G_i = J(v,k,i)$
3. $$p^{\ell}_{i,j} = \sum_{r=0}^{k-\ell} \binom{k-\ell}{r}\binom{\ell}{k-i-r}\binom{\ell}{k-j-r}\binom{v-k-\ell}{i+j+r-k}$$

Johnsonova shema - provjera definicije (3. uvjet)

$$p^{\ell}_{i,j} = \sum_{r=0}^{k-\ell} \binom{k-\ell}{r} \binom{\ell}{k-i-r} \binom{\ell}{k-j-r} \binom{v-k-\ell}{i+j+r-k}$$



Johnsonova shema $J(4,2)$

Neka je $V = \{a, b, c, d\}$ i $k = 2$. Tada je

$$X = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$$

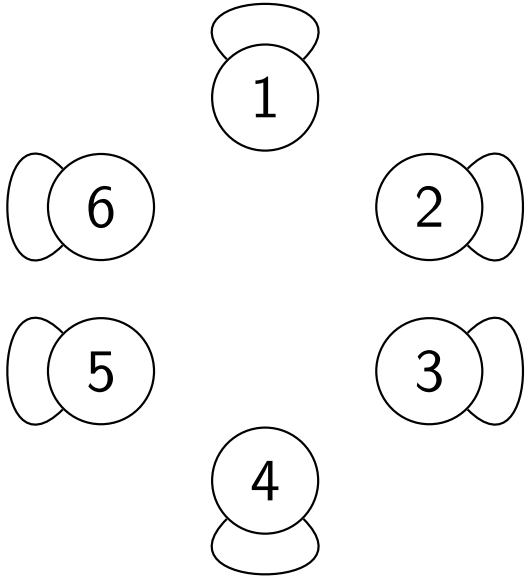
skup vrhova Johnsonovog grafa $J(4,2)$.

Johnsonova shema $J(4,2)$

Neka je $V = \{a, b, c, d\}$ i $k = 2$. Tada je

$$X = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$$

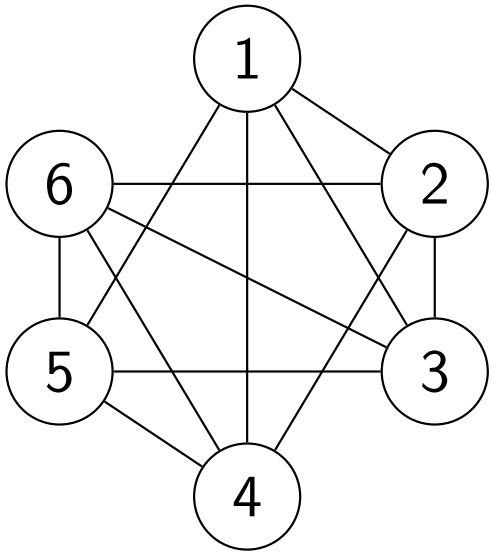
skup vrhova Johnsonovog grafa $J(4,2)$.



$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Slika: Johnsonov graf $J(4,2,0)$ i pripadna matrica susjedstva A_0

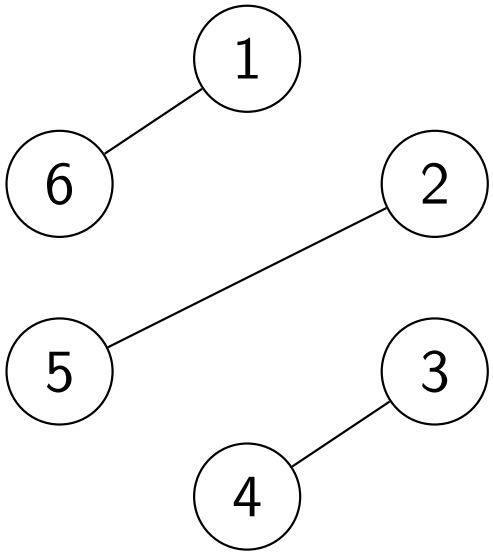
Johnsonova shema $J(4,2)$



$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Slika: Johnsonov graf $J(4,2,1)$ i pripadna matrica susjedstva A_1

Johnsonova shema $J(4,2)$



$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Slika: Johnsonov graf $J(4,2,2)$ i pripadna matrica susjedstva A_2

Hammingova shema $H(k, q)$

Neka je X skup svih riječi duljine k nad alfabetom veličine q za zadane k, q. Hammingova udaljenost $d(x, y)$ riječi x i y definirana je kao broj indeksa r takvih da je $x_r \neq y_r$.

Hammingova shema $H(k, q)$

Neka je X skup svih riječi duljine k nad alfabetom veličine q za zadane k, q. Hammingova udaljenost $d(x, y)$ riječi x i y definirana je kao broj indeksa r takvih da je $x_r \neq y_r$.

Definiramo graf G_i sa skupom vrhova X ($|X| = q^k$) tako da su dva vrha susjedna ako i samo ako je njihova Hammingova udaljenost jednaka i, za $i = 0, 1, \ldots, k$. Najveća moguća Hammingova udaljenost je k.

Hammingova shema $H(k, q)$

Neka je X skup svih riječi duljine k nad alfabetom veličine q za zadane k, q. Hammingova udaljenost $d(x, y)$ riječi x i y definirana je kao broj indeksa r takvih da je $x_r \neq y_r$.

Definiramo graf G_i sa skupom vrhova X ($|X| = q^k$) tako da su dva vrha susjedna ako i samo ako je njihova Hammingova udaljenost jednaka i, za $i = 0, 1, \ldots, k$. Najveća moguća Hammingova udaljenost je k.

Skup grafova $G_0, G_1, \ldots, G_k$ čini asocijacijsku shemu s k klasa, Hammingovu shemu $H(k, q)$.

$$p_{i,j}^{\ell} = \sum_{r=0}^{k-\ell} \binom{k-\ell}{r} \cdot (q-1)^r \cdot \binom{\ell}{i-r} \cdot \binom{i-r}{\ell+r-j} \cdot (q-2)^{i+j-\ell-2r}$$

Hammingova shema $H(3,2)$

Vrhovi sheme su $H(3,2)$ su riječi duljine 3 nad alfabetom $\{0,1\}$, odnosno

$$X = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}.$$

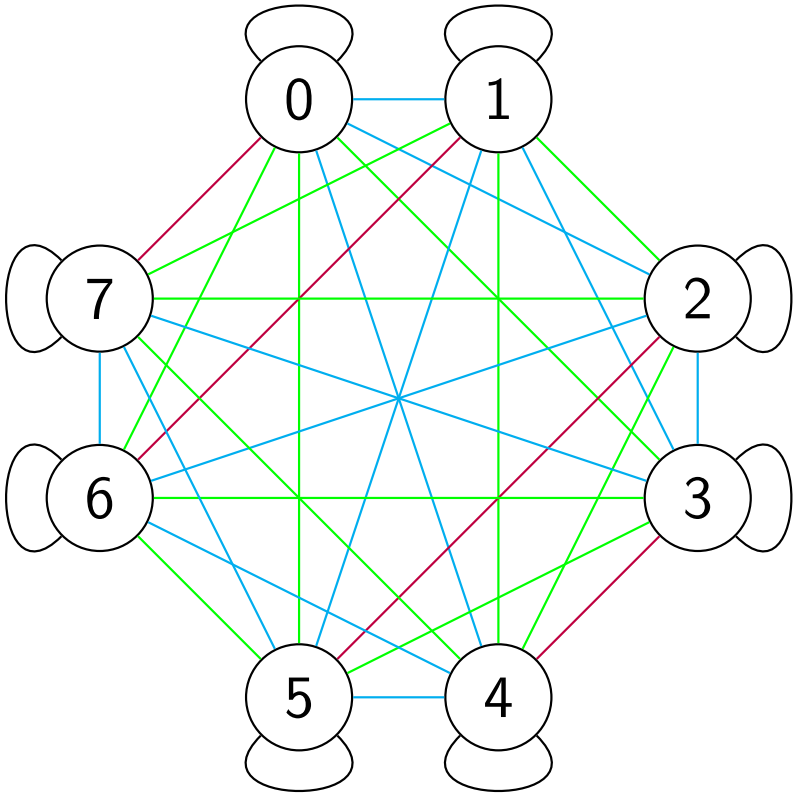
Najveća moguća Hammingova udaljenost vrhova jednaka je 3 pa je stoga $H(3,2)$ shema sa 3 klase.

Hammingova shema $H(3,2)$

Vrhovi sheme su $H(3,2)$ su riječi duljine 3 nad alfabetom $\{0,1\}$, odnosno

$$X = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}.$$

Najveća moguća Hammingova udaljenost vrhova jednaka je 3 pa je stoga $H(3,2)$ shema sa 3 klase.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Distancijsko regularni grafovi

Za regularan graf u kojemu za svaka dva vrha x, y broj vrhova z na udaljenosti i od x i na udaljenosti j od y ovisi samo o i, j te udaljenosti k između vrhova x i y kažemo da je distancijsko regularan graf.
(npr. potpun graf K_n, n-ciklus C_n, potpun bipartitan graf $K_{n,n}$, ...)

Distancijsko regularni grafovi

Za regularan graf u kojemu za svaka dva vrha x, y broj vrhova z na udaljenosti i od x i na udaljenosti j od y ovisi samo o i, j te udaljenosti k između vrhova x i y kažemo da je distancijsko regularan graf.
(npr. potpun graf K_n, n-ciklus C_n, potpun bipartitan graf $K_{n,n}$, ...)

Pomoću povezanog distancijsko regularnog grafa možemo generirati asocijacijsku shemu tako da su dva vrha i-asocirana ako je njihova udaljenost u početnom grafu jednaka i.

Distancijsko regularni grafovi

Za regularan graf u kojemu za svaka dva vrha x, y broj vrhova z na udaljenosti i od x i na udaljenosti j od y ovisi samo o i, j te udaljenosti k između vrhova x i y kažemo da je distancijsko regularan graf.
(npr. potpun graf K_n, n-ciklus C_n, potpun bipartitan graf $K_{n,n}$, ...)

Pomoću povezanog distancijsko regularnog grafa možemo generirati asocijacijsku shemu tako da su dva vrha i-asocirana ako je njihova udaljenost u početnom grafu jednaka i.

Johnsonov i Hammingov graf su distancijsko regularni pa su Johnsonova i Hammingova shema poseban primjer takvih asocijacijskih shema dobivenih pomoću distancijsko regularnih grafova.

Jako regularni grafovi

Kažemo da je graf s n vrhova jako regularan s parametrima (n, k, λ, μ) ako postoje $k, \lambda, \mu \in \mathbb{N}_0$ takvi da je svaki vrh stupnja k, svaka dva vrha imaju λ zajedničkih susjeda ako su susjedni, a μ zajedničkih susjeda ako nisu susjedni.

Dijametar jako regularnog grafa G (za $\mu \neq 0$) jednak je 2.

Jako regularni grafovi

Kažemo da je graf s n vrhova jako regularan s parametrima (n, k, λ, μ) ako postoje $k, \lambda, \mu \in \mathbb{N}_0$ takvi da je svaki vrh stupnja k, svaka dva vrha imaju λ zajedničkih susjeda ako su susjedni, a μ zajedničkih susjeda ako nisu susjedni.
Dijametar jako regularnog grafa G (za $\mu \neq 0$) jednak je 2.

Propozicija

Neka je $A_0 = I$ jedinična matrica reda n te A_1 i A_2 simetrične matrice reda n s elementima 0 i 1 takve da vrijedi $I + A_1 + A_2 = J$. Tada skup $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, A_2\}$ tvori asocijacijsku shemu s 2 klase ako i samo ako su A_1 i A_2 matrice susjedstva međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.

Konstrukcija pomoću konačnih grupa

- X neki n-člani skup i Γ grupa permutacija na X
- Γ je tranzitivna ako za proizvoljne elemente $x, y \in X$ postoji permutacija $\gamma \in \Gamma$ takva da vrijedi $\gamma x = y$
- Γ je obilno tranzitivna ako za proizvoljne $x, y \in X$ postoji permutacija $\gamma \in \Gamma$ takva da je $\gamma x = y$ i $\gamma y = x$

Konstrukcija pomoću konačnih grupa

- X neki n-člani skup i Γ grupa permutacija na X
- Γ je tranzitivna ako za proizvoljne elemente $x, y \in X$ postoji permutacija $\gamma \in \Gamma$ takva da vrijedi $\gamma x = y$
- Γ je obilno tranzitivna ako za proizvoljne $x, y \in X$ postoji permutacija $\gamma \in \Gamma$ takva da je $\gamma x = y$ i $\gamma y = x$
- za proizvoljan element $x \in X$ definiramo njegovu orbitu kao skup $\{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma\}$, orbite od Γ pri djelovanju na $X \times X$ nazivamo orbitalama

Konstrukcija pomoću konačnih grupa

- X neki n-člani skup i Γ grupa permutacija na X
- Γ je tranzitivna ako za proizvoljne elemente $x, y \in X$ postoji permutacija $\gamma \in \Gamma$ takva da vrijedi $\gamma x = y$
- Γ je obilno tranzitivna ako za proizvoljne $x, y \in X$ postoji permutacija $\gamma \in \Gamma$ takva da je $\gamma x = y$ i $\gamma y = x$
- za proizvoljan element $x \in X$ definiramo njegovu orbitu kao skup $\{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma\}$, orbite od Γ pri djelovanju na $X \times X$ nazivamo orbitalama
- Γ je tranzitivna ako i samo ako je skup $\{(x, x) \mid x \in X\}$, odnosno dijagonala skupa $X \times X$, orbitala od Γ

Konstrukcija pomoću konačnih grupa

- X neki n-člani skup i Γ grupa permutacija na X
- Γ je tranzitivna ako za proizvoljne elemente $x, y \in X$ postoji permutacija $\gamma \in \Gamma$ takva da vrijedi $\gamma x = y$
- Γ je obilno tranzitivna ako za proizvoljne $x, y \in X$ postoji permutacija $\gamma \in \Gamma$ takva da je $\gamma x = y$ i $\gamma y = x$
- za proizvoljan element $x \in X$ definiramo njegovu orbitu kao skup $\{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma\}$, orbite od Γ pri djelovanju na $X \times X$ nazivamo orbitalama
- Γ je tranzitivna ako i samo ako je skup $\{(x, x) \mid x \in X\}$, odnosno dijagonala skupa $X \times X$, orbitala od Γ

Propozicija

Neka je Γ obilno tranzitivna grupa permutacija na skupu X. Tada orbitale od Γ na $X \times X$ određuju grafove koji čine asocijacijsku shemu.

C. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall, 1993.

Generalizacija asocijacijskih shema

Odustanemo li od zahtjeva obilne tranzitivnosti, tj. ako je Γ proizvoljna grupa permutacija, orbitale od Γ particioniraju skup $X \times X$ i tako tvore koherentnu konfiguraciju, generalizaciju asocijacijskih shema.

Definicija

Koherentna konfiguracija na X je skup matrica $\{A_1, \ldots, A_s\}$ dimenzija $n \times n$ s elementima 0 i 1 koji zadovoljava sljedeće uvjete:

1. $\sum_{i \in I_0} A_i = I$, *za neki podskup indeksa* $I_0 \subseteq \{1, \ldots, s\}$,
2. $\sum_{i=1}^{s} A_i = J$,
3. *za svaku matricu A_i postoji matrica $A_{i'}$ tako da vrijedi $A_i^t = A_{i'}$,*
4. *produkt matrica $A_i A_j$ je linearna kombinacija matrica $A_1, \ldots, A_s$ za sve i, j (koeficijente nazivamo presječnim brojevima).*

Za koherentnu konfiguraciju kažemo da je homogena ako je skup I_0 jednočlan, komutativna ako za sve indekse i, j vrijedi $A_i A_j = A_j A_i$, te simetrična ako je $A_i = A_i^t$ za sve $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Bose-Mesnerova algebra

Označimo sa $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ asocijacijsku shemu s d klasa, promatramo realan vektorski prostor razapet matricama skupa $\mathcal{A}$, $\mathrm{span}(\mathcal{A})$.

Bose-Mesnerova algebra

Označimo sa $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ asocijacijsku shemu s d klasa, promatramo realan vektorski prostor razapet matricama skupa $\mathcal{A}$, $\mathrm{span}(\mathcal{A})$.

Skup matrica $\mathcal{A}$ je linearno nezavisan:

$$\sum_{k=0}^{d} \lambda_k [A_k]_{i,j} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Za sve $i, j = 1, \ldots, n$ točno jedan element $[A_k]_{i,j}$ jednak je 1 te za svaki $k = 0, 1, \ldots d$ postoji barem jedan element $[A_k]_{i,j}$ jednak 1.

Bose-Mesnerova algebra

Označimo sa $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ asocijacijsku shemu s d klasa, promatramo realan vektorski prostor razapet matricama skupa $\mathcal{A}$, $\mathrm{span}(\mathcal{A})$.

Skup matrica $\mathcal{A}$ je linearno nezavisan:

$$\sum_{k=0}^{d} \lambda_k [A_k]_{i,j} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Za sve $i, j = 1, \ldots, n$ točno jedan element $[A_k]_{i,j}$ jednak je 1 te za svaki $k = 0, 1, \ldots d$ postoji barem jedan element $[A_k]_{i,j}$ jednak 1. Dimenzija prostora $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ jednaka je $d + 1$, a skup $\mathcal{A}$ jedna njegova baza.

Bose-Mesnerova algebra

Označimo sa $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ asocijacijsku shemu s d klasa, promatramo realan vektorski prostor razapet matricama skupa $\mathcal{A}$, $\mathrm{span}(\mathcal{A})$.

Skup matrica $\mathcal{A}$ je linearno nezavisan:

$$\sum_{k=0}^{d} \lambda_k [A_k]_{i,j} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Za sve $i, j = 1, \ldots, n$ točno jedan element $[A_k]_{i,j}$ jednak je 1 te za svaki $k = 0, 1, \ldots d$ postoji barem jedan element $[A_k]_{i,j}$ jednak 1. Dimenzija prostora $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ jednaka je $d + 1$, a skup $\mathcal{A}$ jedna njegova baza.

Po definiciji je $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ zatvoren na matrično množenje pa je vektorski prostor $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ komutativna matrična algebra koju nazivamo Bose-Mesnerovom algebrom asocijacijske sheme $\mathcal{A}$.

Schurove idempotente

Definicija

Neka su A i B matrice tipa $m \times n$. Schurov produkt matrica A i B, u oznaci $A \circ B$, definiran je sa

$$[A \circ B]_{i,j} = [A]_{i,j} \cdot [B]_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Schurove idempotente

Definicija

Neka su A i B matrice tipa $m \times n$. Schurov produkt matrica A i B, u oznaci $A \circ B$, definiran je sa

$$[A \circ B]_{i,j} = [A]_{i,j} \cdot [B]_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Za $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$A_i \circ A_j = \begin{cases} A_i, & i = j \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

odnosno skup $\mathcal{A} \cup \{0\}$ je zatvoren na Schurov produkt pa je posljedično i $\operatorname{span}(\mathcal{A})$ zatvoren na Schurov produkt.

Schurove idempotente

Definicija

Neka su A i B matrice tipa $m \times n$. Schurov produkt matrica A i B, u oznaci $A \circ B$, definiran je sa

$$[A \circ B]_{i,j} = [A]_{i,j} \cdot [B]_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Za $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$A_i \circ A_j = \begin{cases} A_i, & i = j \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

odnosno skup $\mathcal{A} \cup \{0\}$ je zatvoren na Schurov produkt pa je posljedično i $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ zatvoren na Schurov produkt.

- komutativna algebra s jedinicom u odnosu na matrično množenje i Schurov produkt
- A_i, $i = 0, \ldots, d$, idempotentne i u parovima ortogonalne u odnosu na Schurov produkt (Schurove idempotente asocijacijske sheme)

Glavne idempotente

- A matrična reprezentacija simetričnog operatora, λ neka njena (realna) svojstvena vrijednost
- U_λ matrica čiji stupci čine ortonormiranu bazu za svojstveni potprostor pripadne svojstvene vrijednosti λ

Glavne idempotente

- A matrična reprezentacija simetričnog operatora, λ neka njena (realna) svojstvena vrijednost
- U_λ matrica čiji stupci čine ortonormiranu bazu za svojstveni potprostor pripadne svojstvene vrijednosti λ
- $E_\lambda := U_\lambda U_\lambda^t$ djeluje kao ortogonalna projekcija na svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ, matrični prikaz ne ovisi o odabiru U_λ
- E_λ međusobno ortogonalne s obzirom na matrično množenje (svojstveni potprostori normalne matrice međusobno ortogonalni)

Glavne idempotente

- A matrična reprezentacija simetričnog operatora, λ neka njena (realna) svojstvena vrijednost
- U_λ matrica čiji stupci čine ortonormiranu bazu za svojstveni potprostor pripadne svojstvene vrijednosti λ
- $E_\lambda := U_\lambda U_\lambda^t$ djeluje kao ortogonalna projekcija na svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ, matrični prikaz ne ovisi o odabiru U_λ
- E_λ međusobno ortogonalne s obzirom na matrično množenje (svojstveni potprostori normalne matrice međusobno ortogonalni)

Za matrice $E_\lambda = U_\lambda U_\lambda^t$ kažemo da su glavne idempotente matrice A.

Glavne idempotente

Teorem (Spektralna dekompozicija)

Neka je A simetrična matrica reda n s glavnim idempotentama E_λ, $\lambda \in \sigma(A)$. Tada vrijedi:

a. $E_\lambda^2 = E_\lambda$ *i* $E_\lambda E_\mu = 0$ *za* $\lambda \neq \mu$,
b. $AE_\lambda = \lambda E_\lambda$,
c. $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda = I$,
d. *ako je* $f(x)$ *racionalna funkcija definirana u svim svojstvenim vrijednostima od* A, *vrijedi* $f(A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) E_\lambda$.

Glavne idempotente asocijacijske sheme

Teorem

Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ *asocijacijska shema s* d *klasa čije su matrice dimenzija* $n \times n$. *Tada postoje s obzirom na matrično množenje idempotentne i u parovima ortogonalne matrice* $E_0, E_1, \ldots, E_d$ *te brojevi* $p_i(j) \in \mathbb{R}$ *takvi da vrijedi:*

a. $\sum_{j=0}^{d} E_j = I$,
b. $A_i E_j = p_i(j) E_j$,
c. $E_0 = \frac{1}{n} J$,
d. $\{E_0, E_1, \ldots, E_d\}$ *je baza za* $\mathrm{span}(\mathcal{A})$.

C. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall, 1993.

Dualni parametri

- E_j, $j = 0, 1, \ldots, d$, nazivamo glavnim idempotentama asocijacijske sheme $\mathcal{A}$
- $p_i(j)$ nazivamo svojstvenim vrijednostima asocijacijske sheme $\mathcal{A}$

Dualni parametri

- E_j, $j = 0, 1, \ldots, d$, nazivamo glavnim idempotentama asocijacijske sheme $\mathcal{A}$
- $p_i(j)$ nazivamo svojstvenim vrijednostima asocijacijske sheme $\mathcal{A}$
- $n_0, n_1, \ldots, n_d$ redom stupnjevi grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$, odnosno grafova određenih redom matricama susjedstva $A_0, A_1, \ldots, A_d$
- $m_0, m_1, \ldots, m_d$ dimenzije svojstvenih potprostora koje određuju redom $E_0, E_1, \ldots, E_d$ (kratnosti asocijacijske sheme $\mathcal{A}$)

Dualni parametri

- E_j, $j = 0, 1, \ldots, d$, nazivamo glavnim idempotentama asocijacijske sheme $\mathcal{A}$
- $p_i(j)$ nazivamo svojstvenim vrijednostima asocijacijske sheme $\mathcal{A}$
- $n_0, n_1, \ldots, n_d$ redom stupnjevi grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$, odnosno grafova određenih redom matricama susjedstva $A_0, A_1, \ldots, A_d$
- $m_0, m_1, \ldots, m_d$ dimenzije svojstvenih potprostora koje određuju redom $E_0, E_1, \ldots, E_d$ (kratnosti asocijacijske sheme $\mathcal{A}$)

$$A_i = \sum_{j=0}^{d} p_i(j) E_j \qquad\qquad E_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} q_i(j) A_j$$

- $q_i(j)$ nazivamo dualnim svojstvenim vrijednostima asocijacijske sheme

Dualni parametri

Lema

Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ asocijacijska shema s d klasa čije su matrice dimenzija $n \times n$ te neka su $p_i(j)$, $i, j = 0, 1, \ldots, d$, svojstvene vrijednosti od $\mathcal{A}$, a $q_i(j)$, $i, j = 0, 1, \ldots, d$, dualne svojstvene vrijednosti od $\mathcal{A}$. Tada vrijedi:

- $p_0(j) = 1, \quad \forall j = 0, 1, \ldots, d$
- $p_i(0) = n_i, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, d$
- $q_0(j) = 1, \quad \forall j = 0, 1, \ldots, d$
- $q_i(0) = m_i, \forall i = 0, 1, \ldots, d$

Brojeve $p_i(0)$ nazivamo i stupnjevima asocijacijske sheme.

Dualni parametri

Definicija

Neka je P matrica dimenzija $(d+1) \times (d+1)$ za koju vrijedi $[P]_{i,j} = p_j(i)$ te neka je Q matrica dimenzija $(d+1) \times (d+1)$ za koju vrijedi $[Q]_{i,j} = q_j(i)$. Matricu P nazivamo matricom svojstvenih vrijednosti, a matricu Q matricom dualnih svojstvenih vrijednosti asocijacijske sheme.

Propozicija

Za matricu svojstvenih vrijednosti P i dualnih svojstvenih vrijednosti Q vrijedi $PQ = QP = nI$.

Dualni parametri

- presječni brojevi $p_{i,j}^k$ asocijacijske sheme javljaju kao koeficijenti uz bazne matrice A_k kod zapisivanja produkta A_iA_j

$$A_iA_j = \sum_{k=0}^{d} p_{i,j}^k A_k$$

- $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ zatvoren na Schurov produkt, tj. vrijedi $E_i \circ E_j \in \mathrm{span}(\mathcal{A})$, pa postoje koeficijenti $q_{i,j}^k$ takvi da vrijedi

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{d} q_{i,j}^k E_k$$

- brojeve $q_{i,j}^k$ nazivamo Kreinovim parametrima asocijacijske sheme

Invarijantnost

Za $A, B \in \operatorname{span}(\mathcal{A})$

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^t B) \overset{\text{sim}}{=} \operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} [B]_{k,i} \right) = \operatorname{sum}(A \circ B)$$

Invarijantnost

Za $A, B \in \operatorname{span}(\mathcal{A})$

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^t B) \overset{\text{sim}}{=} \operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,i}\right) = \operatorname{sum}(A \circ B)$$

Propozicija

Za presječne brojeve $p_{i,j}^k$ i Kreinove parametre $q_{i,j}^k$ vrijedi

$$p_{i,j}^k = \frac{1}{\operatorname{sum} A_k}\sum_{r=0}^{d} p_i(r)p_j(r)p_k(r)m_r,$$

$$q_{i,j}^k = nm_i m_j \sum_{r=0}^{d} \frac{1}{(\operatorname{sum} A_r)^2}\, p_r(i)p_r(j)p_r(k).$$

Invarijantnost

Za $A, B \in \operatorname{span}(\mathcal{A})$

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^t B) \overset{\text{sim}}{=} \operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,i}\right) = \operatorname{sum}(A \circ B)$$

Propozicija

Za presječne brojeve $p_{i,j}^k$ i Kreinove parametre $q_{i,j}^k$ vrijedi

$$p_{i,j}^k = \frac{1}{\operatorname{sum} A_k}\sum_{r=0}^{d} p_i(r)p_j(r)p_k(r)m_r,$$

$$q_{i,j}^k = nm_i m_j \sum_{r=0}^{d} \frac{1}{(\operatorname{sum} A_r)^2}\, p_r(i)p_r(j)p_r(k).$$

Vrijednosti $p_{i,j}^k \operatorname{sum}(A_k)$ i $q_{i,j}^k \operatorname{tr}(E_k)$ invarijantne su na permutacije indeksa i, j, k.

Nenegativnost

Presječni brojevi i Kreinovi parametri asocijacijske sheme su nenegativni.

Nenegativnost

Presječni brojevi i Kreinovi parametri asocijacijske sheme su nenegativni.

Definicija

Neka je A matrica tipa $m_1 \times n_1$, a B matrica tipa $m_2 \times n_2$. Kroneckerov produkt matrica A i B, u oznaci $A \otimes B$, definiran je kao matrica tipa $m_1 m_2 \times n_1 n_2$ dobivena zamjenom svakog elementa a_{ij} matrice A matricom $a_{ij} B$.

Definicija

Kažemo da je kvadratna matrica B glavna podmatrica kvadratne matrice A ako je B dobivena iz A brisanjem redaka i stupaca s istim indeksima, ili ekvivalentno ostavljanjem redaka i stupaca matrice A s istim indeksima. Ako je B dobivena ostavljanjem prvih k redaka i k stupaca matrice A kažemo da je B vodeća glavna podmatrica matrice A.

Nenegativnost

Lema

Neka su A i B kvadratne matrice reda n. Tada je matrica $A \circ B$ glavna podmatrica matrice $A \otimes B$.

Lema

Neka je A kvadratna matrica reda n. Tada je A simetrična pozitivno semidefinitna matrica ako i samo ako je svaka njena glavna podmatrica simetrična pozitivno semidefinitna matrica.

Skica. Kreinovi parametri $q_{i,j}^k$ su svojstvene vrijednosti matrice $E_i \circ E_j$.

$$(E_i \circ E_j)E_k = \frac{1}{n} q_{i,j}^k E_k$$

Matrica $E_i \otimes E_j$ je idempotentna pa su joj svojstvene vrijednosti jednake 0 ili 1. Budući da je i simetrična, zaključujemo da je pozitivno semidefinitna.

Hvala na pažnji!

To be continued . . .